Tübingen, den 29.4.2002 Prof. Kaup Sommersemester 2002

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

B l a t t 3

Abgabe am Montag, den 6.5.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 7

Für jede der beiden folgenden Matrizen A aus $\mathbb{R}^{3\times 3}$ bestimme man (ohne Verwendung des charakteristischen Polynoms) das zugehörige Minimalpolynom sowie alle A-invarianten Teilräume in $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 8

Es seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathsf{End}(V)$ ein Endomorphismus. Man zeige:

1. Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und sind $v, w \in V$ Eigenvektoren von φ zu verschiedenen Eigenwerten, so ist $\alpha v + \beta w$ genau dann Eigenvektor von φ, falls $\alpha = 0 \neq \beta$ oder $\alpha \neq 0 = \beta$ gilt.
2. Ist jedes $v \in V \backslash \{0\}$ Eigenvektor von φ, so gibt es ein $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $\varphi = \alpha \cdot \mathsf{id}_V$.
3. Gilt $\varphi\pi = \pi\varphi$ für alle $\pi \in \mathsf{End}(V)$, so gibt es ein $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $\varphi = \alpha \cdot \mathsf{id}_V$.

Aufgabe 9

Es seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{5\times 5}$$

1. Man bestimme die Eigenwerte und Eigenräume von A.
2. Hat $V := \mathbb{K}^5$ eine Basis aus Eigenvektoren von A?
3. Man bestimme eine direkte Zerlegung $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ in A-invariante Untervektorräume $V_j \subset V$, so daß $k \in \mathbb{N}$ möglichst groß ist.

Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ werde vermöge $x \mapsto Ax$ als Endomorphismus des Spaltenraumes $\mathbb{K}^n$ aufgefaßt.

Die Übungsblätter sind auch über das Internet erhältlich unter der Adresse
`http://www.mathematik.uni-tuebingen.de/ab/KA/uebungen/uebungen.html`