Universität Tübingen
Mathematisches Institut Tübingen, den 06.11.2006

Übungen zur Gruppentheorie (4)

(13) Die Würfelgruppe W hat treue und transitive Permutationsdarstellungen:
(1) Auf den 8 Ecken des Würfels ($W \leq S_8$).
(2) Auf den 6 Seitenflächen des Würfels ($W \leq S_6$).
(3) Auf den 12 Kanten des Würfels ($W \leq S_{12}$).
(4) Auf den 4 Raumdiagonalen des Würfels ($W \leq S_4$).
Man überlege, unter welchen dieser Einbettungen von W in S_n die Würfelgruppe in A_n liegt.

(14) Die symmetrische Gruppe $G = S_4$ hat eine Untergruppe $P \cong D_4$. Es gibt genau 3 solche Untergruppen der Ordnung 8 in G, und

$$V_4 = \mathrm{Core}_G(P)$$

ist ein nichtzyklischer Normalteiler von G der Ordnung 4. Warum ist $S_4/V_4 \cong S_3$? Warum hat A_4 keine Untergruppe der Ordnung 6 ?

(15) Man fasse die Diedergruppe D_n als Untergruppe von S_n auf (durch geeignete Nummerierung der Ziffern $1, \cdots, n$). Genau dann gilt dabei $D \leq A_n$, wenn $n \equiv 1 \pmod 4$ ist.

(16) Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem (kommutativen) Körper F ($n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$). Sei $G = \mathrm{GL}(V)$ die generelle lineare Gruppe auf V und M die Menge aller 1-dimensionalen Teilräume von V; dies ist in natürlicher Weise ein G-Raum. Man zeige, dass G 2-fach transitiv auf M und dass die Gruppe der Skalarmultiplikationen in G der Kern der zugehörigen Permutationsdarstellung auf M ist.
Frage. Ist G transitiv (2-transitiv) auf $V \setminus \{0\}$?