Tübingen, den 10.12.2001 Prof. Kaup Wintersemester 2001/2

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Blatt 9

Abgabe am Montag, den 17.12.2001, in der Vorlesung

Aufgabe 25

U, V seien $\mathbb{K}$-Vektorräume endlicher Dimension, und $F : U \to V$ sei eine lineare Abbildung. Man zeige:

1. F ist genau dann injektiv, wenn es eine lineare Abbildung $G : V \to U$ gibt mit $G \circ F = \mathrm{id}_U$.
2. F ist genau dann surjektiv, wenn es eine lineare Abbildung $G : V \to U$ gibt mit $F \circ G = \mathrm{id}_V$.

Aufgabe 26

Für festes $n \geq 1$ sei $V \subset \mathbb{K}^{n\times n}$ die Menge aller Matrizen $A = (a_{ij})$, für die alle Zeilensummen $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ und alle Spaltensummen $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ den gleichen (nur von A abhängigen) Wert haben, z.B. im Falle $n = 4$ das auf einem Kupferstich von Dürer aus dem Jahre 1514 sichtbare magische Quadrat

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix},$$

bei dem zusätzlich auch die beiden Diagonalsummen (und auch noch einige 'verschobene Diagonalsummen' wie $a_{13} + a_{24} + a_{31} + a_{42}$ oder $a_{12} + a_{21} + a_{34} + a_{43}$) mit den übrigen Summen übereinstimmen.

1. Man gebe eine lineare Abbildung $F : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{2n-2}$ mit Kern V an und folgere daraus, daß V ein Untervektorraum der Dimension $> (n-1)^2$ ist.
2. Man gebe eine Basis von V an.
   [Hinweis. Betrachte Matrizen $A = (a_{ij})$ in V mit der folgenden Eigenschaft: Von allen Einträgen a_{ij} mit $i, j < n$ ist höchstens einer von Null verschieden.]

Aufgabe 27

Man bestimme den Kern, das Bild und die darstellende Matrix der linearen Abbildung $f : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$ für

1. $f(x_1, x_2, x_3) := (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_3)$
2. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1, 2x_1, x_1 + x_3 + x_4)$
3. $f(x_1, x_2, x_3) := (x_3, x_1 + x_2, x_1, x_1 - x_3, x_1)$.