Tübingen, den 19.11.2001 Prof. Kaup Wintersemester 2001/2

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Blatt 6

Abgabe am Montag, den 26.11.2001, in der Vorlesung

Aufgabe 16

1. Welche der folgenden Familien von Vektoren sind linear unabhängig?
   (i) $(1,2,1)$, $(2,3,1)$, $(1,3,2)$ in $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$.
   (ii) $(1,0,i)$, $(2-i,-1,1+i)$, $(1,-i,1+i)$ in $\mathbb{C}^3$ über $\mathbb{C}$, bzw. über $\mathbb{R}$.
2. Welche der folgenden Familien von Vektoren in $\mathbb{C}^2$ sind Basen über $\mathbb{C}$, bzw. über $\mathbb{R}$?
   (i) $(1-i,2)$, $(i,1)$
   (ii) $(1,i)$, $(1,-i)$, $(i,1)$, $(i,-1)$.

Aufgabe 17

Sei V der von den Vektoren $v_1 = (1,1,0,1,1)$, $v_2 = (0,0,1,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0,0)$, $v_4 = (1,0,0,1,1)$ und $v_5 = (1,0,1,0,1)$ aufgespannte lineare Teilraum von $\mathbb{K}^5$. Man bestimme die Dimension und eine Basis von V für

(i) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ii) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$.

Aufgabe 18

Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $I \neq \emptyset$ eine Menge.

1. Definiere Addition und Skalarmultiplikation so, daß V^I ebenfalls ein $\mathbb{K}$-Vektorraum wird.
2. Untersuche, welche der folgenden Teilmengen von V^I Untervektorräume sind:
   (i) $V^{(I)} := \{f \in V^I : f(i) = 0 \text{ für fast alle } i \in I\}$.
   (ii) $W := \{f \in V^I : f(I) \text{ endlich}\}$.
   (iii) $U := \{f \in V^I : 0 \in f(I)\}$.
3. Man gebe eine Basis von $\mathbb{K}^{(I)}$ an.

*Aufgabe (freiwillig, geht nicht in die Punktewertung ein)

Es seien $\mathbb{R}^+ := \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$ und $\varphi : (\mathbb{R}^+, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ ein Gruppenisomorphismus (z.B. der aus der Analysis bekannte Logarithmus). Mit p_k werde die k-te Primzahl bezeichnet. Man zeige, daß die Folge der reellen Zahlen $\big(\varphi(p_k)\big)_{k\geq 1}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist. [Man führe etwa jede Relation mit rationalen Koeffizienten in eine mit ganzzahligen Koeffizienten über.]