Tübingen, den 6.5.2002 Prof. Kaup Sommersemester 2002

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 4

Abgabe am Montag, den 13.5.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 10

Für jede der durch die folgenden Matrizen gegebenen linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bestimme man charakteristisches Polynom, Minimalpolynom, Eigenwerte, Eigenräume:

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 6 \\ 10 & -4 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $V \subset \mathbb{R}[X]$ der Untervektorraum aller Polynome vom Grad $\leq n$. Bezüglich der Basis $1, X, X^2, \ldots, X^n$ von V beschreibe man den Endomorphismus φ von V durch eine Matrix und bestimme charakteristisches Polynom, Minimalpolynom sowie Eigenwerte und Eigenräume von φ, wobei φ gegeben ist durch

1. $\varphi(f) = f'$ (Ableitung von f).
2. $\varphi(f) = X \cdot f'$.

Aufgabe 12

Es sei V ein reeller Vektorraum endlicher Dimension und $\varphi \in \mathsf{End}(V)$ ein Endomorphismus.

1. Man zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
   i. φ hat einen reellen Eigenwert.
   ii. φ^2 hat einen reellen Eigenwert $\lambda \geq 0$.
2. Man bestimme ein φ explizit so, daß φ keinen reellen Eigenwert hat, daß aber φ^2 mindestens 2 verschiedene reell Eigenwerte besitzt.