Universität Tübingen
Mathematisches Institut Tübingen, den 23.10.2006

Übungen zur Gruppentheorie (2)

(5) Sei G die Gruppe (!) aller reellen 2×2-Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $a \neq 0$. Man zeige, dass die Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{Z}$, eine Untergruppe H von G bilden; es is $H = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ eine zyklische Gruppe, und zwar unendlich zyklisch. Warum ist H isomorph zu $(\mathbb{Z}, +)$? Sei $x = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für ein festes $r \in \mathbb{N}_{>1}$. Man zeige, das H eine (echte) Untergruppe von $H^x = x^{-1}Hx$ ist, und zwar mit dem Index $|H^x : H| = n$.

(6) Hat die unendliche Gruppe G eine Untergruppe H mit endlichem Index $|G : H|$, so ist G keine einfache Gruppe.

(7) Hat die endliche Gruppe G nur eine (echte) *maximale* Untergruppe, so ist G zyklisch von Primzahlpotenzordnung.

(8) Seien H und K Untergruppen der endlichen Gruppe G. Genau dann ist das *Komplexprodukt* $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ eine Untergruppe von G, wenn $KK = KH$ gilt. In jedem Falle gilt

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}.$$