Tübingen, den 17.4.2002 | Prof. Kaup | Sommersemester 2002

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 1

Abgabe am Montag, den 22.4.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 1

Man berechne die Determinante der folgenden Matrix aus $\mathbb{Z}^{6\times 6}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Man zeige, daß die Polynome $p = X^4 + X^2 + X + 1$ und $q = X^2 + X + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ teilerfremd sind und bestimme Polynome $\widetilde{p}, \widetilde{q} \in \mathbb{Q}[X]$ mit

$$1 = \widetilde{p}p + \widetilde{q}q\,.$$

Aufgabe 3

Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathsf{End}(V)$ ein algebraischer Endomorphismus mit Minimalpolynom $\mu = \mu_\varphi \in \mathbb{K}[X]$. Man zeige:

1. φ ist genau dann invertierbar, wenn $\mu(0) \neq 0$ gilt.
2. Ist φ invertierbar, so gilt $\varphi^n \in \mathbb{K}[\varphi]$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dabei sei $\varphi^{-k} := (\varphi^{-1})^k$ für alle ganzen Zahlen $k > 0$ gesetzt.