Tübingen, den 22.10.2002 Prof. Kaup Wintersemester 2002/3

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

Blatt 2

Abgabe am Dienstag, den 29.10.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 4

Es seien $A, B \subset \mathbb{C}$ offene Teilmengen und $f, g : A \to B$ sowie $h : B \to \mathbb{C}$ Funktionen derart, daß f, g in $a \in A$ und h in $b := f(a)$ reell differenzierbar sind. Definiere $\overline{f} \colon A \to \mathbb{C}$ durch $\overline{f}(z) := \overline{f(z)}$. Man beweise von den jeweiligen Behauptungen in 1.–3. jeweils nur eine

1. $$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}(a)\right)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(a) \quad \text{und} \quad \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a)\right)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(a) \ .$$
2. Produktregel für die Wirtinger-Ableitungen:
$$\frac{\partial (fg)}{\partial z}(a) = f(a) \cdot \frac{\partial g}{\partial z}(a) + g(a) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(a)$$
$$\frac{\partial (fg)}{\partial \overline{z}}(a) = f(a) \cdot \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(a) + g(a) \cdot \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) \, .$$
3. Kettenregel für die Wirtinger-Ableitungen:
$$\frac{\partial (h \circ f)}{\partial z}(a) = \frac{\partial h}{\partial w}(b) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(a) + \frac{\partial h}{\partial \overline{w}}(b) \cdot \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(a) \ ,$$
$$\frac{\partial (h \circ f)}{\partial \overline{z}}(a) = \frac{\partial h}{\partial w}(b) \cdot \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) + \frac{\partial h}{\partial \overline{w}}(b) \cdot \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(a) \ .$$

Aufgabe 5

Sei $f(z) := 2z^2\bar{z} - z\bar{z}^2$ bzw. $f(z) = x \cos x + y \sin y$ für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

1. Man berechne die partiellen Ableitungen
$$\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ \frac{\partial f}{\partial z} \ \text{und} \ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \, .$$
2. In welchen Punkten $a \in \mathbb{C}$ ist f komplex differenzierbar? Man berechne in diesen Punkten den Wert $f'(a)$.

Aufgabe 6

Durch $f(x + iy) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} y^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ und $a_0 = 1$ werde eine holomorphe Funktion f auf $\mathbb{C}$ definiert.

1. Man gebe eine Rekursionsformel für die Koeffizienten a_k an.
2. Man schreibe $f(z)$ als Polynom in z.
3. Man zeige, daß $g(z) = \sum_{j,k=0}^{n} a_{jk} z^j \overline{z}^k$ genau dann eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ definiert, wenn für die Koeffizienten $a_{jk} \in \mathbb{C}$ gilt: $a_{jk} = 0$ für alle j, k mit $k > 0$. [Hinweis: Betrachte iterierte Wirtingerableitungen]