Tübingen, den 5.11.2001 Prof. Kaup Wintersemester 2001/2

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

B l a t t 4

Abgabe am Montag, den 12.11.2001, in der Vorlesung

Aufgabe 10

(i) Man bestimme die Einheitengruppe des Ringes $\mathbb{Z}_m$ (Multiplikationstafel) für $m = 5$ und $m = 8$. [Zur Vereinfachung der Schreibweise möge a statt $[a]$ geschrieben werden für $a = 0, 1, \ldots, m-1$.]

(ii) Sind die beiden Gruppen aus (i) isomorph, d.h. existiert ein Gruppenisomorphismus zwischen ihnen?

Aufgabe 11

Man *bestimme* das multiplikative Inverse der Restklasse $[a]$ in $\mathbb{Z}_m$ für $m := 1007$ und $a := 100$. [Das Resultat soll in der Form $[b]$ mit $0 < b < 1007$ angegeben werden. Zur 'Bestimmung' gehört die Darlegung des benutzten Weges, insbesondere ist maschinelles Probieren nicht gemeint.]

Aufgabe 12

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\varepsilon \in \mathbb{K}$ ein fest gewähltes Element. Als bekannt werde vorausgesetzt, daß $\mathbb{F} := \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ eine abelsche Gruppe bezüglich der Verknüpfung

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

ist. Man zeige:

(i) Mit der zusätzlichen Verknüpfung

$$(a, b)(c, d) := (ac + \varepsilon bd, ad + bc)$$

als Produkt wird $\mathbb{F}$ zu einem kommutativen Ring. $\{(a, 0) : a \in \mathbb{K}\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{F}$, und $a \mapsto (a, 0)$ liefert einen Isomorphismus von $\mathbb{K}$ auf diesen Unterring (in diesem Sinne fassen wir im folgenden $\mathbb{K}$ als Unterring von $\mathbb{F}$ auf).

(ii) Für jedes $z = (a, b) \in \mathbb{F}$ gilt $z\overline{z} \in \mathbb{K} \subset \mathbb{F}$, wobei $\overline{z} := (a, -b)$ gesetzt sei. Ferner besitzt $z \in \mathbb{F}$ genau dann ein (multiplikatives) Inverses, wenn $z\overline{z} \neq 0$ gilt, und dann ist $z^{-1} = (z\overline{z})^{-1}\overline{z}$.

(iii) Ist ε kein Quadrat in $\mathbb{K}$ (d.h. $\varepsilon \neq x^2$ für alle $x \in \mathbb{K}$), so ist $\mathbb{F}$ ein Körper.
[Im Spezialfall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\varepsilon = -1$ erhält man mit $\mathbb{F}$ den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.]

*Aufgabe (freiwillig, geht nicht in die Punktewertung ein)

(i) Ist $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, so ist p kein Quadrat im Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

(ii) In jedem endlichen Körper $\mathbb{K}$ der Charakteristik > 2 existiert ein Element ε, das kein Quadrat in $\mathbb{K}$ ist. [Betrachte das Quadrat des Elements $-1 \in \mathbb{K}$.]

(iii) Es gibt einen Körper mit 9 Elementen.