Tübingen, den 22.4.2002 Prof. Kaup Sommersemester 2002

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

B l a t t 2

Abgabe am Montag, den 29.4.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 4

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Jedes $p \in \mathsf{End}(V)$ mit der Eigenschaft $p^2 = p$ heiße ein Projektor von V. Sei p ein Projektor von V. Man zeige:

1. $q := \mathsf{id}_V - p$ ist ebenfalls ein Projektor von V, und es gilt:
   i.) $\mathsf{Ker}\, p = \mathsf{Im}\, q$ und $\mathsf{Ker}\, q = \mathsf{Im}\, p$.
   ii.) $V = \mathsf{Ker}\, p \oplus \mathsf{Im}\, p$.
2. Ist $n := \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, so gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V derart, daß die Matrix von p bzgl. $\mathcal{B}$ die Blockform
$$P = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
hat, wobei im Falle $r = 0$ oder $r = n$ auch leere Blöcke zugelassen sind. Wie sieht die Matrix von $q := \mathsf{id}_V - p$ bzgl. $\mathcal{B}$ aus?

Aufgabe 5

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und φ ein Endomorphismus von V, der die Gleichungen

$$7\varphi^2 - \varphi^6 = \varphi + 6\varphi^2 - \varphi^3 = 6\,\mathsf{id}_V$$

erfüllt. Man zeige, daß sich V eindeutig als direkte Summe $V = X \oplus Y$ von Unterräumen $X, Y \subset V$ schreiben läßt, so daß $\varphi(x, y) = (x, -y)$ für alle $x \in X, y \in Y$ gilt. Man schreibe die kanonische Projektion $X \oplus Y \longrightarrow X$ als Polynom in φ.

Aufgabe 6

Es seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi, \psi \in \mathsf{End}(V)$. Man zeige:

1. Gilt $[\varphi, \psi] = 0$, so ist jeder Eigenraum von φ invariant unter ψ.
2. Ist V direkte Summe der Eigenräume von φ und ist jeder Eigenraum von φ invariant unter ψ, so gilt $[\varphi, \psi] = 0$.

$[\varphi, \psi] := \varphi\psi - \psi\varphi$ sei der *Kommutator* der Endomorphismen φ, ψ.