Krümmungseigenschaften Riemannscher Mannigfaltigkeiten und der Laplace-Beltrami-Operator

Bernhard Nowak
Elly-Heuss-Knapp-Str. 25
72074 Tübingen

Themenvergabe: 6. Oktober 1998
Abgabetermin 1. Februar 1999

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit soll ein kleiner Überblick über das Zusammenspiel von Lösbarkeitsverhalten und Lösungsverhalten der Laplace-Gleichung und der Wärmeleitungsgleichung auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten einerseits und andererseits bestimmten Krümmungseigenschaften dieser Mannigfaltigkeiten vermittelt werden. Dabei wird die Wärmeleitungsgleichung als einfachstes parabolisches Gegenstück zur Laplace-Gleichung aufgefasst, in die sie im stationären Fall ja auch übergeht. Die wichtigsten Resultate für die Laplace-Gleichung sind ein Liouville-Theorem für harmonische Funktionen im Fall nichtnegativer Ricci-Krümmung sowie die Lösbarkeit des allgemeinen Dirichletproblems im Falle negativer Schnittkrümmungen und einer Kompaktifizierung der Mannigfaltigkeit durch den Begriff des geometrischen Randes (die Kugel im Unendlichen).

Im Kapitel über die Wärmeleitungsgleichung wird zuerst eine knappe Betrachtung des Zusammenhangs zwischen den Spektren des Laplace- und des Wärmeleitungsoperators Platz finden. In einem gesonderten Abschnitt ist dann die berühmte konstruktive asymptotische Entwicklung des Wärmeleitungskerns für kompakte Mannigfaltigkeiten dargestellt. Diese Asymptotik wird genutzt, um Zusammenhänge zwischen dem Spektrum (der Singular wird begründet) der beiden o.g. Differentialoperatoren und der Geometrie der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit aufzuzeigen. Nachdem in einem eigenen Abschnitt die nötigen Maximumprinzipien zur Verfügung gestellt worden sind, wendet sich das Hauptinteresse der Arbeit dann auf jüngere und jüngste Resultate, die Krümmungseigenschaften verwenden, um Ableitungen erster und zweiter Ordnung von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung gegen die Funktion selbst abzuschätzen (Harnack-Ungleichungen).

Danksagung

Danken möchte ich Herrn Prof. Dr. Gerhard Huisken vom Mathematischen Institut der Universität Tübingen zunächst für die Überlassung des Themas, dann aber an erster Stelle für das Tutoring, das immer, wenn ich es suchte, da war, und das im Hinblick auf Effektivität, Qualität und Atmosphäre meine Hoffnungen weit übertraf. Herrn Huiskens Vorlesungen begleiten mich seit meinem vierten Fachsemester und waren bestimmend für meinen Zugang zur Analysis und Differentialgeometrie sowie für meine Faszination an der Mathematik als Wissenschaft. Dank gilt innerhalb des Mathematischen Instituts auch Herrn Prof. Dr. Helmut Kaul, dessen Vorlesung über die Allgemeine Relativitätstheorie mir eine fruchtbare neue Perspektive auf den Themenbereich mitgab. Ohne Toni Kotniks unermüdliche Tips als Übungsgruppenleiter über viele Semester wäre mein Einstieg in die Differentialgeometrie ungleich mühsamer verlaufen. Ein besonderer Dank geht an meinen Mitbewohner und Freund Heiko Schoof für seine unvergleichlich liebenswerte Art, meine Launen auch im größten Stress zu ertragen und nebenher noch die begnadetsten Curries Tübingens zuzubereiten.

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe und dass alle Stellen, die im Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quellen als Entlehnungen kenntlich gemacht worden sind.

Ort, Datum

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Differentialgeometrie ist diejenige Teildisziplin der Mathematik, die versucht, geometrische Eigenschaften mathematischer Objekte mit den Mitteln der Differential- und Integralrechnung zu erfassen. Die vorliegende Arbeit versucht im Sinne dieses Programms die geometrischen Eigenschaften der Krümmung einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit M der Dimension $n \geq 2$ mit dem Verhalten von Lösungen zweier partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung in einen Zusammenhang zu setzen. Sollte eine Frage zur Überschrift über den ersten Teil dieser Arbeit erhoben werden, so wäre es die Frage, was man, wenn die Menge der auf M existierenden harmonischen Funktionen u,

$$\Delta u = 0,$$

gegeben ist, über die Gestalt von M aussagen kann. Dazu stellt man sich das Problem andersherum, fragt also, unter welchen Krümmungsbedingungen an M man welche Existenzsätze und welche Eigenschaften harmonischer Funktionen beweisen kann.

Die verwendeten Krümmungen sind stets einzelne Koeffizienten (Schnittkrümmungen) oder Spuren über Koeffizienten (Ricci-Krümmung Ric oder skalare Krümmung R) des Riemannschen Krümmungstensors. Es bietet sich an, in Gedanken den flachen Raum $\mathbb{R}^n$ als eine Mittelposition zwischen Räumen von (in zu präzisierendem Sinne) positiver Krümmung und Räumen (sic.) negativer Krümmung zu sehen. Es stellt sich a posteriori heraus, dass die Bedingungen für positive oder nichtnegative Krümmungen am besten an den Ricci-Tensor gestellt werden, wogegen im Fall negativer Krümmungen erst Anforderungen an die Schnittkrümmungen Ergebnisse bringen.

Von den Fällen, in denen Krümmungen von M nach einer Seite gleichmässig beschränkt sind, ist der Fall $Ric > \alpha > 0$ im Hinblick auf harmonische Funktionen wegen des Theorems von Myers-Bonnet nicht interessant. Dieses besagt insbesondere, dass eine solche Mannigfaltigkeit kompakt ist und höchstens Durchmesser $\pi\sqrt{(n-1)/\alpha}$ hat (siehe z.B. Chavel [Cha95, Seite 77]). Auf kompakten Mannigfaltigkeiten sind harmonische Funktionen aber ohnehin wegen des starken Maximumprinzips aus Theorem 2.3 konstant, weil stetige Funktionen ihre Extrema annehmen müssen.

In Abschnitt 2.2 wird gezeigt werden, dass auch im schwächeren Falle $Ric \geq O$ eine harmonische Funktion u schon konstant sein muss, wenn sie einseitig beschränkt ist. Wenn nicht mehr über die Krümmung vorausgesetzt wird, so fällt in die betrachtete

Klasse von Geometrien auch der $\mathbb{R}^n$, auf dem als Spezialfall dieses Ergebnisses (Korollar 2.10) das Theorem von Liouville abfällt. Auch das Liouville-Theorem für holomorphe Funktionen aus der klassischen Funktionentheorie wird dort als Korollar mitbewiesen. Auf dem $\mathbb{R}^n$ existieren andererseits aber auch unbeschränkte harmonische Funktionen, zum Beispiel sind alle linearen Funktionen trivialerweise harmonisch. Weitergehende interessante Fragestellungen, die jedoch nicht im Rahmen dieser Arbeit behandelt werden, beziehen sich z.B. auf das Wachstumsverhalten unbeschränkter harmonischer Funktionen. So ist auf Mannigfaltigkeiten mit $Ric \geq 0$ bekannt, dass der Raum der harmonischen Funktionen gegebenen Wachstums $u = \mathcal{O}(|x|^m), m \geq 0$ wie im Fall des $\mathbb{R}^n$ endliche Dimension hat. Nachdem die Anforderung $Ric \geq 0$ aber lediglich den Abschluss von $Ric > 0$ nach unten bedeutet, verwundert das qualitativ andere Existenzverhalten von Lösungen der Laplace-Gleichung zunächst doch. Jedenfalls lässt dieser Sprung erkennen, wieviel Information in der Forderung der gleichmäßigen Schranke $Ric \geq \alpha > 0$ gegenüber der einfachen Schranke $Ric > 0$ kodiert ist.

Auf der "anderen Seite von $\mathbb{R}^n$ " kommt man erst mit einer gleichmäßigen negativen oberen Schranke für die Schnittkrümmungen von M zu einem Ergebnis. Auf Mannigfaltigkeiten mit überall negativen Schnittkrümmungen steht "mehr Platz im Raum" zur Verfügung als im euklidischen Raum oder auf Räumen mit positiver Ricci-Krümmung (präziser im Theorem von Günter und Bishop, z.B. bei Chavel, [Cha95, S.119, Thm 3.7]). Das Ergebnis, das man erhält, ist dann allerdings erstaunlich, garantiert es doch die Lösbarkeit des Dirichletproblems für beliebige Randwerte auf dem geometrischen Rand $S(\infty)$ (siehe Abschnitt 2 von Kapitel 1) von M. Mit so starken Bedingungen an die Krümmung erhält man sogar die Existenz eines Poisson-Kerns und somit einer Lösungsformel für das Randwertproblem. Mit deren Hilfe – sie beruht wie die klassische Poissonsche Lösungsformel für passende Gebiete im $\mathbb{R}^n$ auf einem verallgemeinerten Superpositionsprinzip – sieht man sofort, dass für positive und beschränkte Randwerte auch die Lösung des Dirichletproblems positiv und beschränkt sein wird. Das war unter den bislang betrachteten anderen Krümmungsbedingungen nicht möglich.

Die vorliegende Arbeit begnügt sich im Hauptgedanken mit der Unterscheidung zwischen unbeschränkten und einseitig beschränkten (nichtnegativen) harmonischen Funktionen. Eine Weiterführung der Fragestellung könnte daher auf zwei naheliegende Weisen geschehen. Zuerst kann versucht werden, die feinere Güteskala der L^p-Räume an u anzulegen. Weiter könnte dann gefragt werden, ob sich in der feineren Skala noch mehr Empfindlichkeiten der Laplace-Gleichung gegenüber dem Krümmungsverhalten finden lassen.

In der Arbeit [LS84] findet sich ein Überblick, der auf einige dieser Fragen Antworten gibt. Das für diese Arbeit interessanteste Ergebnis ist ein Theorem von Yau (siehe Theorem 2.20 von Seite 30), in dem bewiesen wird, dass es für $p \in (1, \infty)$ keine nichtnegativen subharmonischen Funktionen in $L^p(M)$ für vollständiges M gibt, die nicht schon konstant sind. Daraus kann man z.B. folgern (siehe die Bemerkung im Anschluss an das Theorem), dass für Mannigfaltigkeiten mit unendlichem Volumen ausser $u \equiv 0$ überhaupt keine harmonischen Funktionen in $L^p(M)$ existieren. Die Freiheit ist damit aber auch für harmonische Funktionen auf M nicht so groß, wie die Lösbarkeit des Dirichletproblems vielleicht Hoffen macht. Im schwachen Sinne sind die Absolutbeträge harmonischer Funktionen nichtnegative subharmonische Funktionen. Mit diesem Wissen lässt sich das obige Theorem auch so interpretieren, dass der ganze "Platz", den Mannigfaltigkeiten mit gleichmäßig negativen Schnittkrümmungen gegenüber Mannigfaltigkeiten mit $Ric \geq 0$ bieten, auch tatsächlich benötigt wird, um beschränkte harmonische Funktionen zuzulassen. In diesem Sinne ist das Ergebnis des Abschnittes die Tatsache, dass die unbeschränkte Ausdehnung, die nichtkonstante harmonische Funktionen auf positiv gekrümmten "engen" Räumen in ihrem Wertebereich brauchen, in den negativ gekrümmten Räumen gewissermaßen eingetauscht werden kann gegen endliche aber auf der unbeschränkten Ausdehnung des Trägers immernoch nichtintegrierbare Werte der Funktion – und zwar auf einer Ausdehnung des Trägers, die qualitativ mehr Platz beansprucht als der flache Raum bieten kann (auf dem ja jede nichtkonstante harmonische Funktion schon in ihren Werten unbeschränkt sein muss). Die Existenz der entsprechenden harmonischen Funktionen ist damit eine Eigenschaft der Geometrie des Raumes selbst, die vom zugehörigen Laplace-Beltrami-Operator erkannt wird.

Ein weiteres Mittel, den Laplace-Beltrami-Operator zu verstehen, sind seine Eigenwerte. Um diese zu begreifen, führt ein sehr geeigneter Weg über die Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial t} u$$

auf $M \times (0, \infty)$, wo die Zeit t einen Parameter darstellt. Angenommen u ist einfach eine harmonische Funktion, die nicht von t abhängt. Dann ist $\frac{\partial}{\partial t} u = 0$ und man sieht sofort, dass u die Wärmeleitungsgleichung löst. Unter dieser Interpretation ist die Wärmeleitungsgleichung sowohl ein parabolisches Gegenstück als auch eine naheliegende Verallgemeinerung der Laplace-Gleichung. Da harmonische Funktionen im $\mathbb{R}^n$ der Mittelwerteigenschaft genügen, ist aus empirischem Wissen klar, dass Temperaturverteilungen in geschlossenen Systemen ohne Heizung sich einfach durch Wärmeverteilung einer harmonischen Funktion annähern. Dieses Resultat gilt auch auf allgemeineren Geometrien, d.h. für geschlossene Mannigfaltigkeiten oder auf beschränkten Gebieten vollständiger Mannigfaltigkeiten unter der Vorgabe passender Randbedingungen (siehe Theorem 3.5). In diesem Sinne (und nur in diesem) konvergiert auch der Wärmeleitungsoperator für große t gegen den Laplace-Operator.

Für die Wärmeleitungsgleichung existiert aber auf allgemeinem vollständigem M eine Fundamentallösung (siehe Theorem 3.9) und somit eine Lösungsformel. Die Lösungsformel definiert einen Integraloperator, der einer Randwertefunktion eine Lösung des Anfangswertproblems der Wärmeleitungsgleichung zum Zeitpunkt t zuordnet. Es wird für den Fall von kompaktem M bewiesen werden, dass es für die Kenntnis des Spektrums dieses Operators zu jedem Zeitpunkt t ausreicht, sein Spektrum zu einem einzigen Zeitpunkt, z.B. $t = 1$, verstanden zu haben. Man erhält ausserdem das Ergebnis, und darin liegt der Grund für die Beschäftigung dieser Arbeit mit der Wärmeleitungsgleichung, dass das Spektrum dieses Operators in einem noch zu präzisierenden Sinne "im Wesentlichen" das Spektrum des Laplace-Beltrami-Operators ist, und die Eigenfunktionen sogar dieselben sind.

Einen weiteren und völlig anderen Zugang zur (eindeutigen) Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung auf kompaktem M bietet die auf der Rekursionsformel von Minakshisundaram und Pleijel beruhende Asymptotik. Sie wird in einem eigenen Abschnitt vorgestellt und bietet zunächst einen überraschenden konstruktiven Existenzbeweis für die Fundamentallösung.

Ausser wegen dieser erstaunlichen Konstruktionsmöglichkeit ist die Asymptotik aber auch aus einem zweiten Grund überaus interessant. So stehen jetzt zwei Darstellungen für die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung auf kompaktem M zur Verfügung. Die eine entwickelt die Lösung in Eigenfunktionen des Laplace-Operators, die andere approximiert sie in der Nähe der Anfangssingularität im Wesentlichen polynomial (präziser: als Potenzreihe mit einem Anfang in kleinen negativen Potenzen). Ein Theorem von McKean und Singer (siehe Thm. 3.12 auf Seite 46 dieser Arbeit) zeigt, dass diese Reihe in allen ihren Koeffizienten a_i ausser dem ersten (der gleich dem Volumen von M ist) wiederum polynomial ist und nur von universellen Größen (Konstanten) und vom Riemannschen Krümmungstensor und seinen Ableitungen abhängt.

Man kann auf passende Weise eine Funktion $Z(t)$ definieren, die in der Lage ist, die beiden Darstellungen auf handliche Weise (d.h. ohne Verlust einer gewissen expliziten Berechenbarkeit) zu vergleichen. Die Stellung von $Z(t)$ ist dann die einer Verbindung zwischen der rein analytischen Information über das Spektrum eines Differentialoperators (siehe (3.25)) einerseits und Grössen, die nur von der Geometrie von M abhängen (Riem und seine Ableitungen) andererseits. Einen so tiefen und klaren Zusammenhang zwischen Analysis und Geometrie kennt die Differentialgeometrie sonst nur an wenigen Stellen, deren berühmteste vielleicht das Theorem von Gauss-Bonnet ausmacht. Wie gezeigt wird, besteht zwischen dem Koeffizienten a_1 und dem Theorem von Gauss-Bonnet sogar ein Zusammenhang (siehe Kor. 3.14 auf Seite 50 dieser Arbeit).

Nachdem klar ist, dass die Beschäftigung mit der Wärmeleitungsgleichung und ihren Lösungen profunde Einsichten in den Zusammenhang zwischen dem Laplace-Beltrami-Operator und den Krümmungseigenschaften einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (hier: kompakt) liefern kann, bemerkt man aber schnell, dass das Wissen über Lösungen der Wärmeleitungsgleichung noch lange nicht so groß ist wie das Wissen über harmonische Funktionen. Die Gradientenschranke, die zum Liouville-Theorem und zur Harnack-Ungleichung für harmonische Funktionen im Fall $Ric \geq 0$ geführt hat, ist von 1975, die erste entsprechende Gradientenabschätzung (im Folgenden ebenfalls Harnack-Ungleichung genannt) für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung haben Yau und Li 1984 gezeigt und 1985 veröffentlicht. Eine Verallgemeinerung auf $Ric \geq -K, K \geq 0$ hat Hamilton 1993 gezeigt. Eine Harnack-Ungleichung für einen Quotienten von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung im Falle $Ric \geq 0$ nennen die Autoren Chow und Hamilton eine "constrained Harnack Inequality" und haben sie 1997 veröffentlicht [CH97]. Diesen Harnackungleichungen neueren und neuesten Datums ist der zweite Hauptteil der Arbeit gewidmet. Die entsprechenden Beweise werden hier im Detail präsentiert. Die Arbeiten von Hamilton und Hamilton–Chow betrachten kompakte Mannigfaltigkeiten, stehen aber nach Kommentar der Autoren zur Verallgemeinerung auf nichtkompakte Mannigfaltigkeiten an. Interessant wäre diese Verallgemeinerung deswegen, weil bereits bekannt ist, dass mit großem t auf kompakten Mannigfaltigkeiten die Temperaturverteilungen keine andere Möglichkeit haben, als konstant zu werden.

