Tübingen, den 3.6.2002 Prof. Kaup Sommersemester 2002

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 8

Abgabe am Montag, den 10.6.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 22 Es seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\Phi : V \times W \longrightarrow \mathbb{K}$ eine Sesquilinearfunktion bzgl. der Involution $\sigma \in \mathsf{Aut}(\mathbb{K})$. Man zeige:

1. Sind $M \subset V$, $N \subset W$ Teilmengen, so sind

$$M^\perp := \{w \in W : \Phi(v,w) = 0 \text{ für alle } v \in M\} \subset W, \quad N^\perp := \{v \in V : \Phi(v,w) = 0 \text{ für alle } w \in N\} \subset V$$

Untervektorräume, und es gilt $M \subset (M^\perp)^\perp$, $N \subset (N^\perp)^\perp$.

2. Sind $\pi_V : V \longrightarrow \widetilde{V} := V/W^\perp$, $\pi_W : W \longrightarrow \widetilde{W} := W/V^\perp$ die kanonischen Projektionen, so gibt es genau eine nicht-ausgeartete Sesquilinearfunktion $\widetilde{\Phi} : \widetilde{V} \times \widetilde{W} \longrightarrow \mathbb{K}$ bezgl. σ mit

$$\widetilde{\Phi}(\pi_V(v), \pi_W(w)) = \Phi(v,w) \text{ für alle } v \in V, w \in W\,.$$

Aufgabe 23 Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$ seien $\Phi_1, \Phi_2 : \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}$ Bilinearformen, die bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{K}^3$ die fiolgenden Gramschen Matrizen besitzen

$$G^{\mathcal{E}}(\Phi_1) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad G^{\mathcal{E}}(\Phi_2) := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Man bestimme die Ränge von Φ_1 und Φ_2.
2. Man bestimme alle isotrope Vektoren von Φ_2 (d.h. alle $v \in \mathbb{K}^3$ mit $\Phi_2(v,v) = 0$.)

Aufgabe 24 Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$ und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

1. Man zeige, daß jede Sesquilinearform auf V bilinear ist.
2. Man bestimme alle nicht-ausgearteten, alternierenden Bilinearformen auf $V := \mathbb{K}^2$ und zeige, daß sie alle kongruent sind (d.h. daß ihre Gramschen Matrizen bezgl. der kanonischen Basis kongruent sind).
3. Man bestimme alle nicht-ausgearteten, symmetrischen Bilinearformen auf $V := \mathbb{K}^2$. Sind sie alle kongruent?

.... WIEDERHOLUNGSAUFGABEN FÜR INFORMATIKER ....

(A) 1. Wieviele Elemente hat die Einheitengruppe $\mathbb{Z}_m^*$ des Ringes $\mathbb{Z}_m$ für $m = 9, 12, 101$?
2. Man gebe die Multiplikationstafel von $\mathbb{Z}_{12}^*$ explizit an.
3. Man begründe für alle natürlichen Zahlen $n, m > 1$, daß der Ring $\mathbb{Z}_{nm}$ kein Körper ist.

(B) 1. Man formuliere den Euklidischen Algorithmus in der Form *'möglichst angenähert an eine Programmieranweisung'*.
2. Man bestimme ganze Zahlen n, m mit $4290n + 2261m = 1$.
3. Welche der Restklassen $123, 725, 999$ in $\mathbb{Z}_{1000}$ sind invertierbar und was sind gegebenenfalls die Inversen?

(C) 1. Wie lautet die Bedingung dafür, daß die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ im $\mathbb{K}$-Vektrorraum V linear abhängig sind (bzw. linear unabhängig sind, bzw. eine Basis bilden)?
2. Man bestimme alle reellen Zahlen x, y derart, daß die drei Vektoren $(1,2,3,x)$, $(1,1,-1,-1)$, $(y,3,2,1)$ linear abhängig im $\mathbb{R}^4$ sind.
3. Man ergänze $(1,0,1,0)$, $(0,1,0,1)$, $(1,0,0,1)$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.