Tübingen, den 17.10.2002 Prof. Kaup Wintersemester 2002/3

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

Blatt 1

Abgabe am Dienstag, den 22.10.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 1

1. Man beschreibe folgende Funktionen auf $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{C}^*$ anschaulich und untersuche sie auf komplexe Differenzierbarkeit.
   i. $f(z) = az\,, \quad a \in \mathbb{C}$,
   ii. $g(z) = r/\overline{z}\,, \quad r > 0$.
2. Man skizziere in Abhängigkeit von $r \in \mathbb{R}$ die folgenden Mengen. Welche von ihnen sind offen in $\mathbb{C}$, abgeschlossen in $\mathbb{C}$, zusammenhängend?
   i. $\{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Im}(z^2) \leq r\}$,
   ii. $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| + |z+a| < 2r\}$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$.

Aufgabe 2

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f_j\colon D_j \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$, wobei

1. $f_1(z) = \mathsf{Im}(e^z)$ und $D_1 := \{x + iy \in \mathbb{C} : |x| \leq 1\,,\ |y| \leq \pi\}$,
2. $f_2(z) = |\mathsf{sin} z|$ und $D_2 := i \cdot D_1$,
3. $f_3(z) = |z^3 - z^2|^{-1}$ und $D_3 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2, z^3 \neq z^2\}$.

[Die Zeichnungen sollen mathematisch begründet werden. Computergraphiken sind nicht gemeint, können aber zur Kontrolle hilfreich sein.]

Aufgabe 3

1. Berechnen Sie die Nullstellen von cos in $\mathbb{C}$.
2. Berechnen Sie $\mathsf{sin}^2 + \mathsf{cos}^2$.
3. Skizzieren Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |\mathsf{sin} z| \leq 1\}$ (Vergl. Aufgabe 2.2).
4. Berechnen Sie die Ableitung von sin und von cos.

Die komplexen trigonometrischen Funktionen $\mathsf{sin} z$ und $\mathsf{cos} z$ sind definiert durch

$$\mathsf{sin} z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \mathsf{cos} z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad .$$