Universität Tübingen
Mathematisches Institut Tübingen, den 11.12.2007

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie (9)

(33) Sei $n = x^2 + y^2$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen x, y. Geht $p = 2$ oder eine Primzahl $p \equiv 1 \pmod 4$ in n auf, so ist auch $\frac{n}{p}$ eine Summe von zwei teilerfremden Quadraten in $\mathbb{N}$.

(34) Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei p eine ungerade Primzahl mit $p \nmid n$. Genau dann ist $(\frac{-n}{p}) = 1$, wenn es teilerfremde natürliche Zahlen x, y gibt mit $p \mid x^2 + ny^2$.

(35) Seien x, y teilerfremde natürliche Zahlen. Sei p eine ungerade Primzahl. Man zeige:
(a) Gilt $p \mid x^2 + y^2$, so ist $p = a^2 + b^2$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen a, b.
(b) Gilt $p \mid x^2 + 2y^2$, so ist $p = a^2 + 2b^2$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen a, b.
(c) Gilt $3 \neq p \mid x^2 + 3y^2$, so ist $p = a^2 + 3b^2$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen a, b.
(d) Gilt $5 \neq p \mid x^2 + 5y^2$, so ist nicht immer auch $p = a^2 + 5b^2$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen a, b (Beispiel!).

(36) Sei n eine ungerade natürliche Zahl mit einer Darstellung $n = x^2 + 7y^2$ für teilerfremde natürliche Zahlen x, y. Man zeige, dass jeder Primteiler $p \neq 7$ von n ebenso eine Darstellung $p = a^2 + 7b^2$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen a, b hat.