Abschließend wäre zu sagen, dass sich am Beginn jedes größeren Abschnitts ein Absatz befindet, der sein Programm kurz motiviert und umreisst. Neben der oben schon erwähnten Reflektion auf den Zusammenhang zwischen der Qualität der Aussage der Harnack-Ungleichungen für die Wärmeleitungsgleichung und den nötigen Bedingungen an das Krümmungsverhalten von M auf Seite 73 findet sich noch eine ausführlichere Skizze der Grundidee der entsprechenden Beweise auf Seite 84, zu Beginn des Beweises von Theorem 3.47. Ein Notationsverzeichnis befindet sich vor der Literaturliste am Schluss der Arbeit.

Kapitel 2

Die Laplacegleichung

2.1 Technische Vorbereitungen und starkes Maximumprinzip

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann ist der Laplace-Operator von f definiert als die Summe der reinen zweiten partiellen Ableitungen von f, oder anders formuliert, als die Spur der Hessematrix bzw. die Divergenz des Gradientenvektorfeldes von f.

$$\Delta f = \sum_{i=1..n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Ab hier gelte für den Rest dieser Arbeit die verallgemeinerte Einsteinsche Summenkonvention. Das heisst, Indizes, die in einem Produkt mehrmals vorkommen, werden grundsätzlich über die ganze entsprechende Indexmenge aufsummiert. Falls gerade der Summationsbereich den wichtigen Aspekt an einem Term darstellt, so wird in diesem Fall das Summenzeichen ausnotiert und hat Vorrang vor obiger Konvention. Sei nun $\overline{\Omega}$ ein weiteres Gebiet im $\mathbb{R}^n$, $h : \overline{\Omega} \longrightarrow \Omega : \xi \longrightarrow h(\xi) = x$ Diffeomorphismus, u wie oben und $U = u \circ h$. Dann ist der mit der Transformation h assoziierte Maßtensor definiert als

$$g_{ik} = \langle \frac{\partial h}{\partial \xi^i}, \frac{\partial h}{\partial \xi^k} \rangle,$$

und g^{ik} bezeichnet die Einträge der zu g_{ik} inversen Matrix, also $g^{ik} g_{kl} = \delta^i_l$. Weiter sei $g = \det(g_{ij})_{ij}$ die zum Maßtensor gehörige Gramsche Determinante. Für die Transformation des Laplace-Operators von Ω zurück nach $\overline{\Omega}$ gilt dann die bekannte Jacobi-Formel

$$\Delta u(x) = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^i} \Big(\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial u \circ h}{\partial \xi^k} \Big)(\xi). \tag{2.1}$$

Zwar braucht man zum Beweis dieser Formel die Tatsache, dass für Diffeomorphismen wie h, $\sqrt{g} = det(Dh)$ um den Transformationssatz anwenden zu können, aber die Tatsache, dass Dh eine $n \times n$ Matrix ist, spielt für die Definition der Gramschen Determinante keine Rolle. Lediglich der maximale Rang von Dh ist dort wichtig, und dieser ist insbesondere garantiert, wenn es sich bei h^{-1} um eine Karte aus dem Atlas einer Riemannschen Mannigfaltigkeit handelt. Folgende Definition macht daher Sinn:

Definition 2.1 *Sei (M,g) eine n-dimensionale glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit, $P \in M$ und $(x_i)_{i=1..n}$ ein lokales Koordinatensystem um P, so dass $(\frac{\partial}{\partial x^i})_{i=1..n}$ eine Basis von T_pM^n bilden. Dann sei der Laplace-Beltrami Operator Δ auf M an der Stelle $P \in M$ definiert durch*

$$\Delta f(P) = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial x^k}\Big)(P). \tag{2.2}$$

Wir notieren fortan der Übersichtlichkeit halber die Basisderivationen kürzer als $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$. Aus der Definition der Christoffelsymbole der Metrik folgt mit der Produktregel, dass

$$\begin{aligned}
-g^{kl}\Gamma^j_{kl}(\partial_j f) &= -\frac{1}{2}(\partial_j f) g^{kl} g^{ij}\big(\partial_k g_{il} + \partial_l g_{ik} - \partial_i g_{kl}\big) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_j f) g^{kl} g^{ij}(\partial_i g_{kl}) - \frac{1}{2}(\partial_j f) g^{kl}\big(g^{ij}\partial_k g_{il} + g^{ij}\partial_l g_{ik}\big) \\
&\overset{P.R.}{=} \frac{1}{2}(\partial_j f) g^{kl} g^{ij}(\partial_i g_{kl}) + \frac{1}{2}(\partial_j f) g^{kl}\big(g_{il}\partial_k g^{ij} + g_{ik}\partial_l g^{ij}\big) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_j f) g^{kl} g^{ij}(\partial_i g_{kl}) + (\partial_j f)\partial_i g^{ij},
\end{aligned}$$

wo im letzten Schritt lediglich $g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$ ausgenutzt ist. Mit der Formel zur Ableitung der Determinanten, $\frac{\partial}{\partial x^i}\log(\det A) = tr[(\frac{\partial}{\partial x^i}A)A^{-1}]$ (z.B. in Chavel [Cha95, S. 84, Prop. 2.8]) wird nun sichtbar, dass für obige Definition gilt

$$\begin{aligned}
\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{g}}(\partial_i g) g^{ij}\partial_j f + (\partial_i g^{ij})\partial_j f + g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} f \\
= \frac{1}{2}(\partial_i \log g) g^{ij}\partial_j f + (\partial_i g^{ij})\partial_j f + g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} f \\
= \frac{1}{2}(\partial_j f) g^{kl} g^{ij}(\partial_i g_{kl}) + (\partial_j f)\partial_i g^{ij} + g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} f \\
= g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} f - g^{kl}\Gamma^j_{kl}(\partial_j f) = g^{ij}\nabla_i\nabla_j f = \operatorname{div}\nabla f.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Die erste Gleichheit der letzten Zeile bedeutet insbesondere wegen der Definition der Basisderivationen $\partial_i f = \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ h^{-1})$, h Karte, dass der Laplace-Beltrami Operator auf M sich als allgemeiner elliptischer partieller Differentialoperator zweiten Grades auf dem Bild der Karte im $\mathbb{R}^n$ interpretieren lässt. Diese Eigenschaft folgt wegen

Lemma 2.2 *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit, dann existiert A^{-1} und ist ebenfalls symmetrisch und positiv definit. (Ohne Beweis)*

Insbesondere ist also die Koeffizientenmatrix (g^{ij}) positiv definit. Somit gelten für den Laplace-Beltrami Operator die üblichen elliptischen Maximumprinzipien und Abschätzungen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Die in dieser Arbeit benutzte Form des Maximumprinzips sei hier nur zitiert, jedoch wird im zweiten Kapitel dieser Arbeit ein Maximumprinzip für den Wärmeleitungsoperator ausführlich bewiesen, das diesen Satz impliziert (siehe 3.25 auf Seite 59 und vorangegangene Bemerkung).

Theorem 2.3 (Starkes Maximumprinzip) *Es sei (M,g) eine glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit assoziiertem Laplace-Beltrami Operator Δ. Sei $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die auf einem Gebiet $\Omega \subseteq M$ die Differentialungleichung*

$$\Delta f \geq (\leq) 0$$

erfüllt. Wenn dann f an einer Stelle $P \in \Omega$ sein Maximum (Minimum) annimmt, dann ist f konstant auf Ω. Insbesondere nimmt f sein Maximum (Minimum) auf dem Rand $\partial\Omega$ an, falls dieser nichtleer ist.

Um die Vorbemerkungen abzuschließen sollen hier noch einige Formeln zur Vertauschung kovarianter Ableitungen gegeben werden.

Lemma 2.4 (Vertauschungsformeln für Kovariante Ableitungen) *Es sei durch M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit gegeben, und sei ∇ die auf M durch den Levi-Civitta Zusammenhang der Metrik g bestimmte kovariante Ableitung. Sei $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine jeweils genügend oft stetig differenzierbare Funktion. Sei weiterhin ein lokales, in $P \in M$ orthonormales Koordinatensystem (z.B. Riemannsche Normalkoordinaten um P) oder ein Orthonormales bewegliches n-Bein gegeben, und dort R_{ijkl} die Darstellung des Riemannschen Krümmungstensors, R_{ij} die des Ricci-Tensors und ∇_i die kovarianten Ableitungen in Richtung der von den Koordinaten induzierten Basis von T_pM^n. Dann gelten folgende Gleichheiten:*

$$\nabla_k \nabla_l \nabla_i f = \nabla_l \nabla_k \nabla_i f + R_{silk} \nabla_s f \tag{2.4}$$

$$\nabla_l \nabla_k \nabla_j \nabla_i f = \nabla_k \nabla_l \nabla_j \nabla_i f - R_{mjlk} \nabla_m \nabla_i f - R_{milk} \nabla_j \nabla_m f \tag{2.5}$$

und als Folgerungen daraus

$$\nabla_k \Delta f = \Delta \nabla_k f - R_{ik} \nabla_i f \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \Delta \nabla_i \nabla_j f = {} & \nabla_i \nabla_j \Delta f + R_{lj} \nabla_i \nabla_l f + R_{li} \nabla_j \nabla_l f - 2R_{ljki} \nabla_l \nabla_k f \\ & + (\nabla_i R_{lj} + \nabla_j R_{li} - \nabla_l R_{ij}) \nabla_l f. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Die für die letzte Gleichheit bereits genutzten Bianchi-Identitäten erhalten in lokalen Normalkoordinaten die Form

$$R^i_{klm} + R^i_{lmk} + R^i_{mkl} = 0 \tag{2.8}$$

beziehungsweise

$$\nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk} + \nabla_m R_{ijkl} = 0 = \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kilm} \tag{2.9}$$

und durch Kontraktion mit der Metrik

$$-\nabla_k R_{jl} + \nabla^i R_{jkli} + \nabla_j R_{kl} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \nabla^i R_{ki} = \frac{1}{2} \nabla_k R, \tag{2.10}$$

wo R die skalare Krümmung von M, d.h. die totale Spur über den Riemannschen Krümmungstensor darstellt.

2.2 Die Laplacegleichung im Falle nichtnegativer Ricci-Krümmung

2.2.1 Technische Vorarbeiten

Es gelte zunächst folgende Konvention: Wenn von einer unteren Schranke der Ricci-Krümmung etwa der Form $Ric \geq -(n-1)K$, $K \geq 0$ gesprochen wird, so ist gemeint, dass der (0,2)-Tensor $R_{ij} + (n-1)Kg_{ij}$ keine negativen Eigenwerte hat, oder anders formuliert, $\forall p \in M, V \in T_pM^n, V = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} : R_{ij}(p)v^iv^j + (n-1)Kg_{ij}(p)v^iv^j \geq 0$.

Es wird eine Gradientenabschätzung für positive harmonische Funktionen u auf einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit M der Dimension ≥ 2 gezeigt. Die Abschätzung wird den Quotienten $\frac{|\nabla u|}{u}$ betreffen und sogar für $Ric \geq -(n-1)K, K \geq 0$ gelten.

Das besondere Interesse dieser Arbeit an der Gradientenabschätzung liegt, wie die Überschrift des Kapitels schon sagt, im Spezialfall nichtnegativer Ricci-Krümmung. Eine Mannigfaltigkeit, die dieser Anforderung genügt, bietet in dem in der Einleitung beschriebenen Sinne der Funktion u weniger Platz als der $\mathbb{R}^n$, was sich hier in der Weise äussert, dass einseitig beschränkte harmonische Funktionen bereits konstant sein müssen. Um dieses Liouville-artige Theorem für vollständiges M zu zeigen, benötigt man den technischen Apparat der Gradientenabschätzung.

Die Gradientenabschätzung und ihre Konsequenzen gehen auf Yau [Yau75] zurück und finden sich in etwas kompakterer Form in [SY94] wieder. Um wenigstens ein Stück weit die reine Technik des Beweises von der Idee zu trennen, sind die ersten zwei Teile des Beweises in Lemmata ausgelagert. Die Arbeit der Beweise steckt dann aber im Detail, weswegen ein gewisser technischer Aufwand nicht zu vermeiden ist. Um den Fluss der Rechnung nicht unnötig zu unterbrechen übernimmt diese Arbeit die Angewohnheit aus dem o.g. Buch [SY94], entsprechende Argumente manchmal erst nach erfolgter Umformung anzugeben. Den Anfang bildet das Zitat einer Aussage (Schoen-Yau [SY94], Cor.1.2, S.7), die im Beweis des Theorems benötigt wird.

Proposition 2.5 *Sei M eine n-dimensionale vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $Ric \geq -(n-1)K$, $K \geq 0$ Konstante, und sei ρ die Distanzfunktion von einem beliebigen festen Punkt $p \in M$ aus. Dann gilt an jedem Punkt, an dem ρ glatt ist*

$$\Delta\rho \leq \frac{n-1}{\rho}(1 + \sqrt{K}\rho). \tag{2.11}$$

Beweisidee / Skizze: In der Raumform mit konstanten Schnittkrümmungen $-K$ kann man $\Delta\rho = (n-1)\sqrt{K}\coth(\sqrt{K}\rho)$ direkt ausrechnen. Man erhält diese Gleichheit durch Aufsummieren der Diagonaleinträge der Hessematrix von ρ. Bei diesem Vorgang werden unter anderem zweite Ableitungen von Jacobifeldern Y entlang von Geodäten σ aufsummiert. Wegen der Jacobifeldgleichung $Y'' + Riem(\sigma', Y)\sigma' = 0$ kommen in der Diagonalen der Hessematrix Schnittkrümmungsterme $\langle Riem(\sigma', Y)\sigma', Y\rangle$ vor, die sich bei der Spurbildung zu einem Ricci-Term aufaddieren, der in der Raumform gleich $-(n-1)K$ ist (der Vektorraum der Jacobifelder entlang σ, die auf σ senkrecht stehen und zwischen $\sigma(0)$ und einem gegebenen Punkt entlang σ nicht verschwinden ist $(n-1)$-dimensional).

Ein Vergleichssatz für $\Delta\rho$ (z.B. Schoen-Yau [SY94], Kor.1.1, S.5) ermöglicht die Abschätzung des $\Delta\rho$ auf M mit $Ric \geq -(n-1)K$ gegen den entsprechenden Term auf der Raumform mit konstanten Schnittkrümmungen $-K$. Die Abschätzung

$$\sqrt{K}\rho\coth(\sqrt{K}\rho) \leq (1+\sqrt{K}\rho)$$

folgt nach Yau leicht und tatsächlich rechnen wir mit der Definition des coth nach:

$$\begin{aligned} \alpha\coth\alpha \leq 1+\alpha \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{e^{2\alpha}+1}{e^{2\alpha}-1} \leq 1+\alpha \\ \Longleftrightarrow \quad e^{2\alpha}+1 \leq \frac{e^{2\alpha}}{\alpha} &+ e^{2\alpha} - \frac{1}{\alpha} - 1 \quad \Longleftrightarrow \\ 2 \leq \frac{e^{2\alpha}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \quad &\Longleftrightarrow \quad 1+2\alpha \leq e^{2\alpha}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Reihendarstellung der reellen e-Funktion folgt.

□

Lemma 2.6 *Sei M eine $n(\geq 2)$-dimensionale vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $Ric \geq -(n-1)K$, wo $K \geq 0$ eine Konstante ist. Sei $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion, $p \in M$. Wenn dann $\Delta u = 0$ in einer Umgebung von p und $\nabla u(p) \neq 0$, so gilt in diesem Punkt die Abschätzung*

$$|\nabla u|\,\Delta(|\nabla u|) \geq \frac{1}{n-1}|\nabla(|\nabla u|)|^2 - (n-1)K|\nabla u|^2. \tag{2.12}$$

Beweis: Mit der Ricci-Formel 2.6 aus Lemma 2.4 von Seite 10 gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta(|\nabla u|^2) &= (\Delta\nabla_j u)\nabla_j u + \nabla_i\nabla_j u\nabla_i\nabla_j u \\ &= \nabla_i\nabla_j u\nabla_i\nabla_j u + \nabla_i u(\nabla_i\Delta u) + R_{ij}\nabla_i u\nabla_j u \\ &\geq \nabla_i\nabla_j u\nabla_i\nabla_j u - (n-1)K|\nabla u|^2, \end{aligned} \tag{2.13}$$

wo im letzten Schritt die Voraussetzung an den Ricci-Tensor und die lokale Eigenschaft $\Delta u \equiv 0$ ausgenutzt wurde, wodurch die dritten Ableitungen von u aus der Abschätzung verschwinden.

