

**ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III**

## B l a t t 7

---

Abgabe am Dienstag, den 3.12.2002, in der Vorlesung

---

**Aufgabe 19**

Man zeige:

1. Für jedes nicht-konstante  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  ist die Menge  $f(\mathbb{C})$  dicht in  $\mathbb{C}$ .
2. Ist  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $a$  eine wesentliche Singularität von  $f \in \mathcal{H}(D)$ , so ist für jede Umgebung  $U \subset D$  von  $a$  die Menge  $f(U \setminus \{a\})$  dicht in  $\mathbb{C}$ .

[Hinweis: Betrachte Funktionen der Form  $g(z) = (f(z) - c)^{-1}$ ]

**Aufgabe 20**

Es sei  $D := \mathbb{C} \setminus \{2, i\}$  und  $f \in \mathcal{H}(D)$  die durch  $f(z) := ((z - i)(z - 2))^{-1}$  definierte Funktion. Man entwickle  $f$  um  $a = 1$  in eine Laurent-Reihe so, daß die Reihe für

1.  $z = 1/2$
2.  $z = i/2$
3.  $z = 2i$

konvergiert. Welches sind die genauen Konvergenzgebiete der Reihen?

**Aufgabe 21**

Man bestimme die Singularitäten der folgenden Funktionen und gebe an, von welcher Art sie sind:

1.  $f(z) := z/(e^z - 1)$ ,
2.  $f(z) := (1 - e^z)/(1 + e^z)$ ,
3.  $f(z) := (\sin z + \cos z)^{-1}$ ,
4.  $f(z) := \exp(-1/z)$ ,
5.  $f(z) := 1/\sin(\pi/z)$ .