Tübingen, den 17.6.2002 Prof. Kaup Sommersemester 2002

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 10

Abgabe am Montag, den 24.6.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 28 Sei $\mathsf{O}(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ die orthogonale Gruppe vom Rang n, und für jede Matrix $A = (a_{jk})$ sei $\mathsf{Sp}(A) := \sum_j a_{jj}$ die Spur von A. Für jedes $A \in \mathsf{O}(n)$ zeige man:

1. $|\mathsf{Sp}(A)| \leq n$.
2. $|\mathsf{Sp}(A)| = n \iff A = \pm E_n$.

Aufgabe 29 Es sei $V = \mathbb{C}^{n\times n}$ und $U \subset V$ der Untervektorraum aller Matrizen A mit Spur $\mathsf{Sp}(A) = 0$. Man zeige, wobei $\sigma \in \mathsf{Aut}(\mathbb{C})$ die übliche Konjugation komplexer Zahlen sei:

1. Durch $\Phi(A, B) = \mathsf{Sp}(AB^*)$ wird eine nicht-ausgeartete hermitesche Form auf V definiert. Dabei sei $A^* := {}^t\overline{A}$ die transponiert-konjugierte Matrix zu A.
2. Man bestimme $U^\perp$ in V.
3. Man gebe eine Orthogonalbasis von U wie auch von $U^\perp$ an.

Aufgabe 30 Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen, reell-wertigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ versehen mit der Bilinearform

$$\Phi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

$U \subset V$ sei der Untervektorraum aller Polynomfunktionen. Man zeige:

1. Φ ist nicht ausgeartet.
2. $U^\perp = 0$ und insbesondere $(U^\perp)^\perp \neq U$.
3. Es existiert ein Endomorphismus $\varphi \in \mathsf{End}(V)$ mit $U = \varphi(V)$ und $\varphi(f) = f$ für alle $f \in U$.
4. Besitzt $\varphi \in \mathsf{End}(V)$ die Eigenschaften wie in 3, so existiert zu φ kein adjungierter Endomorphismus (d.h. ein $\widehat{\varphi} \in \mathsf{End}(V)$ mit $\Phi(\varphi f, g) = \Phi(f, \widehat{\varphi} g)$ für alle $f, g \in V$).

[Hinweis: Die elementaren Eigenschaften des Integrals sowie der Weierstraßsche Approximationssatz seien aus der Analysis bekannt. Der Basisergänzungssatz darf für Vektorräume beliebiger Dimension benutzt werden.]

.... WIEDERHOLUNGSAUFGABEN FÜR INFORMATIKER ....

(F) Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 3, 1)$, $v_3 = (3, 1, 2)$ Vektoren in $\mathbb{K}^3$.

1. Man gebe eine genaue Bedingung an die Charakteristik von $\mathbb{K}$ dafür an, daß v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind.
2. Gibt es zu beliebig vorgegebenen Vektoren w_1, w_2, w_3 in $\mathbb{K}^n$, $n \geq 1$ fest, stets eine lineare Abbildung $F : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^n$ mit $F(v_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$, wobei (a) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (b) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$?

(G) Man bestimme alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{4\times 4}$$

in $\mathbb{K}$ und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor in $\mathbb{K}^4$, wobei (a) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. [Hinweis: Für $n \geq 1$ fest betrachte man in $\mathbb{C}^4$ Spaltenvektoren mit den Koordinaten $1, i^n, i^{2n}, i^{3n}$.]

(H) Es seien die Polynome $p := X^4 + 3X^2 + 2$ und $q := X^3 - X^2 + X - 1$ aus $\mathbb{R}[X]$ gegeben.

1. Man berechne $\mathrm{ggT}(p, q)$ und bestimme Polynome $f, g \in \mathbb{R}[X]$ mit $\mathrm{ggT}(p, q) = fp + gq$.
2. Für geeignete $n, m \in \mathbb{N}$ gebe man Endomorphismen von $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ an, deren charakteristischen Polynome p bzw. q sind.