Man wählt nun ein Normalkoordinatensystem $(e_i)_{i=1,..,n}$ mit Ursprung in p, z.B. Riemannsche Normalkoordinaten. OBdA (sonst wird das System entsprechend gedreht) gilt in dem gewählten System

$$e_1 = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \quad \text{d.h. es ist } \nabla_1 u(p) = |\nabla u|,\ \nabla_i u(p) = 0 \text{ für } i \geq 2,$$

wo $\nabla u \neq 0$ zum Tragen kommt. Im Punkt p ist dann insbesondere

$$\nabla_j(|\nabla u|) = \nabla_j(\sqrt{\nabla_i u\nabla_i u}) = \frac{\nabla_i u\nabla_j\nabla_i u}{|\nabla u|} = \nabla_j\nabla_1 u,$$

und deswegen

$$|\nabla(|\nabla u|)|^2 = \nabla_j \nabla_1 u \nabla_j \nabla_1 u. \tag{2.14}$$

Mit diesem Wissen beginnt man nochmals wie in (2.13), nutzt aber (2.14) und erhält

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta(|\nabla u|^2) &= |\nabla u|\,\Delta(|\nabla u|) + |\nabla(|\nabla u|)|^2 \\ &= |\nabla u|\,\Delta(|\nabla u|) + \nabla_j \nabla_1 u \nabla_j \nabla_1 u. \end{aligned}\tag{2.15}$$

Setzt man jetzt (2.13) und (2.15) über ihre linken Seiten zusammen, so findet man die Abschätzung

$$\nabla_i \nabla_j u \nabla_i \nabla_j u - (n-1)K|\nabla u|^2 \leq |\nabla u|\,\Delta(|\nabla u|) + \nabla_j \nabla_1 u \nabla_j \nabla_1 u.$$

Durch Umordnen und Aufteilen der Summen entlang des Index 1 kann man dann weiter abschätzen:

$$\begin{aligned}|\nabla u|\,\Delta(|\nabla u|) + (n-1)K|\nabla u|^2 &\geq \sum_{i,j}(\nabla_i \nabla_j u)^2 - \sum_j (\nabla_j \nabla_1 u)^2 \\ &= \sum_i (\nabla_i \nabla_i u)^2 - (\nabla_1 \nabla_1 u)^2 \\ &\quad + \sum_{i \neq j}(\nabla_j \nabla_i u)^2 - \sum_{j \neq 1}(\nabla_j \nabla_1 u)^2 \\ &\geq \sum_{i \neq 1}(\nabla_1 \nabla_i u)^2 + \sum_{i \neq 1}(\nabla_i \nabla_i u)^2 \\ &\geq \sum_{i \neq 1}(\nabla_1 \nabla_i u)^2 + \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i \neq 1}\nabla_i \nabla_i u\Big)^2. \end{aligned}$$

Dabei ist der letzte Schritt die Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung. Es ist zu bemerken, dass nur im Schritt von der zweiten zur dritten Zeile tatsächlich Information verschenkt wurde. Wegen $\Delta u = 0$ ist nun aber $\sum_{i \neq 1} \nabla_i \nabla_i u = -\nabla_1 \nabla_1 u$ und man kann an die obige Reihe von Abschätzungen anknüpfen

$$\begin{aligned}\ldots \qquad &= \sum_{i \neq 1}(\nabla_1 \nabla_i u)^2 + \frac{1}{n-1}(\nabla_1 \nabla_1 u)^2 \\ &\overset{n \geq 2}{\geq} \frac{1}{n-1}\sum_i (\nabla_1 \nabla_i u)^2 \\ &= \frac{1}{n-1}|\nabla(|\nabla u|)|^2. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt kam dabei (2.14) und die Vertauschbarkeit der ersten zwei kovarianten Ableitungen von Funktionen zu Ehren, und der Beweis ist vollständig.

□

Nach der so geleisteten Vorarbeit kann man in einem zweiten Schritt den Term $\Delta(|\nabla u|/u)$ gegen die Ricci-Schranke und erste und zweite Ableitungen von u abschätzen.

Lemma 2.7 *Sei wieder M eine $n(\geq 2)$-dimensionale vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $Ric \geq -(n-1)K$, $K \geq 0$. Sei $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion, $p \in M$. Wenn dann $\Delta u = 0$ in einer Umgebung von p, $\nabla u(p) \neq 0$ und zusätzlich $u(p) > 0$, dann notieren wir*

$$\phi = \frac{|\nabla u|}{u},$$

und es gilt in p

$$\Delta\phi \geq -(n-1)K\phi - \big(2 - \frac{2}{n-1}\big)\frac{\langle\nabla\phi,\, \nabla u\rangle}{u} + \frac{1}{n-1}\phi^3, \tag{2.16}$$

wo $\langle X,\, Y\rangle = g(X,Y)$ die Riemannschen Metrik darstellt.

Beweis: Mit der Notation aus dem Lemma gilt wegen der Quotientenregel

$$\nabla\phi = \frac{\nabla|\nabla u|}{u} - \frac{|\nabla u|\nabla u}{u^2}. \tag{2.17}$$

Wegen $|\nabla u| = \phi u$ bzw. $\Delta u(p) = 0$ gilt in p

$$\begin{aligned}\Delta(|\nabla u|) &= u\Delta\phi + 2\langle\nabla u,\, \nabla\phi\rangle + \phi\Delta u\\ &= u\Delta\phi + 2\langle\nabla u,\, \nabla\phi\rangle.\end{aligned}$$

Dies dividiert man durch $u > 0$ und subtrahiert beidseitig den letzten Term. Man erhält

$$\Delta\phi = \frac{\Delta(|\nabla u|)}{u} - \frac{2\langle\nabla u,\, \nabla\phi\rangle}{u},$$

beziehungsweise nach Erweitern des ersten Bruchs mit $|\nabla u|$

$$= \frac{|\nabla u|\,\Delta(|\nabla u|)}{|\nabla u|u} - \frac{2\langle\nabla u,\, \nabla\phi\rangle}{u}.$$

An dieser Stelle benutzt man das letzte Lemma um den Zähler des ersten Bruchs nach unten abzuschätzen. Es ist dann

$$\begin{aligned}\Delta\phi &\geq \frac{1}{|\nabla u|u}\cdot\Big(\frac{1}{n-1}|\nabla(|\nabla u|)|^2 - (n-1)K|\nabla u|^2\Big) - \frac{2\langle\nabla u,\, \nabla\phi\rangle}{u}\\ &= \frac{1}{(n-1)|\nabla u|u}|\nabla(|\nabla u|)|^2 - (n-1)K\phi - \frac{2\langle\nabla u,\, \nabla\phi\rangle}{u}. \qquad (2.18)\end{aligned}$$

Um der Behauptung näher zu kommen, besteht unser Interesse letztlich darin, den ersten Term genehmer auszudrücken. Der Trick von Yau besteht darin, den letzten Term geschickt umzuformen, so dass der erste von ihm verschluckt wird. Man setze der schöneren Notation halber $a := 2/(n-1)$. Im folgenden Schritt subtrahiert man lediglich einen Term, den man sofort wieder addiert.

$$\frac{2\langle\nabla\phi,\, \nabla u\rangle}{u} = \frac{(2-a)\langle\nabla\phi,\, \nabla u\rangle}{u} + \frac{a\langle\nabla\phi,\, \nabla u\rangle}{u}.$$

Jetzt setzt man im zweiten Bruch (2.17) ein:

$$\begin{aligned}\ldots \quad &= (2-a)\frac{2\langle\nabla\phi,\,\nabla u\rangle}{u} + \frac{a}{u}\langle\Big(\frac{\nabla|\nabla u|}{u} - \frac{|\nabla u|\nabla u}{u^2}\Big),\,\nabla u\rangle \\ &= (2-a)\frac{2\langle\nabla\phi,\,\nabla u\rangle}{u} + a\frac{\langle\nabla(|\nabla u|),\,\nabla u\rangle}{u^2} - a\frac{|\nabla u|^3}{u^3} \\ &\leq (2-a)\frac{2\langle\nabla\phi,\,\nabla u\rangle}{u} + a\frac{|\nabla(|\nabla u|)||\nabla u|}{u^2} - a\phi^3. \qquad (2.19)\end{aligned}$$

Der letzte Schritt bestand aus der Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung. Dem mittleren Term wendet man sich kurz gesondert zu. Dazu erweitert man zuerst mit $(|\nabla u|)^{1/2}$ und schätzt dann mit dem binomischen Spezialfall $x^2 + y^2 \geq 2xy$ der Youngschen Ungleichung ab:

$$\begin{aligned}a\frac{|\nabla(|\nabla u|)||\nabla u|}{u^2} &= a\frac{|\nabla(|\nabla u|)|}{(|\nabla u|u)^{1/2}}\cdot\frac{|\nabla u|^{3/2}}{u^{3/2}} \\ &\leq \frac{a}{2}\Big(\frac{|\nabla(|\nabla u|)|^2}{|\nabla u|u} + \frac{|\nabla u|^3}{u^3}\Big) \\ &= \frac{1}{n-1}\Big(\frac{|\nabla(|\nabla u|)|^2}{|\nabla u|u} + \phi^3\Big).\end{aligned}$$

Der letzte Schritt setzt nur noch die Definitionen von a und ϕ in den Ausdruck ein. Benutzt man diese Abschätzung in (2.19), so resultiert

$$\begin{aligned}\frac{2\langle\nabla\phi,\,\nabla u\rangle}{u} &\leq (2-a)\frac{2\langle\nabla\phi,\,\nabla u\rangle}{u} + \frac{1}{n-1}\Big(\frac{|\nabla(|\nabla u|)|^2}{|\nabla u|u} + \phi^3\Big) - a\phi^3 \\ &= (2-a)\frac{2\langle\nabla\phi,\,\nabla u\rangle}{u} + \frac{1}{n-1}\Big(\frac{|\nabla(|\nabla u|)|^2}{|\nabla u|u}\Big) - \frac{1}{n-1}\phi^3. \\ &= (2-a)\frac{2\langle\nabla\phi,\,\nabla u\rangle}{u} + \frac{1}{(n-1)|\nabla u|u}|\nabla(|\nabla u|)|^2 - \frac{1}{n-1}\phi^3.\end{aligned}$$

Wenn man damit nach (2.18) zurückgeht und einsetzt, so wird wie gewünscht der erste Summand aus (2.18) ausgelöscht, und was übrigbleibt ist

$$\Delta\phi \geq -(n-1)K\phi - \Big((2-a)\frac{2\langle\nabla\phi,\,\nabla u\rangle}{u} - \frac{1}{n-1}\phi^3\Big),$$

die Behauptung des Lemmas.

□

2.2.2 Gradientenabschätzung und Konsequenzen

Theorem 2.8 (Gradientenabschätzung) *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n(\geq 2)$, vollständig und mit $Ric \geq -(n-1)K$, wo $K \geq 0$ eine Konstante ist. Angenommen, u ist auf $B_x(a)$ eine positive harmonische Funktion, wo $B_x(a)$ eine Geodätische Kugel in M ist. Dann gilt*

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_n\Big(\frac{1 + a\sqrt{K}}{a}\Big) \text{ auf } B_x(a/2), \qquad (2.20)$$

wo C_n eine Konstante ist, die nur von der Dimension abhängt.

Beweisidee / Skizze: Die Idee liegt darin, die Funktion $|\nabla u|/u$, die abgeschätzt werden soll, auf der Kugel $B_a x$ mit einem Dämpfungsfaktor $(a^2 - \rho^2)$ zu multiplizieren. Dabei ist $\rho = \rho(y) = dist(x, y)$ der geodätische Abstand vom Mittelpunkt der Kugel. Das Produkt

$$F = (a^2 - \rho^2)\frac{|\nabla u|}{u}$$

verschwindet auf dem Rand der Kugel identisch und ist somit gezwungen, sein Maximum im Inneren der Kugel, sagen wir bei x_0, anzunehmen. Wenn x_0 nicht im cut locus von x liegt, ist F in einer Umgebung von x_0 glatt und die einfache Tatsache, dass $\nabla F(x_0) = 0$ und $\Delta F(x_0) \leq 0$ reicht aus, um mit den beiden Lemmata die gewünsche Abschätzung zu erhalten. Ist x_0 doch im cut locus von x, so bewegt man seinen Blickwinkel vom bisherigen Kugelmittelpunkt x um Wenig entlang der verbindenen Geodätischen auf x_0 zu. Vom neuen Standpunkt $\bar{x}$ aus kann man wie im harmloseren Fall abschätzen und sich dann in einem Grenzübergang wieder zum alten Zentrum x zurücktasten. Die Verbindungsgeodätische existiert wegen der Vollständigkeit von M mit dem Theorem von Hopf-Rinow (z.B. in Chavel [Cha95, S.26, Thm. 1.10]).

Beweis: Falls $\nabla u \equiv 0$ auf ganz $B_a x$, so ist die angestrebte Ungleichung offensichtlich sogar auf der ganzen Kugel richtig. Man geht deswegen davon aus, dass ein $x_0 \in B_x(a)$ existiert mit $\nabla u(x_0) \neq 0$. Da $F(x_0) > 0$ ist oBdA schon $F(x_0) = \max_{B_x(a)} F$.

Man nimmt zunächst an, x_0 liege nicht im cut locus von x. Dann ist die Exponentialfunktion mit Ursprung im Kugelmittelpunkt x in einer Umgebung von x_0 ein glatter Diffeomorphismus (z.B. [GHL90], Kor. 3.77, S.133), d.h. insbesondere existiert exp_x^{-1} und ist ebenfalls glatt. Also ist auch die Abstandsfunktion ρ dort glatt und somit F so oft stetig differenzierbar wie $|\nabla u|$, nach Voraussetzung also mindestens zweimal. Es gilt daher

$$\nabla F(x_0) = 0, \quad \text{und} \tag{2.21}$$

$$\Delta F(x_0) \leq 0, \quad \text{sowie} \quad \frac{\Delta F}{F}(x_0) \leq 0. \tag{2.22}$$

Schritt 1 des Beweises besteht darin, diese Information allein durch $\phi = |\nabla u|/u$, $\Delta\phi$ und die Abstandsfunktion auszudrücken. Man rechnet aus, dass

$$\nabla_i F = \nabla_i((a^2 - \rho^2)\phi) = (a^2 - \rho^2)\nabla_i\phi - \phi\nabla_i\rho^2 \quad \text{bzw.}$$
$$\nabla_i\nabla_i F = (a^2 - \rho^2)\nabla_i\nabla_i\phi - 2\nabla_i\rho^2\nabla_i\phi + \phi\nabla_i\nabla_i\rho^2 = (a^2 - \rho^2)\Delta\phi - 2\langle\nabla\phi, \nabla\rho^2\rangle + \phi\Delta\rho^2.$$

Nun substituiert man die erste Zeile in (2.21), die zweite in (2.22) und dividiert jeweils durch $(a^2 - \rho^2) > 0$ und durch $\phi > 0$, um

$$\frac{\nabla\rho^2}{a^2 - \rho^2} = \frac{\nabla\phi}{\phi} \quad \text{bzw.} \tag{2.23}$$

$$-\frac{\Delta\rho^2}{a^2 - \rho^2} + \frac{\Delta\phi}{\phi} - \frac{2\langle\nabla\phi, \nabla\rho^2\rangle}{(a^2 - \rho^2)\phi} \leq 0 \tag{2.24}$$

zu erhalten. Wir bemerken dabei die verblüffende Möglichkeit von (2.23), in x_0 die Terme, in denen die Funktion u (bzw. abkürzend ϕ) vorkommt, ganz durch Terme auszudrücken, die nur von der Distanzfunktion abhängig sind. Man kann jetzt z.B. im letzten Summanden von (2.24) den Faktor $(1/\phi)$ in die linke Seite des Skalarproduktes hineinziehen. Dann kann man den eben gesehenen Trick mit (2.23) dort anwenden und erhalten

$$\frac{\Delta\phi}{\phi} - \frac{\Delta\rho^2}{a^2-\rho^2} - \frac{2|\nabla\rho^2|^2}{(a^2-\rho^2)^2} \leq 0. \tag{2.25}$$

Um noch die Ableitungen der Distanzfunktion loszuwerden, nutzt man die Tatsache, dass $|\nabla\rho| = 1$, also $|\nabla\rho^2|^2 = (2\rho|\nabla\rho|)^2 = 4\rho^2$. Dann wendet man Proposition 2.5 von Seite 11 an, um auch $\Delta\rho$ abzuschätzen:

$$\begin{aligned}\Delta\rho^2 = 2\rho\Delta\rho + 2|\nabla\rho|^2 = 2 + 2\rho\Delta\rho \\ \leq 2 + 2(n-1)(1+\sqrt{K}\rho) \\ \leq 2(1+\sqrt{K}\rho) + 2(n-1)(1+\sqrt{K}\rho) \\ \leq (2+2(n-1))(1+\sqrt{K}\rho) =: C(1+\sqrt{K}\rho).\end{aligned} \tag{2.26}$$

Geht man mit diesem Ergebnis nach (2.25) zurück, so bekommt man die gewünschte Kodierung der Information $F(x_0) = \max_{B_x(a)} F$

$$0 \geq \frac{\Delta\phi}{\phi} - \frac{C(1+\sqrt{K}\rho)}{a^2-\rho^2} - \frac{8\rho^2}{(a^2-\rho^2)^2}. \tag{2.27}$$

Schritt 2 Programm: Man nutzt Lemma 2.7, um die Ableitungen zweiter Ordnung in $\Delta\phi$ gegen ϕ, u und deren Ableitungen erster Ordnung abzuschätzen. Mithilfe der oben schon kurz hervorgehobenen Gleichheit (2.24) kann man die verbleibenden Terme mit $\nabla\phi$ schließlich ganz aus der Abschätzung verdrängen. Weil die Distanzfunktion auf der betrachteten Kugel ebenfalls beschränkt ist, landet man nach weiterem Abschätzen bei einer quadratischen Ungleichung für F, in der überhaupt keine Ableitungen der Ordnung ≥ 1 von u mehr vorkommen.

