Universität Tübingen
Mathematisches Institut Tübingen, den 30.10.2006

Übungen zur Gruppentheorie (3)

(9) Seien H und K Untergruppen der (multiplikativen) Gruppe G.

(a) Gilt $H \leq K \leq G$, so ist $|G : H| = |G : K| \cdot |K : H|$ (Drei-Indexformel).

(b) Es gilt im allgemeinen $|G : H \cap K| \leq |G : H| \cdot |G : K|$, und genau dann gilt das Gleichheitszeichen, wenn $G = HK$ ist.

(c) Sind $|G : H|$ und $|G : K|$ (endlich und) teilerfremd, so gilt $G = HK$. (Warum kann man beim Beweis oBdA annehmen, dass G endlich ist ?)

(10) Seien H und K Untergruppen der Gruppe G, und sei $x \in G$. Man zeige, dass die Doppelnebenklasse HxK genau $|K : K \cap H^x|$ verschiedene Rechtsnebenklassen von H und genau $|H : H \cap K^{x^{-1}}|$ verschiedene Linksnebenklassen von K enthält.

Zusatz. Seien G, H und x wie in Aufgabe (5). Man zeige, dass die Doppelnebenklasse HxH genau eine Rechtsnebenklasse von H und genau r verschiedene Linksnebenklassen von H enthält.

(11) Hat die Gruppe G eine Untergruppe H mit Index $|G : H| = 3$, so hat G einen Normalteiler mit Index 2 oder einen Normalteiler mit Index 3. Was kann man noch sagen, wenn $|G : H| = 4$ ist ?

(12) Die Gruppe G sei transitiv auf der endlichen Menge M, $|M| \geq 2$. Man zeige, dass es ein Element in G gibt, das keinen Fixpunkt auf M hat. (Warum kann man beim Beweis oBdA annehmen, dass G endlich ist ?)