

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

B l a t t 11

Abgabe am Dienstag, den 14.1.2003, in der Vorlesung

Aufgabe 31

Zur näherungsweise Berechnung der Funktionswerte von Lösungen von Anfangswertproblemen gibt es verschiedene numerische Verfahren. Eines der einfachsten (wenn auch nicht sehr effektiven) Verfahren ist das Polygonzugverfahren: Zur Berechnung des Näherungswertes für die Lösung des Anfangswertproblems $y' = g(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ im Punkte t_1 wird dabei zunächst eine Schrittweite $h := (t_1 - t_0)/n$ mit $n \in \mathbb{N}$ festgelegt. Dann definiert man rekursiv $v(t_0) := y_0$ und $v(t_0 + (k+1)h) := v(t_0 + kh) + g(t_0 + kh, v(t_0 + kh)) \cdot h$ für $0 \leq k < n$. Man benutzt $v(t_1)$ als Näherungswert für den exakten Wert $y(t_1)$ der Lösung in t_1 .

1. Man beschreibe das Verfahren anschaulich.
2. Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' = y$ mit $y(0) = 1$.
 - i. Man bestimme die exakte Lösung im Punkt $t_1 = 4$.
 - ii. Mit den Schrittweiten $h = 2, 1, 1/2$ berechne man mit dem obigen Verfahren die entsprechenden Näherungswerte im Punkt $t_1 = 4$.

Aufgabe 32

Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = (y^2 + y - 12)/7$.

1. Man gebe sämtliche maximalen Lösungen mit zugehörigem Definitionsbereich an.
2. Man skizziere einige typische Lösungen.

Aufgabe 33

Ein Mann steht im Punkt A (Koordinatenursprung) in einem Sumpf. Er hält an einem Seil der Länge $b > 0$ sein Boot, das sich zu Beginn auf der y -Achse befindet (vergl. Skizze). Dann geht er geradlinig (in positiver x -Achsenrichtung) los und zieht das Boot in Richtung des ständig gespannten Seiles hinter sich her.

1. Man formuliere das Anfangswertproblem für die Bahn des Bootes.
2. Man berechne die Umkehrfunktion $x(y)$ der Lösung des Anfangswertproblems.