Aus der Gleichheit (2.24) folgt durch Multiplikation mit $\nabla u/u$

$$\frac{\langle\nabla\phi,\,\nabla u\rangle}{\phi u} = \frac{\langle\nabla\rho^2,\,\nabla u\rangle}{(a^2-\rho^2)u} = \frac{2\rho\langle\nabla\rho,\,\nabla u\rangle}{(a^2-\rho^2)u} \leq \frac{2\rho}{(a^2-\rho^2)}\phi,$$

wobei der letzte Schritt eine Cauchy-Schwarzsche Ungleichung zusammen mit $|\nabla\rho| = 1$ ist. Nun knüpft man an (2.27) an. Es gilt nacheinander wegen Lemma 2.7 und wegen der hier gerade vorangegangenen Zeile, dass

$$\begin{aligned}0 &\geq \Big(-(n-1)K - \big(2-\frac{2}{n-1}\big)\frac{\langle\nabla\phi,\,\nabla u\rangle}{\phi u} + \frac{1}{n-1}\phi^2\Big) - \frac{C(1+\sqrt{K}\rho)}{a^2-\rho^2} - \frac{8\rho^2}{(a^2-\rho^2)^2} \\ &\geq -(n-1)K - \big(2-\frac{2}{n-1}\big)\frac{2\rho}{(a^2-\rho^2)}\phi + \frac{1}{n-1}\phi^2 - \frac{C(1+\sqrt{K}\rho)}{a^2-\rho^2} - \frac{8\rho^2}{(a^2-\rho^2)^2}.\end{aligned}$$

Die ganze Abschätzung multipliziert man mit $(a^2-\rho^2)^2$ und beobachtet, wie an zwei Stellen $F = (a^2-\rho^2)\phi$ entsteht,

$$0 \geq -(n-1)K(a^2-\rho^2)^2 - 4\big(\frac{n-2}{n-1}\big)\rho F + \frac{1}{n-1}F^2 - C(1+\sqrt{K}\rho)(a^2-\rho^2) - 8\rho^2.$$

Da auf der Kugel $B_x(a)$ gilt, dass $0 \leq \rho \leq a$, folgt

$$\begin{aligned}
\ldots \quad &\geq -(n-1)Ka^4 - 4\left(\frac{n-2}{n-1}\right)aF + \frac{1}{n-1}F^2 - C(1+\sqrt{K}a)a^2 - 8a^2 \\
&\geq \frac{1}{n-1}F^2 - 4\left(\frac{n-2}{n-1}\right)aF - (n-1)Ka^4 - C\sqrt{K}a^3 - Ca^2 - 8a^2,
\end{aligned}$$

also mit $C_1 = 4(n-2)/(n-1)$ und $C_2 = \max\{(n-1), C/2, C+8\}$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{n-1}F^2 - C_1aF - a^2C_2\big(Ka^2 + 2\sqrt{K}a + 1\big) \\
&\geq \frac{1}{n-1}F^2 - C_1aF - a^2C_2\big(1+\sqrt{K}a\big)^2. \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

Wie im Verlauf sichtbar, hängen C_1 und C_2 noch immer nur von n ab.

Schritt 3 betrachtet (2.28) als quadratische Abschätzung der Form $bF^2 + cF + d \leq 0$. Man ergänzt zum Binom, zieht die Wurzel und löst nach F auf, um eine obere Abschätzung für $F(x_0)$ zu gewinnen:

$$\begin{aligned}
\sup_{B_x(a)} F &= F(x_0) \\
&\leq (n-1)\left(C_1a + \sqrt{C_1^2a^2 + \frac{C_2}{n-1}a^2(1+\sqrt{K}a)^2}\right),
\end{aligned}$$

und indem man unter der Wurzel den ersten Summanden mit $(1+\sqrt{K}a)^2 \geq 1$ multipliziert, bekommt man

$$\begin{aligned}
\sup_{B_x(a)} F &\leq (n-1)\left(C_1a + \sqrt{(C_1^2 + \frac{C_2}{n-1})a^2(1+\sqrt{K}a)^2}\right) \\
&\leq C_3a(1+\sqrt{K}a),
\end{aligned}$$

wo C_3 wiederum nur von n abhängt. Letztlich folgt

$$\frac{3a^2}{4}\sup_{B_x(a/2)}\phi \leq \sup_{B_x(a/2)}\left(a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)\phi \leq \sup_{B_x(a/2)}(a^2-\rho^2)\phi \leq \sup_{B_x(a)} F \leq C_3a(1+\sqrt{K}a)$$

und somit die Behauptung,

$$\sup_{B_x(a/2)}\phi \leq C(n)\left(\frac{1+\sqrt{K}a}{a}\right). \qquad (2.29)$$

Nun steht noch der Fall an, in dem x_0 im cut locus von x liegt. Diesen Abschnitt übernimmt die vorliegende Arbeit fast unverändert aus Schoen-Yau [SY94], S.21.

Sei σ eine den Abstand zwischen x und x_0 realisierende Geodäte. σ existiert, wegen des Theorems von Hopf-Rinow [Cha95, S.26, Thm. 1.10]. Weil x_0 im cut locus von x liegt ist σ aber nicht eindeutig. Sei $\sigma(0) = x$ und $\epsilon > 0$ klein. Dann bezeichne $\bar{x} = \sigma(\epsilon)$, wodurch $\operatorname{dist}(x, \bar{x}) = \rho(\bar{x}) = \epsilon$. Wegen der Symmetrie der cut-locus Beziehung hat $\bar{x}$ entlang σ keine konjugierten Punkte. Insbesondere ist die Distanzfunktion $\rho_{\bar{x}}(y) = \operatorname{dist}(\bar{x}, y)$ in einer Umgebung von ganz σ glatt. Mit der Dreiecksungleichung für den geodätischen Abstand gilt dann auf dieser Umgebung, dass

$$\begin{aligned} \rho_{\bar{x}}(y) + \epsilon &\leq \rho(y), \\ \rho_{\bar{x}}(x_0) &= \rho(x_0). \end{aligned}$$

Definiert man jetzt die Hilfsfunktion

$$\overline{F}(y) = [a^2 - (\rho_{\bar{x}}(y) + \epsilon)^2]\phi,$$

so folgt mit obigen zwei Zeilen

$$\overline{F}(y) \leq F(y) \quad \text{ und } \quad \overline{F}(x_0) = F(x_0).$$

Insbesondere nimmt $\overline{F}$ sein Maximum ebenfalls in x_0 an. Da x_0 nicht im cut locus von $\bar{x}$ liegt, ist $\overline{F}$ in einer Umgebung um diesen Punkt glatt und man kann mit $\overline{F}(x_0)$ statt $F(x_0)$ den Beweis des ersten Falles auf der Kugel $B_{\bar{x}}(a-\epsilon)$ statt $B_x(a)$ anwenden. Wenn man auf dem Papier den Beweis mit den neuen Größen im Hinterkopf nochmals vollzieht, muss man bedenken, dass für $\bar{\rho}(y) = (\rho_{\bar{x}}(y) + \epsilon)$ mit der Abschätzung aus Proposition 2.5 jetzt gilt, dass

$$\Delta\bar{\rho} = \Delta\rho_{\bar{x}} \leq \frac{\bar{\rho}}{\rho_{\bar{x}}}(n-1)(1 + \sqrt{K}\rho_{\bar{x}}).$$

Man bekommt daher statt (2.26) und der vorangehenden Bemerkung,

$$|\nabla\bar{\rho}^2| = 2\bar{\rho} \quad \text{bzw.} \quad \Delta\bar{\rho}^2 \leq \frac{\bar{\rho}}{\rho_{\bar{x}}}C(1 + \sqrt{K}\rho_{\bar{x}}).$$

Man beachte dabei, dass $\bar{\rho}/\rho_{\bar{x}} \geq 1$ ist und sowohl hier wie auch in allen weiteren Abschätzungen des nachzuvollziehenden Beweises in die richtige Richtung arbeitet. Wo immer dieser Faktor nicht steht, kann man ihn hinzumultiplizieren und dann ausklammern, ohne dass die Abschätzungen dadurch falsch werden. Da ausserdem offensichtlich auf $B_{\bar{x}}(a-\epsilon) =: B_{\bar{x}}(\bar{a})$ gilt, dass $\bar{\rho} = \rho_{\bar{x}} + \epsilon \leq a - \epsilon + \epsilon = a$, bekommt man auf dieser Kugel als Ergebnis von Schritt 2 des Beweises statt (2.28)

$$0 \geq \frac{1}{n-1}\overline{F}^2 - C_1 a\overline{F} - \frac{\bar{\rho}}{\rho_{\bar{x}}}a^2 C_2\big(1 + \sqrt{K}a\big)^2.$$

Auch die quadratische Ergänzung aus Schritt 3 verläuft bis auf den Faktor $\bar{\rho}/\rho_{\bar{x}}$ formal identisch. Man endet statt (2.29) mit der Aussage, dass

$$\forall\epsilon > 0: \qquad \sup_{B_x((a-\epsilon)/2)} \frac{|\nabla u|}{u} \leq \frac{\bar{\rho}}{\rho_{\bar{x}}}C(n)\big(\frac{1 + \sqrt{K}a}{a}\big).$$

Mit $\epsilon \longrightarrow 0$ geht $\bar{\rho}/\rho_{\bar{x}} \longrightarrow 1$ und die Behauptung folgt.

$\square$

Zwei für diese Arbeit sehr interessante Ergebnisse lassen sich aus dieser Gradientenabschätzung nun mit sehr geringem Aufwand ableiten. Das erste Korollar aus dem letzten Theorem ist eine Ausweitung des Satzes von Liouville, auf den schon in der Einleitung hingewiesen wurde. Eine Verallgemeinerung dieses Satzes auf kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten wäre, wie schon vor dem ersten Lemma dieses Abschnitts erwähnt, schon mit dem schwachen Maximumprinzip für harmonische Funktionen sofort klar. Das klassische Liouville-Theorem überrascht mit seiner Konstanzaussage aber gerade ohne die starke topologische Voraussetzung der Kompaktheit. Die Gradientenabschätzung von Yau ermöglicht jetzt einen Liouville-artigen Satz für nichtkompaktes M im Falle nichtnegativer Ricci-Krümmung. Es wird später gezeigt, dass ein ähnliches Resultat für den Fall, dass die Schnittkrümmungen auf ganz M in die andere Richtung von 0 wegbeschränkt sind, falsch wäre.

Korollar 2.9 *Sei M eine $n(\geq 2)$-dimensionale vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Ricci-Krümmung. Dann ist jede auf ganz M positive harmonische Funktion bereits konstant.*

Beweis: Sei $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonisch und positiv. Wenn M kompakt ist, nimmt u auf M sein Maximum an und ist nach dem starken Maximumprinzip 2.3 von Seite 10 konstant. Sei daher M nichtkompakt. Wegen $Ric \geq 0$ ist Theorem 2.8 mit $K = 0$ anwendbar. Angenommen es gibt ein $p \in M$, so dass $\nabla u(p) \neq 0$. Dann folgt aus dem Theorem

$$\frac{|\nabla u|}{u}(p) \leq C_n \frac{1}{a} \quad \text{auf } B_p(a/2),$$

wo die Kugel $B_p(a)$ wegen der Nichtkompaktheit von M beliebig groß gewählt werden kann. Man lässt also a über jede Schranke wachsen und findet so

$$\forall \epsilon > 0 : |\nabla u|(p) \leq \epsilon \cdot u(p) C_n \quad \text{auf } B_p(1).$$

Aber $C_n, u(p) < \infty$, also $|\nabla u(p)| = 0$, und der Widerspruch beweist die Behauptung.

□

Natürlich gilt auch die allgemeinere Formulierung:

Korollar 2.10 (Liouville) *Sei M eine $n(\geq 2)$-dimensionale vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Ricci-Krümmung. Dann ist jede auf ganz M harmonische und einseitig beschränkte Funktion bereits konstant.*

Beweis: Falls u nach oben beschränkt, betrachte $v = -u + \inf(-u) + \epsilon$, falls u nach unten beschränkt, $v = u - \inf u + \epsilon$. In jedem Fall ist v positiv und harmonisch, daher nach dem letzten Korollar konstant.

□

Bemerkung: Wie hier gesehen, handelt es sich bei der im Korollar gewählten unteren Schranke 0 um eine Konventionsfrage. Von nun an zieht mit nahezu der gesamten Literatur auch diese Arbeit die Formulierung $u \geq 0$ der Formulierung "u nach unten beschränkt" vor, ohne jedesmal zu erwähnen, dass die allgemeinere Formulierung auch gilt.

Korollar 2.11 (Liouville für holomorphe Funktionen) *Sei $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Wenn F dann beschränkt ist, so ist F konstant.*

Beweis: Wegen der Reihendarstellungen für holomorphe Funktionen ist bekannt, dass F unendlich oft stetig komplex differenzierbar ist. Man identifiziert C als Menge mit $\mathbb{R}^2$. Sei $F(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, wo $z = (x + iy)$. Dann sind insbesondere u und v reellwertige Funktionen und beliebig oft stetig reell differenzierbar. Es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen,

$$\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial}{\partial y}v \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y}u = -\frac{\partial}{\partial x}v,$$

aus denen man durch nochmaliges Differenzieren

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}v \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}u = -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}v$$

abliest, woraus durch Addieren der beiden Gleichungen und Anwendung des Satzes von Schwarz folgt, dass

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}v - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}v = 0.$$

Analog folgt, dass auch v harmonisch ist, und mit F sind auch u und v beschränkt. Wegen des letzten Korollars sind dann u und v konstant und so auch F.

□

Als zweite Konsequenz aus der Gradientenabschätzung bekommen wir eine erste Harnack-Ungleichung.

Korollar 2.12 (Harnack-Ungleichung) *Sei M eine $n(\geq 2)$-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $Ric \geq -(n-1)K$, $K \geq 0$. Sei u auf einer Kugel $B_x(a)$ in M positiv und harmonisch. Dann gilt*

$$\sup_{B_x(a/2)} u \leq C(n,a,K) \inf_{B_x(a/2)} u. \tag{2.30}$$

Dabei kann die Konstante als $C(n,a,K) = e^{2C_n(1+a\sqrt{K})}$ gewählt werden, wo C_n die nur von n abhängige Konstante aus Theorem 2.8 ist.

Beweis: Idee: Integriere die Abschätzung für $|\nabla u|/u$ aus dem Theorem entlang einer stückweise geodätischen Kurve auf, die Urbilder von $\inf u$ und $\sup u$ verbindet.

Theorem 2.8 bringt die Abschätzung

$$\sup_{B_x(a/2)} \frac{|\nabla u|}{u} = \sup_{B_x(a/2)} \frac{|\nabla u|}{u} \leq C_n\Big(\frac{1 + a\sqrt{K}}{a}\Big).$$

Man wählt nun $x_1, x_2 \in \overline{B_x(a/2)}$ so, dass $u(x_1) = \sup_{B_x(a/2)} u$ und $u(x_2) = \inf_{B_x(a/2)} u$. x_1, x_2 existieren, weil der Abschluss der Kugel betrachtet wird. Wegen der Vollständigkeit von M und des inzwischen bekannten Hopf-Rinow Argumentes gibt es dann zwei minimierende geodätische Kurvenstücke $(i = 1,2)$ $\gamma_i : [0,T_i] \longrightarrow M$ mit $\gamma_1(0) = x_1, \gamma_2(T_2) = x_2$ und $\gamma_1(T_1) = \gamma_2(0) = x$, die die Punkte x_1, x_2 über den Kreismittelpunkt verbinden. OBdA ist γ_i nach Bogenlänge parametrisiert. Es gilt dann für die Länge des zusammengesetzten Weges, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\gamma_2\circ\gamma_1}$, dass $\mathcal{L} = T_1 + T_2 \leq a$. Der zusammengesetzte Weg $\gamma = \gamma_2 \circ \gamma_1$ verlässt die abgeschlossene Kugel $\overline{B_x(a/2)}$ nicht, und man kann integrieren:

$$\int_\gamma \frac{|\nabla u|}{u}\, ds \leq C_n\Big(\frac{1+a\sqrt{K}}{a}\Big)\int_\gamma ds = \mathcal{L}\cdot C_n\Big(\frac{1+a\sqrt{K}}{a}\Big) \leq a\cdot C_n\Big(\frac{1+a\sqrt{K}}{a}\Big)$$

Andererseits gilt wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, dass

$$\log\frac{u(x_1)}{u(x)} = |\int_{\gamma_1}\frac{d\log u(\gamma_1(s))}{ds}|ds \leq \int_{\gamma_1}|\frac{\langle\nabla u,\, \gamma_1'\rangle}{u}|ds \leq \int_{\gamma_1}\frac{|\nabla u|}{u}ds.$$

Dabei gilt der vorletzte Schritt wegen der Kettenregel und der Definition des Gradienten, der letzte Schritt wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der Bogenlängenparametrisierung von γ_1. Analoges gilt mutatis mutandis für die Integration entlang γ_2. Insgesamt ergibt sich also, dass

$$\log\frac{u(x_1)}{u(x_2)} \leq \int_\gamma \frac{|\nabla u|}{u}\, ds.$$

Mann kann jetzt die vorvorletzte Zeile an die letzte anhängen und alles in den Exponenten einer e-Funktion heben. Dann ist

$$\frac{u(x_1)}{u(x_2} \leq e^{a\cdot C_n\left(\frac{1+a\sqrt{K}}{a}\right)},$$

bzw. durch Multiplizieren mit $u(x_2)$ auf $B_x(a/2)$,

$$\sup u = u(x_1) \leq e^{a\cdot C_n\left(\frac{1+a\sqrt{K}}{a}\right)}u(x_2) = C(n,a,K)\inf u,$$

und die Behauptung ist gezeigt.

