Universität Tübingen
Mathematisches Institut Tübingen, den 13.11.2006

Übungen zur Gruppentheorie (5)

(17) Die Untergruppe G der generellen linearen Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ werde durch die beiden Matrizen $x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt. Es gilt $x^4 = 1$ (Einheitsmatrix), $y^2 = 1$ und $xy = yx^3$. Man zeige, dass $G \cong D_4$ isomorph zur Diedergruppe der Ordnung 8 ist.

(18) Sei $\mathbb{F}_3 = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +, \cdot)$ der Körper mit den 3 Elementen $0, 1, 2$. Was ist $2 + 2$ und was ist $2 \cdot 2$ in diesem Körper ? Man zeige, dass die beiden Matrizen $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ eine nichtabelsche Untergruppe $Q = \langle a, b \rangle$ der Ordnung 8 in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ erzeugen. Diese Gruppe ist nicht isomorph D_4, da sowohl a als auch b die Ordnung 4 haben (mit $a^2 = b^2$).
Bemerkung. $Q = Q_8$ heißt die *Quaternionengruppe* (der Ordnung 8).

(19) Die Matrizen $x = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erzeugen eine nichtabelsche Gruppe Q von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ der Ordnung 8 ($i^2 = -1$). Man zeige, dass $Q \cong Q_8$ gilt. Das Element $x^2 = y^2$ erzeugt einen Normalteiler Z von Q und Q/Z ist isomorph zur nichtzyklischen Gruppe der Ordnung 4. Man gebe alle Untergruppen von Q an und zeige, dass alle Normalteiler sind.

Zusatz. Man zeige, dass D_4 und Q_8 bis auf Isomorphie die einzigen nichtabelschen Gruppen der Ordnung 8 sind.

(20) Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $|G| = 2u$ mit ungeradem u. Nach Cauchy gibt es in G ein Element x der Ordnung $o(x) = 2$. Durch Betrachten der rechtsregulären Darstellung von G auf sich erhält man einen Monomorphismus

$$\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Sym(G)} \cong \mathrm{S_{2u}}.$$

Man zeige, dass $\varphi(x)$ eine ungerade Permutation ist und folgere, dass G einen Normalteiler mit Index 2 hat.