Universität Tübingen
Mathematisches Institut Tübingen, den 04.12.2006

Übungen zur Gruppentheorie (8)

(29) Man bestimme alle Isomorphietypen der Gruppen bis zur Ordnung 15. (Die Gruppen der Ordnung 8 und 12 verdienen besondere Aufmerksamkeit; die Gruppen der Ordnung 8 sind schon behandelt.)

(30) Man gebe möglichst viele (alle) Isomorphietypen von Gruppen der Ordnung 36 an. Wieviele sind abelsch, wieviele nilpotent ?

(31) Ist G eine nichtauflösbare Gruppe der Ordnung $|G| \leq 60$, so ist $G \cong A_5$.

(32) Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl.
(a) Das Erzeugnis aller p-Normalteiler von G ist der größte Normalteiler $O_p(G)$ von G, der eine p-Gruppe ist. Warum ist $O_p(G)$ charakteristisch in G ?
(b) $O^p(G) = \bigcap\{N |\ N \trianglelefteq G,\ G/N\, p - \text{Gruppe}\}$ ist der kleinste Normalteiler von G mit p-Faktorgruppe. Warum ist $O^p(G)$ charakteristisch in G, und warum ist $O^p(G)$ das Erzeugnis aller q-Sylowgruppen von G für die Primzahlen $q \neq p$?

Zusatz. In G gibt es einen größten nilpotenten Normalteiler $F(G) = \prod_p O_p(G)$ (*Fittinggruppe*) und einen kleinsten Normalteiler $G^{\mathfrak{N}} = \bigcap_{p \in \mathbb{P}} O^p(G)$ mit nilpotenter Faktorgruppe.