□

2.3 Die Laplacegleichung im Falle negativer Schnittkrümmungen

Der folgende Abschnitt dieser Arbeit soll einen Einblick darin geben, wie verschieden die Eigenschaften des Laplace-Beltrami-Operators auf nichtkompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit negativen Schnittkrümmungen gegenüber denen des letzten Kapitels ($Ric \geq 0$) sind. Es gilt also in diesem Abschnitt die folgende Generalvoraussetzung immer dann, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird:

Generalvoraussetzung 2.13 *Sei M eine vollständige und einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer Metrik g, für deren Schnittkrümmungen R_{ikik} gilt, dass*

$$\forall i,k = 1,..,n: \quad -b^2 \leq R_{ikik} \leq -a^2 < 0,$$

wo a und b positive Konstanten sind.

Man gelangt zu dem Resultat, dass auf einem solchen M das Dirichletproblem in einem noch zu definierenden Sinne für beliebige "Randwerte" global gelöst werden kann. Dazu muss natürlich zuerst ein Randbegriff für M entwickelt werden. Dem Lösbarkeitssatz für das Dirichletproblem kann sogar noch ein Existenzsatz für einen eindeutigen Poisson-Kern zu jedem Punkt auf dem "Rand" von M folgen. Insbesondere bedeuten diese Resultate die Existenz von beschränkten, nichtkonstanten harmonischen Funktionen auf M.

Ein Dilemma angesichts dieses Programms ist, dass der technische Apparat für die Beweise der interessanten Theoreme jeweils relativ groß ist – jedenfalls so groß, dass er den Umfang der vorliegenden Arbeit völlig sprengen würde. Da der Autor seine Fähigkeit, detaillierte Beweise zu führen, an anderer Stelle dieser Arbeit immer wieder zu demonstrieren versucht, nimmt er sich in diesem Abschnitt die Freiheit, Beweise in der Regel entweder nicht oder in stark kondensierter Form wiederzugeben. Das Material zu diesem Abschnitt entstammt weitgehend dem Buch von Schoen und Yau [SY94].

2.3.1 Technische Vorbereitungen

Zu Beginn sei angemerkt, dass für die hier betrachteten Mannigfaltigkeiten das folgende Theorem Gültigkeit besitzt:

Theorem 2.14 (J.Hadamard, E.Cartan) *Es sei M eine vollständige, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtpositiven Schnittkrümmungen. Dann ist die Exponentialabbildung auf dem ganzen Tangentialbündel von M von maximalem Rang.*

Beweis: [Cha95], S.82

$\square$

Insbesondere ist M diffeomorph zum $\mathbb{R}^n$ und von jedem Punkt aus in einer einzigen Karte Riemannscher Normalkoordinaten oder geodätischer Polarkoordinaten zu fassen. Aus demselben Grund ist die Distanzfunktion von jedem gegebenen Punkt in M aus auf ganz M glatt.

In den meisten Ergebnissen für Mannigfaltigkeiten mit negativen Schnittkrümmungen steckt bei geometrischer Argumentation der Vergleich mit Raumformen konstanter negativer Schnittkrümmung. Eine gute Möglichkeit, sich eine Intuition über die Beschaffenheit entsprechender Räume zu verschaffen, ist die Betrachtung der Poincare-Kreisscheibe. Diskutiert ist sie z.B. bei Gallot-Hulin-Lafontaine ([GHL90], S.56 f., No 2.10 und 2.11, mit ausführlicher Lösung im Anhang) und bei Chavel ([Cha95], S.66 f. sowie [Cha84], S.266 ff.). Auch Schoen und Yau ([SY94], S.33 f.) beschäftigen sich kurz mit ihr. Hier wird der Fall der allgemeinen Dimension n betrachtet. Es wird aber trotzdem von Kreisscheiben und Sphären statt von Kugeln und Kugeloberflächen gesprochen, weil die Vorstellung der Poincare-Kreisscheibe der Dimension 2 entstammt und die graphische Vorstellbarkeit der entsprechenden Geometrie im Flachen nach Ansicht des Autors besser funktioniert.

Sei $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der Lorentzmetrik $\langle x, x\rangle_{Lo} = -x_0^2 + x_1^2 + ... + x_n^2$ sowie die Hyperfläche

$$H^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle x, x\rangle_{Lo} = -1, x_0 > 0\}$$

gegeben. Dann ist H^n raumartig, d.h. die vom umliegenden Raum auf H^n induzierte Metrik $\langle \cdot, \cdot\rangle_H$ ist positiv definit, somit H^n Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Pseudoinversion f mit Pol $s = (-1, 0, ..., 0)$ und Definitionsbereich H^n gegeben durch

$$f(x) := s - \frac{(x-s)}{\langle x-s,\, x-s\rangle_H}, \qquad \Rightarrow \quad f(x_0, .., x_n) = \frac{-1}{x_0+1}(0, x_1, .., x_n)$$
$$\Rightarrow |f(x)| = \frac{x_0^2-1}{x_0^2+1} < 1 \tag{2.31}$$

ist ein Diffeomorphismus von H^n auf die Einheitskreisscheibe S. Nutzt man durch einen Pull-back die Metrik von H^n auf dieser Scheibe (die auf S induzierte Metrik heisse g), so findet man, dass für $x \in S$ und $\xi \in T_x S$

$$g_x(\xi, \xi) = \langle D(f^{-1})(x)\xi,\, D(f^{-1})(x)\xi\rangle_H = \ldots = 4\sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i^2}{(1-\sum_{j=1}^n x_j^2)^2},$$

also in klassischer Notation (wo die Betragsstriche die euklidische Norm bezeichnen)

$$g_x(\xi, \xi) = 4\frac{|d\xi|^2}{(1-|x|^2)^2}.$$

Mit dieser Metrik ist die Poincare-Kreisscheibe eine Raumform mit konstanten Schnittkrümmungen -1. Man kann sehen, dass die Verbindungsgeodätische zweier Punkte auf S die eindeutig bestimmte Kreislinie ist, die durch beide Punkte geht und die Einheitssphäre (als Rand von S) senkrecht schneidet (z.B. [Cha84], S.268). Insbesondere sind "von aussen gesehen" die Geodätischen, die vom Ursprung ausgehen, genau die Ursprungsgeraden. Da es sich um eine Raumform handelt, sieht S ausserdem "von innen betrachtet" von jedem Punkt aus gleich aus, und der geodätische Abstand jedes Punktes zum Rand von S ist unendlich. Die auf der Titelseite abgebildete Darstellung ist eine Wiedergabe von S durch M.C.Escher, bei der die Fische jeweils entlang von Geodätischen schwimmen.

Den eben schon benutzten intuitiven Randbegriff für die Raumform (namentlich, den Rand, den S als Punktmenge in der Metrik der Inklusionsabbildung in $\mathbb{R}^{n+1} \cap \{x_0 = 0\}$ hätte, nämlich die Oberfläche der Einheitskugel) kann man mit Hilfe der folgenden Proposition präzise auch innerhalb der Geometrie jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit fassen, die die Generalvoraussetzung 2.13 erfüllt.

Proposition 2.15 *Erfülle M die Voraussetzungen 2.13, und seien O, x_1, x_2 drei Punkte in M. Angenommen, für den geodätischen Abstand ρ gilt, dass $\rho(O, x_1) = \rho(O, x_2) = r$*

ist. Bezeichne γ_i den geodätischen Strahl von O nach x_i, und sei der Winkel zwischen γ_1 und γ_2 bei O mit θ benannt. Dann gilt für hinreichend großes r und genügend kleine Winkel θ,

$$2r + \frac{2}{a}(\log\theta - 1) \leq \rho(x_1, x_2),$$

beziehungsweise für hinreichend großes r ohne Einschränkung für θ

$$\rho(x_1, x_2) \leq 2r + \frac{2}{b}(\log\theta + 1).$$

Beweis: Man benutzt mit $\rho(x_1, x_2) =: s$, dass (Schoen-Yau [SY94, S.34, Prop. 1.1])

$$\cos\theta \geq \coth^2 ar - \frac{\cosh as}{\sinh^2 ar} \quad \text{bzw.} \quad \cos\theta \leq \coth^2 br - \frac{\cosh bs}{\sinh^2 br},$$

für die erste bzw. zweite Ungleichung. Bei Schoen-Yau (ibid., S.35) ist der Beweis der ersten Ungleichung ausgeführt, hier der für die zweite. Zunächst werden alle hyperbolischen Funktionen in $\cosh^2$ ausgedrückt. Es gelten nacheinander (je eine Zeile impliziert die nächste):

$$\begin{aligned}
\cos\theta \sinh^2 br &\leq \cosh^2 br - \cosh bs, \\
\cos\theta(\sinh^2 br - \cosh^2 br) &\leq \cosh^2 br(1 - \cos\theta) - \cosh bs, \\
\cosh bs &\leq \cosh^2 br(1 - \cos\theta) + \cos\theta, \\
\cosh^2 bs/2 + \sinh^2 bs/2 + 1 &\leq \cosh^2 br(1 - \cos\theta) + \cos\theta + 1, \\
2\cosh^2 bs/2 &\leq \cosh^2 br(1 - \cos\theta) + \cos\theta + 1, \\
4\cosh^2 bs/2 &\leq \cosh^2 br \cdot 2(1 - \cos\theta) + 4.
\end{aligned}$$

Zwischenüberlegung: Für die Funktion $\phi(\theta) := 2(1 - \cos\theta) - \theta^2$ gilt, dass $\phi'(0) = 0, \phi''(0) = 0, \phi'''(0) = 0$ und $\phi''''(0) = -2$. Da ausserdem die erste Ableitung nirgends als bei $\theta = 0$ verschwindet, gilt

$$\forall\theta \geq 0: \quad 2(1 - \cos\theta) \leq \theta^2.$$

Andere Zwischenüberlegung: Weil $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet ist, gilt

$$\forall\theta > 0 \;\; \exists r_0 \in \mathbb{R} : \forall r \geq r_0 \quad 4 \leq \frac{3}{4}e^{2(br+1)} \cdot \theta^2.$$

Vorläufig letzte Zwischenüberlegung: Mit passendem $r_1 \in \mathbb{R}$ gilt, dass für $r \geq r_1$: $1 + e^{-2br} \leq e$, und somit $e^{br} + e^{-br} \leq e^{br+1}$. Deswegen stimmt für entsprechende r die Zeile

$$\cosh^2 br \leq \left(\frac{e^{br+1}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2(br+1)}}{4}.$$

Mit den Zwischenüberlegungen folgt aus der letzten Zeile im Hauptgang des Beweises (r hinreichend groß), dass

$$4\cosh^2 bs/2 \leq \frac{e^{2(br+1)}}{4}\theta^2 + \frac{3e^{2(br+1)}}{4}\theta^2.$$

Wenn man jetzt noch nutzt, dass $4\cosh^2 bs/2 = (e^{bs/2} + e^{-bs/2})^2 \geq e^{bs}$ ist, so folgt

$$e^{bs} \leq e^{2(br+1)}\theta^2.$$

Wegen der Monotonie des Logarithmus folgt jetzt die Behauptung (dividiere noch durch b).

Bemerkung: Für die erste zu beweisende Ungleichung muss man eine Konstante $1 < c < e/2$ einführen und kleine θ benutzen, um statt der ersten Zwischenüberlegung analog $2c^2(1-\cos\theta) \geq \theta^2$ zu erhalten.

□

Der geometrische Rand $S(\infty)$

Unter der Generalvoraussetzung an M gibt es wegen des obigen Theorems 2.14 von Hadamard und Cartan von jedem Punkt $p \in M$ aus in jede Anfangsrichtung $v \in T_pM$ einen eindeutig bestimmten geodätischen Strahl. Auf der Menge aller geodätischen Strahlen γ von allen Punkten in M aus kann man die folgende Äquivalenzrelation definieren:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \quad\Longleftrightarrow\quad \exists C \in \mathbb{R} : \forall t > 0 : \ \ \rho(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq C.$$

Dann bezeichnen wir

$$S(\infty) := \text{Menge aller geodätischen Strahlen}/\sim .$$

Um das Objekt $S(\infty)$ fassbarer zu machen, fixieren wir einen Punkt $O \in M$, der die Aufgabe des Ursprungs in der Poincare-Kreisscheibe bekommt. Zwei geodätische Strahlen γ_1, γ_2 mit gemeinsamem Anfangspunkt O sind wegen der letzten Proposition genau dann äquivalent modulo $\sim$, wenn sie gleich sind. Wären sie äquivalent aber nicht gleich, so umschlössen sie einen echt positiven Winkel θ, und aus Proposition 2.15 würde folgen, dass für alle $t > 0$

$$2t + \frac{2}{a}(\log\theta - 1) \leq \rho(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq C,$$

was für große t offensichtlich nicht sein kann. Man kann daher für beliebige fixierte Ursprungspunkte $O \in M$ den geometrischen Rand $S(\infty)$ von M mit der Einheitssphäre (Startrichtungen für geodätische Strahlen) $\mathsf{S}_0(1) \subset T_OM$ identifizieren.

Um die gewünschte Kompaktifizierung von M durch $M \cup S(\infty)$ zu erhalten, müssen noch die offenen Umgebungen für Punkte aus $S(\infty)$ in der Vereinigung definiert werden. Die Definition entnehmen wir wörtlich übersetzt dem Buch von Schoen und Yau [SY94, S.36].

Für beliebiges $O \in M, v \in T_OM\backslash\{0\}$ definiert man den Kegel (cone) $C_O(v,\delta)$ um v mit Öffnungswinkel 2δ durch

$$C_O(v,\delta) = \{x \in M | \angle(v, \gamma'_{O,x}(0)) < \delta\},$$

wo $\angle(v, \gamma'_{O,x}(0))$ den Winkel zwischen v und der Startrichtung des geodätischen Strahls $\gamma_{O,x}$ von O durch x bezeichnet. Sei $B_O(R)$ die geodätische Kugel von Radius R um O. Wir nennen

$$T_O(v,\delta,R) = C_O(v,\delta)\backslash B_O(R)$$

einen Kegelstumpf (truncated cone). Dann ergeben alle Kegelstümpfe $\{T_O(v,\delta,R)|\delta > 0, R > 0\}$ zusammen mit allen geodätischen Kreisscheiben $\{B_p(r)|p \in M, r > 0\}$ eine lokale Basis für die "Kegeltopologie "des Raumes $\overline{M} = M \cup S(\infty)$.

Man kann sehen, dass diese Topologie M kompaktifiziert, indem man direkt nachprüft, dass jede offene Überdeckung von $\overline{M}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt: Sei eine offene Überdeckung von $\overline{M}$ gegeben. Weil $\mathsf{S}_0(1) \in T_O M$ kompakt ist, findet man endlich viele Kegelstümpfe, die $S(\infty)$ überdecken. Unter diesen gibt es einen mit maximalem R. Aber dann ist schon $\overline{M}\backslash B_O(R)$ endlich überdeckt und der leicht überlappende Rest $\overline{B_O(R+\epsilon)}$ ist kompakt also ebenfalls endlich überdeckbar.

Exkurs: Die Perron-Methode auf $M \cup S(\infty)$

Für den Beweis der eindeutigen Lösbarkeit des Dirichletproblems mit Randwerten auf $S(\infty)$ verwenden Schoen und Yau eine Perron-Methode. In den üblichen Texten über elliptische partielle Differentialgleichungen zweiten Grades (z.B. [GT83]) wird ein solches Verfahren nur auf beschränkten Gebieten des $\mathbb{R}^n$ formuliert. Für den Beweis braucht man die Lösbarkeit des Dirichletproblems auf Kugeln mit endlichem Radius, was auf $\overline{M}$ kein Problem ist. Ebenso braucht man ein Maximumprinzip, und dazu einen Randbegriff, was mit der oben geschehenen Einführung der $S(\infty)$ und der Kegeltopologie aber funktionieren wird. Sehr zugute kommt einem, dass die Stärke der Perron-Methode gerade die Trennung der Eigenschaften der Harmonizität im Inneren und der Annahme der Randwerte ist. Denn das bedeutet, dass die nötigen Konvergenzsätze sämtlich auf Abschätzungen beruhen, die den Rand nicht berücksichtigen müssen. In diesem Sinne funktioniert der Perron-Apparat auf dem Inneren eines Gebietes unabhängig von der Tatsache, ob das Gebiet selbst beschränkt ist oder nicht.

Für das hier angestrebte Theorem 2.17 interessiert folgende Situation: Erfülle M die Generalvoraussetzung 2.13 und sei $O \in M$ als Ursprung ausgezeichnet. Sei ϕ beschränkte Funktion auf $S(\infty)$. Wir nennen eine auf ganz M subharmonische Funktion $v \in C^0(\overline{M})$ eine Subfunktion zu ϕ, falls

$$\forall \xi \in S_O(1) \cong S(\infty) \quad \exists R > 0, \delta > 0: \quad \forall x \in T_O(\xi,\delta,R): \quad v(x) \le \phi(\xi)$$

(in anderen Worten, $v \le \phi$ auf $S(\infty)$). Wir bezeichnen die Menge aller Subfunktionen zu ϕ mit S_ϕ. Entsprechend definiert man Superfunktionen. Wir gehen in diesem Kapitel der Bequemlichkeit halber davon aus, dass bereits mindestens die Existenz je einer Sub- und einer Superfunktion bekannt ist.

Theorem 2.16 (Inneres Perron-Verfahren) *Die Funktion $u(x) = \sup_{v \in S_\phi} v(x)$ ist harmonisch auf ganz M.*

Bemerkung: Bevor nachgewiesen ist, dass obige Funktion u als Endprodukt des Perron-Verfahrens tatsächlich die Randbedingungen erfüllt, bezeichnet man u als Perron-Lösung des Problems.

