Tübingen, den 5.11.2002 Prof. Kaup Wintersemester 2002/3

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

Blatt 4

Abgabe am Dienstag, den 12.11.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 10

1. Zeigen Sie, daß $D := \{re^{it} : r > 0 \text{ und } |t| < \pi\}$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$ ist. Skizzieren Sie dieses.
2. Zeigen Sie, daß durch $f(re^{it}) := \ln(r) + it$ eine Funktion auf D mit $e^{f(z)} = z$ für alle $z \in D$ definiert wird.
3. Sei $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ die Zerlegung von f in Real- und Imaginärteil. Berechnen Sie $u(x,y)$, $v(x,y)$ explizit und zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, daß f holomorph ist.

Aufgabe 11

Sei $D \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet mit $1 \in D$, und es sei f eine Stammfunktion von $1/z$ auf D mit $f(1) = 0$. Man zeige

1. Für jedes $r > 0$ existiert ein $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = r$ und $w \notin D$.
2. $e^{f(z)} = z$ für alle $z \in D$. [Hinweis: $e^{f(z)}/z$ ist konstant!]
3. Es existiert genau eine stetige Funktion $\varphi: D \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(1) = 0$ und $z = |z|e^{i\varphi(z)}$ für alle $z \in D$.

[f heißt Hauptzweig des Logarithmus auf D, vgl. auch Aufgabe 10.]

Aufgabe 12

Die geschlossenen Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : [-1,1] \to \mathbb{C}^*$ seien definiert durch

$$\gamma_1(t) := 1 + 2|t|e^{i\pi t}, \quad \gamma_2(t) := e^{2\pi i t} \quad .$$

1. Man skizziere γ_1 und berechne unter Verwendung des Integralsatzes von Cauchy das Integral
$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} \quad .$$
2. Sind γ_1, γ_2 homotop als geschlossene Kurven in $\mathbb{C}^*$?