Tübingen, den 17.12.2002 Prof. Kaup Wintersemester 2002/3

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

Blatt 10

Abgabe am Dienstag, den 7.1.2003, in der Vorlesung

Aufgabe 28

Man bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \frac{(y^2+1)x}{(x^2-1)y}$$

in $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2-1)y \neq 0\}$.

Aufgabe 29

Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und $f: U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft:

$t \neq 0$, $(x,y) \in U \quad \Longrightarrow \quad (tx,ty) \in U$ und $f(tx,ty) = f(x,y)$.

1. Man führe das Auffinden lokaler Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ auf in der Vorlesung behandelte Fälle zurück. (Betrachte Ansätze der Form $y = x \cdot u$ oder $y = x/u$.)
2. Man löse mit diesem Verfahren für $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ die Differentialgleichung

$$y' = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2} \; .$$

Aufgabe 30

Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) = 0$ für $x \geq 1$ und $f(x) > 0$ für $x < 1$. Man beweise oder widerlege

1. $A \Longleftrightarrow B$ 2. $C \Longrightarrow B$ 3. $B \Longrightarrow C$

für die folgenden Eigenschaften:

A: Es existiert genau eine maximale Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung $x' = f(x)$ zum Anfangswert $x(1) = 1$,

B: $$\int_0^1 \frac{dx}{f(x)} = +\infty \, ,$$

C: Es gibt ein $L > 0$ mit $f(x) \leq L \cdot |x-1|$ für $|x-1| < 1$.

Wir wünschen frohe Festtage und ein erfolgreiches Jahr 2003.