Beweisidee / Skizze: 1. Auf den Kugeln $B_O(R)$ ist das Dirichletproblem für $\Delta f = 0$ lösbar: Wegen der negativen Schnittkrümmungen ist die Exponentialfunktion von M glatt auf ganz TM. Insbesondere ist jede Kugel $B_O(R) \subset M$ C^∞-diffeomorph zu einem beschränkten Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^n$, das deswegen auch glatten Rand hat. Es ist bekannt, dass auf Ω das Dirichletproblem für den gewöhnlichen Laplace-Operator des flachen Raumes lösbar ist. Dann ist nach Gilbarg-Trudinger [GT83, S.100, Thm. 6.8] auch das gleichmäßig elliptische Dirichletproblem lösbar, das durch das Lesen unseres Dirichletproblems durch die Karte entsteht.

2. Da nur auf kompakten Teilmengen von M gearbeitet wird, steht mit Theorem 2.3 ein hinreichendes Maximumprinzip zur Verfügung. Wegen des Maximumprinzips gilt dann für v Superlösung und w Sublösung, dass $v > w$ auf ganz M oder $v \equiv w$ auf ganz M. Da die Existenz von Superlösungen und Sublösungen vorausgesetzt ist, ist dann jede Superlösung auf jedem Kompaktum $K \subset M$ eine gleichmäßige a priori Schranke für u. Also existiert u und ist wohldefiniert.

3. Wendet man das Maximumprinzip in diesem Sinne an, so kann man den Beweis der Perron-Methode für harmonische Funktionen des $\mathbb{R}^n$ aus Kapitel 2 in [GT83] samt der entsprechenden Vorarbeit (S.23-25) bis auf das verwendete Kompaktheitsresultat übernehmen. Der für die hiesige Situation passende Kompaktheitsschluss ist derselbe wie für [GT83] Theorem 6.11, S.103, beruht auf dem üblichen Korollar zum Theorem von Arzela-Ascoli für gleichgradig stetige Funktionenfolgen und benutzt die Normabschätzungen aus [GT83] Korollar 6.3, S.93, für die ersten und zweiten Ableitungen der Folge.

2.3.2 Ergebnisse

Das erste hier zu nennende Resultat ist der bereits angekündigte Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen des Dirichletproblems auf M, wo die Randwerte auf $S(\infty)$ vorgegeben werden.

Theorem 2.17 (Lösbarkeit des Dirichletproblems) *Sei M Riemannsche Mannigfaltigkeit mit den Eigenschaften aus 2.13. Wenn dann $\varphi \in C^0(S(\infty))$ beliebige Funktion ist, so existiert eine eindeutig bestimmte, auf ganz M harmonische Funktion $u \in C^\infty(M) \cap C^0(\overline{M})$, so dass $u|_{S(\infty)} = \varphi$.*

Beweisidee / Skizze: Zunächst besorgt man sich gute Regularitätsbedingungen. Man nimmt dazu an, dass für die Randwerte oBdA gilt $\varphi \in C^\infty(S_O(1))$ für einen frei gewählten Ursprung $O \in M$: Erstens kann $S(\infty)$ mit obiger Einheitssphäre identifiziert werden, wie im letzten Abschnitt dieser Arbeit besprochen. Andererseits können stetige Funktionen gleichmäßig durch glatte Funktionen approximiert werden, und falls Lösungen zu glatten Randwerten existieren, so konvergieren diese wegen des Maximumprinzips auf ganz $\overline{M}$ gleichmäßig gegen eine Lösung, falls sie auf dem Rand konvergieren. Mit demselben Kompaktheitsschluss wie für die Perron-Methode (s.o. 3.) ist die Grenzfunktion einer Diagonalfolge selbst wieder harmonisch auf dem Inneren.

Jetzt werden geodätische Polarkoordinaten mit Ursprung $O \in M$ eingeführt und die Funktion φ ins Innere von $\overline{M}$ wie folgt fortgesetzt: $\varphi(r, \theta) = \varphi(\theta)$. Die neue Funktion φ ist offensichtlich auf $\{r \neq 0\}$ glatt und beschränkt. Man beginnt mit einem ersten Beweisschritt

1. Indem man einen Ursprung O ausgewählt und φ wie oben definiert fortgesetzt hat, hat man die Oszillation der Werte von φ gewissermaßen um O versammelt. Man zeigt, dass die Oszillation von φ auf der Einheitskugel um einen beliebigen Punkt $O \neq$

$x \in M$ mit dem Abstand von O klein wird. Präziser formuliert: $\operatorname{osc}_{B_x(1)}\varphi = O(e^{-a\rho(x)})$, wo ρ die Distanzfunktion vom festen Punkt O ist.

2. Man definiert die Mollifizierung von φ gegen einen Kern χ,

$$\bar{\varphi} = \frac{\int\limits_{M^m} \chi(\rho_x^2(y)) \cdot \varphi(y) dy}{\int\limits_{M^m} \chi(\rho_x^2(y)) dy}.$$

Mit Hilfe des ersten Schrittes zeigt man, dass für $\bar{\varphi}$ gilt, dass $|\Delta\bar{\varphi}| \leq C \cdot osc_{B_x(1)}\varphi = O(e^{-a\rho(x)})$. In diesem Schritt imitiert man also approximativ die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen. Man erhält ausserdem die Abschätzung $|\bar{\varphi}(x) - \varphi(x)| \leq C \cdot e^{-a\rho(x)}$

3. Definiert man nun $g(x) = e^{-\delta\rho(x)}$, so existiert für vorgegebenes kleines δ eine Konstante $\alpha > 0$, so dass $\Delta(\bar{\varphi} + \alpha g) \leq 0$ und $\Delta(\bar{\varphi} - \alpha g) \geq 0$. Dazu braucht man den zweiten Teil des Beweises.

4. Ein Perron-Verfahren garantiert jetzt die Existenz einer harmonischen Funktion u zwischen den Barrieren: es gilt $u \geq \bar{\varphi} - \alpha g$, weil die Barriere selbst eine Subfunktion ist. Es gilt ausserdem $u \leq \bar{\varphi} + \alpha g$, weil jede Subfunktion höchstens gleich der kleinsten Superfunktion ist, und die obere Barriere eine solche darstellt. Dann aber gilt nacheinander wegen der Definition der Barrieren und des zweiten Schrittes oben, dass

$$\begin{aligned} |u - \varphi|(x) \leq& |u - \bar{\varphi} + \bar{\varphi} - \varphi|(x) \\ \leq& \alpha g + |u - \bar{\varphi} + \bar{\varphi} - \varphi|(x) \\ \leq& C \cdot e^{-\delta\rho(x)} + C \cdot e^{-a\rho(x)}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Insbesondere folgt mit $\rho(x) \longrightarrow \infty$, dass die Perron-Lösung die Randbedingung erfüllt und somit eine Lösung des Dirichletproblems ist.

$\square$

Bemerkung: Es hindert nichts daran, den flachen Raum mit der Konstruktion einer analogen $S(\infty)$ zu kompaktifizieren, und auf ihm ein globales Perron-Verfahren laufen zu lassen. Weil bekannt ist, dass wegen des Theorems von Liouville das Dirichletproblem für allgemeine Randwerte auf dem $\mathbb{R}^n$ nicht lösbar ist, muss es also dort unmöglich sein, die entsprechenden Barrieren zu finden.

Tatsächlich ist die Konstruktion einer Barriere nach dem oben genutzten Rezept auf dem flachen Raum nicht möglich, weil eine positive globale untere Schranke für $\Delta\rho$ genutzt wird. Diese Schranke kann man durch Vergleich mit der Raumform konstanter Schnittrkümmung $-a^2$ finden. Im $\mathbb{R}^n$ gilt für den Abstand von einem Punkt y aus $\Delta\rho_y(x) = 2(n-2)/|x-y|$, was nicht ausreicht.

Man kann sogar ohne Verwendung des obigen Lösbarkeitssatzes die Existenz eines Poisson-Kerns zeigen.

Definition 2.18 *Eine harmonische Funktion $P_\xi(x)$ nennt man einen in $O \in M$ für $\xi \in S(\infty)$ normalisierten Poisson Kern, falls sie die folgenden Bedingungen erfüllt:*

$$1.\ P_\xi(x) > 0 \forall x \in M, \tag{2.33}$$

$$2.\ P_\xi(O) = 1 \text{ und} \tag{2.34}$$

$$3.\ P_\xi \in C^0(\overline{M} \backslash \xi), \text{ und } P_\xi | S(\infty) \backslash \xi = 0. \tag{2.35}$$

Proposition 2.19 *Es existiert zu jedem $\xi \in S(\infty)$ ein Poisson Kern wie in Definition 2.18 beschrieben.*

Beweis: siehe Schoen-Yau, [SY94], S. 43 ff.

□

Damit ist nicht nur die Lösbarkeit des Dirichletproblems gegeben, sondern sogar die Darstellung der Lösung jedes gestellten Randwertproblems durch eine standardisierte Lösungsformel, die auf einem kontinuierlichen Superpositionsprinzip beruht.

Das abschließende Theorem dieses Abschnittes dient gewissermaßen dazu, die Euphorie über die Existenz beschränkter harmonischer Funktionen auf Mannigfaltigkeiten mit negativen Schnittkrümmungen zu begrenzen. Man beachte, dass das Theorem ohne Bedingungen an Krümmungseigenschaften auskommt und der Beweis allein auf dem Divergenztheorem und der Hölderschen Ungleichung beruht.

Theorem 2.20 (S.T.Yau, [SY94] S.80) *Sei M eine vollständige und nichtkompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wenn dann $u \in L^p(M), p > 1$ eine positive (sub-)harmonische Funktion ist, so ist u bereits konstant.*

Beweis: Man definiert $\lambda > 0$ durch $p =: 1 + \lambda$ und zeichnet einen beliebigen Punkt in M als Mittelpunkt künftiger Kreise aus. Dann benutzt man für vorgegebenen Radius R eine Abschneidefunktion $\phi \in C_0^\infty(B(2R))$ mit $0 \leq \phi \leq 1$ und $|\nabla \phi| \leq C/R$ für eine Konstante C. Man berechnet mit dem Divergenztheorem auf der Kugel $B(2R)$ (i.e. alle Integrale gelten über diese Kugel)

$$\begin{aligned}\int \lambda u^{\lambda-1} \phi^2 \nabla_i u \nabla_i u dV = \int \phi^2 \nabla_i u \nabla_i u^\lambda dV = -\int u^\lambda \nabla_i \phi^2 \nabla_i u dV - \int u^\lambda \phi^2 \Delta u dV \\ \leq -\int u^\lambda \nabla_i \phi^2 \nabla_i u dV = -2 \int (\phi u^\alpha \nabla_i u)(u^\beta \nabla_i \phi) dV,\end{aligned}$$

wo α, β Konstanten sind, die $\alpha + \beta = \lambda$ und $2\beta = \lambda + 1$ erfüllen. Dabei ging im dritten Schritt die (Sub-)Harmonizität von u ein (sie wird ab jetzt nicht mehr benötigt). Nun geht man zu Beträgen über und wendet die Höldersche Ungleichung an:

$$\lambda \int u^{\lambda-1} \phi^2 |\nabla u|^2 dV \leq \left(\int \phi^2 u^{2\alpha} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} \left(\int u^{2\beta} |\nabla \phi|^2 \right)^{1/2}.$$

Das erste Integral der rechten Seite verschwindet oBdA nicht, sonst wähle man eine Kugel, auf der es dies nicht tut: Wenn das Integral auf allen solchen Kugeln verschwindet, so verschwindet auch der Integrand fast überall auf M. Da u stetig ist, ist u bereits konstant, also der Beweis beendet. Da $2\alpha = 2(\lambda - \beta) = 2\lambda - (1 + \lambda) = \lambda - 1$ ist, kann man jetzt durch das erste Integral der rechten Seite dividieren und dann die ganze Ungleichung quadrieren. Man erhält

$$\lambda \int u^{\lambda-1}\phi^2|\nabla u|^2 dV \leq 4 \int u^{2b}|\nabla\phi|^2 \leq \frac{4C^2}{R^2} \int\limits_{M^m} u^p dV,$$

wegen der Gradientenschranke an ϕ. Da M nicht kompakt ist, kann man nun $R \longrightarrow \infty$ laufen lassen und damit sehen, dass das Integral der linken Seite kleiner als jede positive Schranke ist. Da u strikt positiv angenommen wurde, muss dann $|\nabla u|^2$ fast überall verschwinden, also ist u im L^p-Sinne konstant.

□

Bemerkung: Nach einer Bemerkung in der Arbeit von Li und Schoen [LS84, Seite 279] ist insbesondere der Absolutbetrag von u eine nichtnegative subharmonische Funktion auf M (im schwachen Sinne, wo Δ als Operator in Divergenzform aufgefasst ist). Das Theorem besagt also auch, dass es auf allgemeinem vollständigem M, ohne Anforderungen an die Krümmung zu stellen, keine nichtkonstanten harmonischen Funktionen in den L^p Räumen gibt. Wenn das Volumen von M nicht endlich ist, so gibt es mithin überhaupt keine harmonischen Funktionen in L^p, die nicht konstant verschwinden. Wegen des Hopf-Maximumprinzips gilt, dass jede nichttriviale nichtnegative harmonische Funktion schon ganz M als Träger hat. Dass es auf Mannigfaltigkeiten mit unendlichem Maß in $L^p(M)$ keine solchen Funktionen gibt, bedeutet dann in einem Integralsinne, dass diese Funktionen von einem gewählten Ursprung O aus gesehen nicht genügend schnell nach 0 abfallen können für $\rho_O(x) \longrightarrow \infty$.

Angewandt auf die Situation der Generalvoraussetzung in diesem Abschnitt kann man das Theorem so interpretieren, dass M zwar wegen Theorem 2.17 nichtkonstante harmonische Funktionen toleriert, die in ihren Werten beschränkt bleiben, dass diese Funktionen dann aber auf einem Träger definiert sind, der "nicht nur unbeschränkt ist" sondern qualitativ mehr Platz bietet, als der flache Raum es könnte.

Aus einem anderen Blickwinkel kann man sagen, dass sich auf nichtkompakten Räumen mit unendlichem Volumen die Forderung $u \in L^p(M)$ für $1 < p < \infty$ in manchen Fällen (z.B. in der Situation der Generalvoraussetzung) als stärker erweist als die Forderung $u \in L^\infty(M)$. Dies ist auf Gebieten Ω mit beschränktem Maß wegen der auf der Hölderschen Ungleichung beruhenden Einbettung $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ nicht der Fall.

Es sei hier erwähnt, dass die Aussage des letzten Theorems für $p = 1$ nicht gilt. In der Arbeit von Li und Schoen [LS84] wird unter anderem ein Gegenbeispiel gezeigt, in dem eine Mannigfaltigkeit M mit unendlichem Volumen gegeben wird, auf der nichtnegative nichtkonstante harmonische Funktionen in $L^1(M)$ definiert sind. Das Gegenbeispiel beruht auf der konformen Deformation einer Metrik auf der Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^2$, auf der die Greensche Funktion des $\mathbb{R}^2$ mit Pol im Ursprung betrachtet wird ([LS84], Beschreibung auf S.281, Ausführung S.298 f.).

Kapitel 3

Die Wärmeleitungsgleichung

3.1 Technische Vorbereitungen und Maximumprinzipien

3.1.1 Einführung

Das zweite Kapitel dieser Arbeit beschäftigt sich mit den Eigenschaften von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Dazu beschränkt sich der Text immer wieder auf den kompakten Fall: einerseits sind die Hamiltonschen Harnack-Ungleichungen sämtlich auf kompakten Mannigfaltigkeiten bewiesen, andererseits erhält man dort ein Eindeutigkeitsresultat für Lösungen und eine überraschende konstruktive Möglichkeit einen Existenzbeweis für eine Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung zu finden. Nachdem diese Fundamentallösung auch (hier sogar zuerst) mit den Eigenwerten des Laplace-Operators in Verbindung gebracht worden ist, lassen sich hochinteressante Linien vom analytischen Verhalten der Wärmeleitungsgleichung zur Geometrie von M durch den Vergleich zweier dann zur Verfügung stehender Reihendarstellungen für die Fundamentallösung ziehen.

Nachdem klar ist, warum die Beschäftigung mit der Wärmeleitungsgleichung und ihren Lösungen im Rahmen dieser Arbeit interessant ist, beginnt die Vorbereitung des Hauptziels der Arbeit, der Harnack-Ungleichungen für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung. Dazu nötige Zitate finden sich am Schluss dieses Abschnitts im Unterabschnitt "Miscellanea. " Im zweiten großen Teil dieses Kapitels werden mehrere Formen eines starken parabolischen Maximumprinzips bewiesen, auf denen die Beweise des letzten großen Teils der Arbeit nahezu sämtlich beruhen. Am Anfang steht selbstverständlich die folgende Definition:

Definition 3.1 (Wärmeleitungsoperator auf M) *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und Δ der zu ihr gehörige Laplace-Beltrami-Operator. Sei weiter $I \subseteq (0,\infty)$ offenes Intervall. Dann definiert man auf dem Raum $[C^2(M) \times C^1(I)] \cap C^0(M \times \overline{I})$ den partiellen Differentialoperator*

$$L = (\Delta - \frac{\partial}{\partial t}) \tag{3.1}$$

L heisst der Wärmeleitungsoperator auf $M \times I$.

Im Folgenden nennen wir f eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf M, wenn wir meinen, dass f eine Lösung von $Lf = 0$ auf $M \times I, I \subseteq (0, \infty)$ ist, die sich stetig nach $t = 0$ fortsetzen lässt (der Fall einer Fundamentallösung wird gesondert erwähnt). Ist zusätzlich $f > 0$, so sprechen wir kurz von einer positiven Lösung. Berechnungen finden, wo nicht anders erwähnt, wie üblich im Ursprung lokaler Normalkoordinaten statt, insbesondere gilt an dem Punkt, an dem gerechnet wird, wieder $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Um später ein starkes Maximumprinzip für Lösungen beweisen zu können, folgt eine kurze Betrachgung der Gestalt des Wärmeleitungsoperators in Karten.

