Tübingen, den 4.2.2003 Prof. Kaup Wintersemester 2002/3

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

Blatt 15

Abgabe am Dienstag, den 11.2.2003, in der Vorlesung

Aufgabe 43

Man zeige für alle Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $B \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$:

1. $e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}$ und $\det e^A = e^{\mathsf{Sp}A}$, wobei $\mathsf{Sp}A = \sum a_{ii}$ die Spur von $A = (a_{ij})$ ist.
2. $e^{2\pi i A} = E$ (= Einheitsmatrix) gilt genau dann, wenn A diagonalisierbar ist und nur ganzzahlige Eigenwerte besitzt.
3. Jeder isolierte Punkt von $\{C \in \mathbb{C}^{n\times n} : e^C = E\}$ ist von der Form $2n\pi i E$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

[Hinweis: Transformiere auf obere Dreiecksform / Jordansche Normalform.]

Aufgabe 44

Es sei $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ die komplexe Algebra aller komplexwertigen $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen auf $\mathbb{R}$ und F die Teilmenge aller derjenigen Funktionen f, die Lösung irgendeiner homogenen linearen Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit konstanten Koeffizienten auf $\mathbb{R}$ sind – oder anders ausgedrückt, für die die Familie aller Ableitungen $\{f, f', f'', \ldots\}$ linear abhängig über $\mathbb{C}$ ist. Man zeige

1. $F \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ist eine komplexe Unteralgebra mit der Eigenschaft
$$f \in F \iff f' \in F\,.$$
2. $f \in F$ für $f(t) := (t\cos(t))^2$. Wie groß muß die Ordnung einer homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten mindestens sein, damit sie dieses f als Lösung haben kann?
3. $g \notin F$ für $g(t) := (1+t^2)^{-1}$ [Hinweis: Betrachte g im Komplexen.]
4. Jedes $f \in F$ mit $f \not\equiv 0$ hat nur isolierte Nullstellen in $\mathbb{R}$. Man gebe einen direkten Beweis sowie einen anderen mit einem funktionentheoretischen Argument.

Aufgabe 45

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine stetige Abbildung und $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $x' = A(t)x$.
Man zeige für alle $a, b \in I$ mit $a < b$:

1. Ist $q := \int_a^b \|A(s)\| ds < 1$, so gilt $\|\varphi(a) - \varphi(b)\| \le \frac{q}{1-q}\|\varphi(a)\|$.
2. Ist I nach oben unbeschränkt und gilt $\int_a^\infty \|A(s)\| ds < \infty$, so existiert $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t)$ in $\mathbb{R}^n$.
3. Muß unter den Voraussetzungen von 2. auch stets $\lim_{t\to+\infty} \varphi'(t)$ existieren?

Dieses ist das letzte Übungsblatt der Vorlesung. Es dürfen nur die Lösungen von zwei der obigen drei Aufgaben eingereicht werden.