Universität Tübingen
Mathematisches Institut Tübingen, den 15.01.2008

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie (12)

(45) Sei $p = 2^{2^n} + 1$ eine Fermatsche Primzahl ($n \geq 1$). Ist n gerade, so gilt $(\frac{13}{p}) = 1$. Ist n ungerade, so gilt $(\frac{11}{p}) = 1$. (Hinweis: Es ist $o(2 \bmod 11) = 10$ und $o(2 \bmod 13) = 12$.)

(46) Sei $p = 2^q - 1$ eine Mersennesche Primzahl ($q \geq 3$).
(a) Ist $q \equiv 1 \pmod 4$, so ist $(\frac{5}{p}) = 1$.
(b) Ist $q \equiv 7 \pmod{12}$, so ist $(\frac{13}{p}) = 1$.
(c) Ist $q \equiv 11 \pmod{12}$, so ist $(\frac{7}{p}) = 1$.

(47) Ist $p \equiv 3 \pmod 4$ eine Primzahl, so hat die diophantische Gleichung

$$X^2 - pY^2 = -1$$

keine ganzzahlige Lösung.

(48) Ist n eine ungerade Pseudoprimzahl, so ist auch $2^n - 1$ eine Pseudoprimzahl. Man folgere, dass es unendlich viele ungerade Pseudoprimzahlen gibt. (Man weiß, dass es auch unendlich viele gerade Pseudoprimzahlen gibt. Die kleinste gerade Pseudoprimzahl ist $161083 = 2 \cdot 73 \cdot 1103$.)