Definition 3.2 (gleichmäßig parabolischer Differentialoperator) *Mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ sei ein Gebiet gegeben. Sei auf dem Raum $[C^2(\mathbb{R}^n) \times C^1(I)] \cap C^0(\mathbb{R}^n \times \overline{I})$ der partielle Differentialoperator*

$$L \equiv a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + b_i \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial t} \tag{3.2}$$

gegeben. Dann heisst L parabolisch, wenn der Operator, der nur aus dem ersten Summenterm besteht, elliptisch ist, d.h., wenn die Koeffizientenmatrix $a_{ij}(x,t)$ positiv definit ist. L heisst gleichmäßig parabolisch, wenn

$$\exists \mu > 0 : \quad \forall (x,t) \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \ : \quad \Big(\ a_{ij}(x,t)\xi^i \xi^j \geq \mu |\xi|^2 \ \Big). \tag{3.3}$$

Mit Bezeichnungen wie in der Definition nennen wir $t \in I$ die Zeitvariable und $x \in M$ die Raumvariable. Ist x ein lokales Koordinatensystem um $p \in M$, so bezeichnen wir die Basisderivationen $\frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, .., n$ auch als partielle Ableitungen in Raumrichtungen. Weil der Laplace-Beltrami Operator einer Riemannschen Mannigfaltigkeit durch eine lokale Karte gelesen ein elliptischer Operator ist, ist L durch eine lokale Karte gelesen ein parabolischer Differentialoperator. (Siehe (2.3) auf Seite 9 dieser Arbeit).

Bemerkung: Es gibt einen Atlas, in dem durch jede Karte gelesen L sogar gleichmäßig parabolisch ist. Sei dazu x eine lokale Karte um $p \in M$, sagen wir $x : U \subseteq M \longrightarrow x(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Da x ein Diffeomorphismus ist, ist insbesondere x^{-1} stetig und deswegen $x(U)$ offene Umgebung von $x(p)$ im $\mathbb{R}^n$. Also existiert $\epsilon > 0$, so dass $B_{2\epsilon}(x(p)) \subseteq x(U)$, und daher auch $\overline{B_\epsilon}(x(p)) \subseteq x(U)$. Bezeichnet man $x^{-1}[B_\epsilon(x(p))] =: V$, so erhält man durch Einschränkung von x auf $\overline{V}$ eine stetige Abbildung zwischen abgeschlossenen Mengen. Da die betrachtete Riemannsche Metrik keiner Evolutionsgleichung unterliegt, ist auf dieser Einschränkung die Funktion $\lambda_{min}(a_{ij})_{ij}(x(q),t) = \lambda_{min}(g^{ij})_{ij}(x(q),t) = \lambda_{min}(g^{ij})_{ij}(x(q))$ stetig und nimmt ihr Minimum μ an. Natürlich ist $\mu > 0$, sonst wäre die Metrik an einem Punkt von minderem Rang. Offensichtlich gilt dann auf der weiter eingeschränkten Karte $x(V)$ die obige Bedingung für gleichmäßige Parabolizität mit diesem μ.

Bemerkung: Um in den Betrachtungen zur Wärmeleitungsgleichung die partiellen Ableitungen nach der Zeit und nach den Raumvariablen bedenkenlos vertauschen zu können, soll noch bemerkt sein, dass wegen der Tatsache, dass die Metrik g von M keinem Fluss unterliegt, die Variable t wie ein Parameter behandelt werden kann. Insbesondere ist unter dieser Interpretation die Ableitung in Zeitrichtung keine kovariante, sondern eine partielle. Ein rigider Beweis dieser Tatsache betrachtet die Produktmannigfaltigkeit $(M \times (0,T), \tilde{g})$ und stellt fest, dass für $i, j = 1, .., n$ gilt $\tilde{g}_{ij} = g_{ij}$ und für

$k = 1, .., n+1$, $\tilde{g}_{(n+1),k} = \tilde{g}_{(n+1),k} = \delta_{k(n+1)}$. Insbesondere verschwinden alle Ableitungen der Metrik in Zeitrichtung, weswegen alle Christoffelsymbole der Produktmetrik, die mindestens einen Index in Zeitrichtung tragen, identisch verschwinden. Ebenso verschwinden auch die Zeitableitungen aller Christoffelsymbole der Metrik, weswegen der Operator $\frac{\partial}{\partial t}$ frei mit den ∇_i jeder Ordnung kommutiert.

Definition 3.3 (Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung) *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung (Wärmeleitungskern, heat kernel) auf M ist eine stetige Funktion $p = p(x, y, t) : M \times M \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, die zweimal stetig differenzierbar in x und einmal stetig differenzierbar in t ist, und für die gilt, dass*

$$\Delta_x p - \frac{\partial}{\partial t} p = 0, \quad \textit{und} \quad \lim_{t \searrow 0} p(\cdot, y, t) = \delta_y, \tag{3.4}$$

wo δ_y die Dirac'sche Deltadistribution ist. (Siehe Chavel, [Cha84, Seite 135])

Bemerkung: Wir nehmen ab diesem Punkt der Arbeit die Existenz einer glatten Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung auf vollständigen Mannigfaltigkeiten an. Für kompaktes M wird die Existenz im Abschnitt über die Asymptotik des Wärmeleitungskerns sogar konstruktiv bewiesen werden und ein Existenzresultat für vollständiges M zitiert.

Exkurs: Kompakte Mannigfaltigkeiten

Auf kompakten Mannigfaltigkeiten kann man das Divergenztheorem benutzen um die Eindeutigkeit von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung zu erhalten.

Proposition 3.4 (Eindeutigkeitssatz) *Sei $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion. Dann gibt es höchstens eine Funktion $u : M \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, die stetig differenzierbar ist und*

$$\Delta u - \frac{\partial}{\partial t} u = 0 \quad \textit{auf} \quad M \times (0, \infty) \quad \textit{sowie} \quad u(\cdot, 0) = f \tag{AWP}$$

erfüllt.

Beweis: Angenommen u erfüllt die Wärmeleitungsgleichung. Dann darf $\frac{\partial}{\partial t}$ mit der Integration vertauscht werden, und es gilt mit dem Divergenztheorem, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M u^2 = 2 \int_M u \Delta u = 2 \int_M \operatorname{div}(u \nabla u) - |\nabla u|^2 = \int_{\partial M} u \frac{\partial}{\partial \nu} u - 2 \int_M |\nabla u|^2 \leq 0.$$

Weil das erste Integral über die leere Menge integriert. D.h. der Wert des Integrals fällt monoton mit wachsendem t. Sei nun v, w Lösungen des obigen Anfangswertproblems. Dann erfüllt $u = v - w$ die Wärmeleitungsgleichung bei identisch verschwindenden Anfangswerten. Bei $t = 0$ verschwindet also das eben betrachtete Integral. Zugleich ist es aber sowohl monoton fallend in t (wie gerade gesehen) und nichtnegativ (da der Integrand nichtnegativ ist). Also verschwindet es für alle Zeiten t. Damit ist $v = u$ f.ü. mit Dubois-Raymond, und wegen ihrer Stetigkeit sind die Lösungen überall identisch.

□

Insbesondere ist die Fundamentallösung $p(x,y,t) = p_y(x,t)$ für alle $y \in M$ eindeutig, und man erhält zu gegebenen Anfangswerten f zu dem Problem (AWP) die eindeutig bestimmte Lösung

$$u(x,t) = \int\limits_M p(x,y,t) f(y) dVol(y).$$

Bemerkung: Der Eindeutigkeitsnachweis funktioniert offenbar mit demselben Argument auch auf Gebieten $\Omega \subset\subset M$ mit C^2-Rand (M vollständig und evtl. nichtkompakt), falls man homogene Neumann- oder Dirichlet Randbedingungen vorschreibt.

Man kann die rechte Seite der Lösungsformel benutzen, um für festes $t > 0$ einen Integraloperator $\mathfrak{P}_t$ auf den Funktionen $f \in C^0(M, \mathbb{R})$ zu definieren durch

$$(\mathfrak{P}_t f)(x) := \int\limits_M p(x,y,t) f(y) dVol(y)$$

Wählt man $t_1, t > 0$, so ist wegen des Prinzips von Duhamel (z.B. Chavel, [Cha84, Seite 137]), dass

$$0 = \int_M p(z,x,t_1+t-\beta)p(x,y,\beta) - p(z,x,t_1+t-\alpha)p(x,y,\alpha) dV(x)$$

für beliebige $[\alpha, \beta] \subset (t, t+t_1)$. Mit $\alpha \downarrow t$ und $\beta \uparrow t + t_1$ sieht man nun, dass

$$0 = p(z,y,t_1+t) - \int_M p(z,x,t_1)p(x,y,t) dV(x).$$

Diese Eigenschaft ist in der Operatorenschreibweise äquivalent dazu, dass der Operator $\mathfrak{P}_t$ die Eigenschaft $\mathfrak{P}_t \mathfrak{P}_{t_1} = \mathfrak{P}_{t+t_1}$ (Halbgruppeneigenschaft) hat. Mit $p(x,y,t) = p(y,x,t)$ gilt dann bezüglich des bekannten L^2-Skalarprodukts

$$(f, \mathfrak{P}_t g)_{L^2} = \int\limits_M \int\limits_M f(x) p(x,y,t) g(y) dx dy = (\mathfrak{P}_t f, g)_{L^2} \quad \text{und}$$

$$(f, \mathfrak{P}_t f)_{L^2} = \int\limits_M \Big(\int\limits_M f(x) p(x,z,t/2) dx \Big) \Big(\int\limits_M f(y) p(y,z,t/2) dy \Big) dz = \|\mathfrak{P}_{t/2} f\|_2^2.$$

Im letzten Schritt ist die Anwendbarkeit von Fubini wegen der Stetigkeit der Integranden und des endlichen Maßes von M gegeben. Der Operator $\mathfrak{P}_t$ ist also nichtnegativ und selbstadjungiert. Man kann ebenso zeigen, dass $\mathfrak{P}_t$ ein kompakter Operator ist. Es gilt daher (siehe Chavel, [Cha84, Seite 140]) die folgende operatorentheoretische Aussage:

Für beliebiges aber festes $t > 0$ besitzt der selbstadjungierte und kompakte Operator $\mathfrak{P}_t$ Eigenwerte

$$\lambda_0(t) \geq \lambda_1(t) \geq \lambda_2(t) \geq \ldots \searrow 0$$

mit zugehörigen Eigenfunktionen

$$\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \ldots,$$

die eine Orthonormalbasis des L^2 bilden. Wegen der Halbgruppeneigenschaft (3.24) haben die Eigenwerte der Operatorenfamilie $(\mathfrak{P}_t)_{t>0}$ einen einfachen Zusammenhang. Zuerst gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$\mathfrak{P}_{kt}(\phi_j(t)) = (\mathfrak{P}_{(k-1)t}\mathfrak{P}_t)(\phi_j(t)) = \mathfrak{P}_{(k-1)t}(\phi_j(t)) \cdot \lambda_j(t)\phi_j(t) = \ldots = \big(\lambda_j(t)\big)^k \phi_j(t).$$

Man vermutet also, dass für alle $k \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda_j(kt) = \big(\lambda_j(t)\big)^k \quad \text{und} \quad \phi_j(kt) = \phi_j(t).$$

Wählt man $k = (a/b) \in \mathbb{Q}$, so ist tatsächlich $(\lambda(kt))^b = \lambda(bkt) = (\lambda(t))^{bk}$ und die Gleichheit folgt durch Potenzieren mit $1/b$. Weil $\mathfrak{P}_t$ stetig in t und $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, folgt dann die Richtigkeit der Vermutung für beliebige Zahlen k. Insbesondere reicht nun die Kenntnis der Eigenwerte und Eigenfunktionen von $\mathfrak{P}_t$ zum Zeitpunkt $t = 1$ aus, um das Spektrum von $\mathfrak{P}_t$ zu allen Zeiten vollständig zu verstehen, weil

$$\forall t > 0: \quad \lambda_j(t) = \big(\lambda_j(1)\big)^t = e^{t(\log \lambda_j(1))} \quad \text{und} \quad \phi_j(t) = \phi_j(1).$$

Da per definitionem $\mathfrak{P}_t f$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf M ist, folgt mit dem Divergenzargument aus dem Eindeutigkeitssatz, dass $\|\mathfrak{P}_t f\|_2$ monoton fallend in t ist. Insbesondere folgt, dass $\|\mathfrak{P}_t \phi_j(t)\|_2 = \|\lambda_j(t)\phi_j(1)\|_2 = e^{t(\log \lambda_j(1))}\|\phi_j(1)\|_2$ monoton fallend in t ist, was nur sein kann, wenn der Exponent der e-Funktion negativ ist. Also hat man bewiesen, dass für alle j, $\log \lambda_j(1) \leq 0$. Definiert man nun

$$\lambda_j :\equiv -\log \lambda_j(1) \quad \text{und} \quad \phi_j :\equiv \phi_j(1),$$

so folgt, dass $\forall j = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\mathfrak{P}_t \phi_j = e^{-t\lambda_j} \phi_j.$$

Wegen der Integraldefinition von $\mathfrak{P}_t$ sieht man an dieser Gleichung zunächst, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ die Funktion ϕ_j die Regularitätseigenschaften (werden sehen: C^∞) der Fundamentallösung erbt: Differentiation von ϕ_j in Raumrichtungen (hier: x) darf unter dem Integral (hier: dy) ausgeführt werden, und betrifft dort nur den Wärmeleitungskern. Andererseits findet man aber nun, und darin steckt die entscheidende Einsicht dieses Abschnitts, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \Big(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\Big)(\mathfrak{P}_t \phi_j) = e^{-t\lambda_j}\Delta\phi_j - \phi_j \frac{\partial}{\partial t} e^{-t\lambda_j} \\ &= e^{-t\lambda_j}\big(\Delta\phi_j - \lambda_j \phi_j\big), \end{aligned} \tag{3.5}$$

was bedeutet, dass ϕ_j eine Eigenfunktion des *Laplace-Beltrami Operators* Δ auf M zu *dessen* Eigenwert λ_j ist. Da $\lambda_j(1)$ monoton fallend in j ist, sind die λ_j monoton wachsend in j, und da die $\lambda_j(1)$ bei 0 einen Häufungspunkt haben, gilt $\lambda_j \nearrow +\infty$ mit $j \longrightarrow \infty$.

Man kann dann zeigen (dieses Ergebnis ist nicht trivial, siehe Chavel, [Cha84, Seite 141 oben] oder mit ausgeführter Rechnung bei Berger-Gauduchon-Mazet [BGM71, Prop. E.II.1]), dass

$$p(x, y, t) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \phi_j(x) \phi_j(y), \tag{3.6}$$

wobei die Reihe für alle $t > 0$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Insbesondere gilt, weil die ϕ_j als ONB L^2-orthonormal sind, dass

$$\int_M p(x,x,t)dV(x) = \int_M \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t}\phi_j^2(x)dV(x) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \cdot 1. \tag{3.7}$$

Dabei sind Summe und Integral vom der zweiten zur dritten Zeile wegen des Satzes von Beppo Levi (Monotone Konvergenz) vertauschbar.

Einen ebenso interessanten, wenn auch ganz anderen, Zusammenhang zwischen der Wärmeleitungsgleichung und der Laplacegleichung stellt das folgende Theorem dar. Es ist sofort klar, dass eine Temperaturverteilung f, die sich im Gleichgewicht befindet, harmonisch ist. Dies gilt einfach, weil in diesem Falle wegen $\frac{\partial}{\partial t}f = 0$ die Wärmeleitungsgleichung zum Spezialfall $\Delta f = 0$ degeneriert. Das folgende Theorem präzisiert die Annäherung einer Temperaturverteilung f an diesen Zustand für $t \longrightarrow \infty$ unter allgemeinen Krümmungsbedingungen.

Theorem 3.5 *Sei $f \in L^2(M)$. Dann konvergiert die Funktion $\mathfrak{P}_t f$ für $t \longrightarrow +\infty$ gleichmäßig zu einer harmonischen Funktion auf M. Da M kompakt ist, ist die Grenzfunktion konstant.*

Beweis: Siehe z.B. Chavel, [Cha84, Seite 141]

□

3.1.2 Die Asymptotik des Wärmeleitungskerns

Es ist eine der eher verwunderlichen Tatsachen Riemannscher Geometrie, dass sich für die Wärmeleitungsgleichung $Lu = 0$ auf einer gegebenen Riemannschen Mannigfaltigkeit M nicht nur die Existenz einer Fundamentallösung zeigen lässt, sondern dieser Beweis zusätzlich konstruktiv geführt werden kann. Bei der Konstruktion handelt es sich in einem noch zu erläuternden Sinn um eine Reihenentwicklung mit Hilfe der Konvolution von Parametrizen für die Wärmeleitungsgleichung. Die Konstruktion dieser Parametrizen beruht ihrerseits auf einer endlichen Summendarstellung mit gewissen Koeffizientenfunktionen, die rekursiv definiert werden können. Historisch gesehen stammt die Rekursion für die eben genannten Koeffizienten von Minakshisundaram und Pleijel, die diese 1949 in ihrer Arbeit [MP49] veröffentlichten. Minakshisundaram wandte die nun bekannte Rekursionsformel 1953 in [Min53] erstmals auf die Konstruktion einer Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung an. Die entsprechende Konstruktion soll hier für kompakte Mannigfaltigkeiten gerade so kurz nachvollzogen werden, dass die Mathematik hinter den Behauptungen sichtbar bleibt. Die Darstellung der entsprechenden Theorie orientiert sich im Wesentlichen an der von Chavel in Kapitel VI seines Buches [Cha84]. Lemmata, die sich bei Chavel oder Gauduchon-Berger-Mazet bewiesen finden, werden hier nur zitiert. Die Darstellung tendiert dazu, nur an Stellen, an denen Chavel stark abkürzt, etwas ausführlicher zu werden. Interessant im Zusammenhang dieser Arbeit ist im Sinne des Titels vor allem die Tatsache, dass die ersten Koeffizienten der Rekursion in einem direkten und (s.u.) überraschenden Zusammenhang zu Krümmungsgrößen der Mannigfaltigkeit stehen.

