Universität Tübingen
Mathematisches Institut Tübingen, den 16.10.2006

Übungen zur Gruppentheorie (1)

(1) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Man definiere auf G eine neue Multiplikation $\circ$ durch die Vorschrift $x \circ y = y \cdot x$ $(x, y \in G)$. Man zeige, das $(G, \cdot) \cong (G, \circ)$ ist.

(2) Man überlege, unter welchen der folgenden Voraussetzungen die Gruppe $G = (G, \cdot)$ notwendig kommutativ (abelsch) ist:
(a) Es gilt $x^2 = 1$ für alle $x \in G$.
(b) Es gilt $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ für alle $x, y \in G$.
(c) Es gilt $x^3 = 1$ für alle $x \in G$.
(d) Es gilt $xy^2 = 1$ für all $x, y \in G$.

(3) Sei H eine Untergruppe der (multiplikativen) Gruppe G mit endlichem Index $|G : H| = n$. Ist H ein Normalteiler von G, so gilt $g^n \in H$ für alle $g \in G$. Dies ist nicht richtig, wenn H nicht normal in G ist (Beispiel!).

(4) Sei H eine echte Untergruppe der endlichen Gruppe G. Für $g \in G$ ist $H^g = g^{-1}Hg = \{g^{-1}hg \mid h \in H\}$ wieder eine Untergruppe von G ist. Man zeige, dass es höchstens $|G : H|$ viele solche *Konjugierte* H^g von H gibt. Man folgere, dass $\bigcup_{g \in G} H^g \neq G$ ist.

Anmerkung. Für den Erhalt eines Übungsscheins wird aktive Teilnahme in der Übungsgruppe gefordert sowie die schriftliche Bearbeitung von jeweils **einer** der wöchentlich gestellten Übungsaufgaben (Änderungen vorbehalten).