Wie Chavel beschränkt sich auch diese Arbeit im folgenden Abschnitt generell auf vollständige Mannigfaltigkeiten mit strikt positivem Injektivitätsradius $inj(M) \geq \epsilon > 0$.

Es ist bekannt und leicht direkt nachprüfbar, dass für $(x, y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ die Funktion

$$\mathbf{e}(x, y, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x-y|^2/4t} \tag{3.8}$$

eine Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$ darstellt. Insbesondere erhält man mit $\mathbf{e}$ eine Lösungsformel für das homogene Wärmeleitungsproblem mit Anfangswerten $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n): \quad \forall \alpha > 0: \quad f(x) = o(e^{\alpha|x|^2})$ durch

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{e}(x, y, t) f(y) dV(y)$$

d.h. das Integral konvergiert auf allen kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ für alle Zeiten $t < 0$ gleichmäßig und absolut und die entstehende Lösung u ist glatt, bei stetiger Annahme der Anfangswerte überall dort, wo eben diese selbst stetig sind. Ebenso ergibt sich eine Lösungsformel für den inhomogenen Fall. Die Funktion $\mathbf{e}$ ist hier nicht zuletzt deswegen erwähnenswert, weil sich herausstellen wird, dass die entscheidenden Harnack-Ungleichungen und ihre Vorformen von Li und Yau (siehe Theorem 3.36 auf Seite 66) und von Hamilton (Theorem 3.47 bzw. sein Korollar auf Seite 91) auf $\mathbf{e}$ scharf sind (siehe Rechnung auf Seite 91). Wichtiger aber ist der folgende Zusammenhang.

Man setzt für eine beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeit M der Dimension n mit Distanzfunktion $d(\cdot, \cdot)$

$$\mathcal{E}(x, y, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-d^2(x,y)/4t}. \tag{3.9}$$

Chavel schreibt, wie es passender kaum möglich wäre, "while there can be no pretense that $\mathcal{E}$, in general, will be the fundamental solution to the heat equation on M, it turns out that one can produce a fundamental solution by suitably tampering with $\mathcal{E}$. The first step is given in the following construction." [Cha84, Seite 148]

Für $y \in M$ definiert man die Funktionenfolge

$$u_j(\cdot, y): \quad B_y(inj(M)) \longrightarrow \mathbb{R},$$

indem man fordert, dass

$$u_0(y, y) = 1 \tag{3.10}$$

(die Forderung $u_0(y, y) = 0$ bei Chavel ist ein Druckfehler (siehe [BGM71, S.207 /208], wo Berger-Gauduchon-Mazet die Bedingungen an die u_j ausführlich und heuristisch sehr gut motiviert herleiten), und dass die Funktionen

$$\mathsf{H}_k(x, y, t) = \mathcal{E}(x, y, t) \sum_{j=0}^{k} t^j u_j(x, y), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.11}$$

den Bedingungen

$$L_x \mathsf{H}_k = \mathcal{E} t^k \Delta_x u_k \tag{3.12}$$

genügen. Dabei bezeichnet L den Wärmeleitungsoperator und tiefgestellte Variablennamen an Differentialoperatoren bedeuten Differentiation nach der so bezeichneten Variablen (hier x). Es stellt sich a posteriori heraus, dass die Funktionen u_j wohldefiniert (wenn auch nicht ohne Weiteres eindeutig) sind, da sich aus den Bedingungen (3.10) – (3.12) nach Einführung geodätischer Polarkoordinaten um $y \in M$ eine Rekursionsformel ergibt (s.u. (3.14)).

Bemerkung: Die Einführung geodätischer Polarkoordinaten ist aus folgenden Gründen naheliegend: Erstens ist der Definitionsbereich der Funktion u_j gerade das Gebiet, in dem die Exponentialfunktion mit Ursprung in y glatt ist. Zweitens ist die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung auf dem flachen Raum T_yM rotationssymmetrisch, und man erwartet, dass auch die gesuchte Fundamentallösung auf M geodätisch rotationssymmetrisch ist. Es ist daher plausibel, dasselbe von den zur Konstruktion verwendeten Hilfsfunktionen zu erwarten. Drittens bleibt die aus dem $\mathbb{R}^n$ wohlbekannte Eigenschaft rotationssymmetrischer Lösungen, dass alle partiellen Ableitungen in Richtung der Winkelkoordinaten verschwinden, wegen des Gauss-Lemmas auch auf M erhalten, und man kann auf eine bequemere Form der o.g. Bedingungen hoffen. So verschwinden z.B. in (3.12) nach Einführung der Polarkoordinaten alle Ableitungen von $\mathcal{E}$, die nicht in Radialrichtung differenzieren.

Seien also für $x \in B_y(inj(M))$, $r \in [0, inj(M))$ und $\xi \in \mathsf{S}_y(1)$ definiert via $x = \exp_y r\xi$. Bezeichne weiterhin $\sqrt{\mathbf{g}}$ die auch bei Chavel [Cha95, Seiten 111-113] ausführlich besprochene Volumendichte für geodätische Polarkoordinaten um y. Sei ausserdem

$$\phi(x,y) := \sqrt{\mathbf{g}}(r,\xi)/r^{n-1} \tag{3.13}$$

(ϕ ist die Volumendichte in Riemannschen Normalkoordinaten, siehe auch [Cha95, "Ubg. 3.5]). Explizite Rechnung von wenigen Seiten zeigt dann, dass (3.12) äquivalent ist zu den Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{\partial_r u_0}{u_0} = -\frac{\partial_r \phi}{2\phi}$$

und

$$\partial_r u_j + \Big(\frac{1}{2}\frac{\partial_r \phi}{\phi} + \frac{j}{r}\Big) = \frac{\Delta u_{j-1}}{r}$$

(Der Index j statt $j-1$ auf der rechten Seite der Gleichung bei Chavel [Cha84, S. 149] ist ein Druckfehler, wie sich beim Nachrechnen herausstellt). Man rechnet sofort nach, dass

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= \phi^{-1/2}(x,y) \\ u_j(x,y) &= \phi^{-1/2}(x,y) r^{-j} \int_0^r s^{j-1}\big(\phi^{1/2}\Delta u_{j-1}\big)(\exp_y s\xi, y)ds \\ &= \phi^{-1/2}(x,y) \int_0^1 \tau^{j-1}\big(\phi^{1/2}\Delta u_{j-1}\big)(\exp_y \tau r\xi, y)ds \end{aligned} \tag{3.14}$$

für $j = 1, 2, \ldots$ das obige System von Differentialgleichungen erfüllt. (Wiederum beim Nachrechnen stellt sich heraus, dass der bei Chavel [Cha84, S. 150] gegebene Exponent $-1/2$ statt $1/2$ für ϕ unter dem Integralzeichen ein Druckfehler ist). Wegen des

Definitionsbereichs der u_j sieht man an der letzten Formel direkt, dass

$$\forall j \geq 0: \quad u_j \in C^\infty(B_M), \quad \text{wo} \quad B_M :\equiv \{(x,y) \in M \times M : d(x,y) < inj(M)\}.$$

Auf die Besonderheiten der ersten Koeffizientenfunktionen u_j wird im nächsten Unterabschnitt (siehe Seite 44) eingegangen werden, wo die Konstruktion der Fundamentallösung bereits abgeschlossen ist.

Als nächstes konstruiert man mit Hilfe der Funktionen H_k eine Fundamentallösung. Dazu benötigt man die folgenden Definitionen und Lemmata. Sie an dieser Stelle einzuschieben stört zwar den Gedankenfluss der Konstruktion, sie stören aber an jeder anderen Stelle genauso sehr.

Definition 3.6 (Parametrix für L auf M) *Es sei M Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Parametrix für den Wärmeleitungsoperator L auf M ist eine Abbildung $H : M \times M \times (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $H \in C^\infty$, so dass sich $L_x H$ stetig mit Werten in $\mathbb{R}$ auf $M \times M \times [0,\infty)$ fortsetzen lässt, wobei $H(x,y,t)$ mit $t \longrightarrow 0$ in beiden Raumvariablen zu einer Dirac'schen Delta-Distribution (d.h. zu δ_x bzw. δ_y) konvergiert.*

Im Folgenden sei M stets kompakt mit strikt positivem Injektivitätsradius $inj(M)$.

Definition 3.7 (Konvolution) *Seien $F, G \in C^0(M \times M \times [0,\infty))$. Dann definiert man die Konvolution $F * G$ durch*

$$(F * G)(x,y,t) = \int_0^t d\tau \int_M F(x,z,\tau) G(z,y,t-\tau) dV(z)$$

Bemerkung: Die Konvolution genügt wegen der Linearität des Integrals offensichtlich einem Distributivgesetz der Form $F * (G + E) = F * G + F * E$. Sie ist ferner assoziativ, so dass statt $F * F * \ldots * F$ (l-mal) abkürzend $(F)^{*l}$ geschrieben werden kann.

Um eine Parametrix für L auf M zu konstruieren, definiert man sich eine glatte Funktion $\rho : [0,\infty) \longrightarrow [0,1]$, die auf $[0,\epsilon/4]$ konstant 1 ist und auf $[\epsilon/2,\infty)$ verschwindet, wo $\epsilon > 0$ untere Abschätzung für den Injektivitätsradius von M ist. Dann setzt man

$$H_k := \eta \mathsf{H}_k, \quad \text{wo} \quad \eta(x,y) = \rho(d(x,y)) \in C^\infty.$$

Man kann zunächst zeigen:

Lemma 3.8 *Für jedes $k > n/2$ ist das soeben definierte H_k eine Parametrix für L auf M. Genauerhin gilt in der üblichen Mulitindexnotation (Multiindex α) für partielle Ableitungen ∂_x^i in der ersten Raumvariablen durch eine lokale Karte x auf M, dass*

$$\partial_x^\alpha (L_x H_k) = t^{k-(n/2+|\alpha|)} e^{d^2/4t} \cdot F_{k,\alpha}, \tag{3.15}$$

wo $F_{k,\alpha} \in C^\infty(M \times M \times [0,\infty))$. Bezeichnet ∂_t^l die l-te partielle Ableitung in Zeitrichtung, so gilt

$$\partial_t^l (L_x H_k) = t^{k-(n/2+2l)} e^{d^2/4t} \cdot G_{k,l}, \tag{3.16}$$

wo $G_{k,l} \in C^\infty(M \times M \times [0,\infty))$.

Wenn ferner N beliebiger topologischer Raum und f stetige Funktion auf $N \times M$ ist, so erhält man für $k > n/2$

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_M f(z,x) H_k(x,y,t) dV(x) = f(z,y) \text{ bzw. } \lim_{t \downarrow 0} \int_M H_k(x,y,t) f(z,y) dV(y) = f(z,x),$$

und die Limiten sind $(N \times M)$-lokal-gleichmäßig. Insbesondere sind beide Limiten gleichmäßig, falls N und M kompakt sind.

Beweis: Siehe z.B. Berger, Gauduchon, Mazet [BGM71, Seiten 210-211]

□

Obwohl die Parametrizen H_k, $k > n/2$ nicht beschränkt und stetig nach $t = 0$ fortgesetzt werden können (sonst ergäbe sich ein Widerspruch zur Dirac-Eigenschaft), kann man zeigen, dass die Konvolution $H_k * F$ für Funktionen $F \in C^1(M \times M \times [0, \infty))$ sich formal wie in Definition 3.7 bilden lässt. Für $k > n/2 + 2$ ist dann $L_x(H_k * F)$ definiert und es gilt

$$L_x(H_k * F) = -F + (L_x H_k) * F. \tag{3.17}$$

(Diese Behauptungen finden sich bei Berger, Gauduchon, Mazet bewiesen [BGM71, Lemma E.III.7, S.213]. Die Autoren brauchen lediglich $F \in C^0$. Mit $F \in C^1$ ist die Differenzierbarkeit der Konvolution nach t aber sofort einsichtig, und dasjenige F, an dem man Interesse hat, ist nachher a priori einmal stetig total differenzierbar (auf kompaktem M a posteriori sogar glatt).)

Die letzte Idee der Konstruktion liegt nun darin, nach einer Fundamentallösung der Form

$$p = H_k + H_k * F \tag{3.18}$$

zu suchen. Die Aufgabe, ein $p = p(x,y,t)$ zu finden, so dass $L_x p = 0$ ist, ist dann wegen der letzten beiden Gleichungen (3.17) und (3.18) wie folgt umformbar:

$$\begin{aligned} 0 = L_x p =& L_x H_k + L_x(H_k * F) \\ =& L_x H_k - F + (L_x H_k) * F \end{aligned}$$

was genau dann der Fall ist, wenn

$$L_x H_k = F - (L_x H_k) * F$$

Diese Bedingung würde z.B. von

$$F = \sum_{l=1}^{\infty} (L_x H_k)^{*l} \tag{3.19}$$

erfüllt, womit die Konstruktion im Wesentlichen abgeschlossen wäre, wenn die Konvergenzfrage der Reihe schon geklärt wäre. Zu diesem Zweck beobachtet man, dass $L_x H_k$ der Form

$$L_x H_k = t^{k-n/2} e^{-d^2/4t} \mathcal{G}_k \tag{3.20}$$

genügt, wo $\mathcal{G}_k \in C^\infty(M \times M \times [0,\infty))$. Fixiert man nun $k > n/2$, so existiert daher insbesondere für beliebiges $T > 0$

$$A := \sup_{M\times M\times[0,T]} |\mathcal{G}_k|, \qquad B := A \cdot T^{k-n/2}.$$

Nun kann man für beliebiges $t \in [0,T]$ abschätzen, dass

$$\begin{aligned}
&|L_x H_k * L_x H_k|(x,y,t) = \\
&= \Big| \int_0^t \tau^{k-n/2}(t-\tau)^{k-n/2} d\tau \int_M \mathcal{G}_k(x,z,\tau)\mathcal{G}_k(z,y,t-\tau) \cdot e^{-\frac{d^2(x,z)}{4\tau}} e^{-\frac{d^2(z,y)}{4(t-\tau)}} dV(z) \Big| \\
&\qquad \le T^{k-n/2} \int_0^t \tau^{k-n/2} d\tau \int_M A \cdot A \cdot e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}} dV(z) \\
&\qquad\qquad = \frac{AB \cdot Vol(M) \cdot t^{k+1-n/2}}{k+1-n/2} e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}}.
\end{aligned}$$

Dabei wurde im Schritt von der zweiten zur dritten Zeile die Abschätzung aus Lemma 3.32 von Seite 64 genutzt. Man interpretiert obige Abschätzung als Induktionsanfang, setzt als Induktionsvoraussetzung

$$|(L_x H_k)^{*l}| \le \frac{A(B \cdot Vol(M))^{l-1} \cdot t^{k+l-1-n/2}}{(k+l-1-n/2) \cdot \ldots \cdot (k+1-n/2)} e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}} =: \alpha e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}} t^{k+l-1-n/2} \tag{3.21}$$

und sieht, dass mit demselben Lemma wie für den Induktionsanfang gilt,

$$\begin{aligned}
&|(L_x H_k)^{*(l+1)}| = |(L_x H_k)^{*l} * L_x H_k| \\
&\quad = \Big| \int_0^t (t-\tau)^{k-n/2} d\tau \int_M e^{-\frac{d^2(x,z)}{4(t-\tau)}} \mathcal{G}_k(z,y,t-\tau) \cdot (L_x H_k)^{*l}(x,z,\tau) dV(z) \\
&\qquad \le A T^{k-n/2} \int_0^t \int_M e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}} \alpha \tau^{k+l-1-n/2} d\tau dV(z) \\
&\qquad = B e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}} \alpha Vol(M) \int_0^t \tau^{k+l-1-n/2} d\tau \\
&\quad = B e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}} \frac{A(B \cdot Vol(M))^{l-1}}{(k+l-1-n/2) \cdot \ldots \cdot (k+1-n/2)} Vol(M) \frac{t^{k+l-n/2}}{k+l-n/2} \\
&\qquad\qquad = \frac{A(B \cdot Vol(M))^l \cdot t^{k+l-n/2}}{(k+l-n/2) \cdot \ldots \cdot (k+1-n/2)} e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}},
\end{aligned}$$

womit induktiv eine obere Abschätzung für $|(L_x H_k)^{*l}|$ für beliebiges $l \ge 2$ gezeigt ist.

Aus dieser aber folgt wegen (3.19) und (3.20), dass

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{d^2(x,y)}{4t}} \cdot F = e^{\frac{d^2(x,y)}{4t}} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} (L_x H_k)^{*l} \\
= e^{\frac{d^2(x,y)}{4t}} L_x H_k + A(k - \frac{n}{2})! \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(B \cdot Vol(M))^l t^{k+l-n/2}}{(k+l-n/2)!} \\
= t^{k-n/2} \mathcal{G}_k + A(B \cdot Vol(M))^{(n/2)-k} (k - \frac{n}{2})! \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(B \cdot Vol(M) \cdot t)^{k+l-n/2}}{(k+l-n/2)!}
\end{aligned}
$$

Man sieht jetzt sofort, dass die verbleibende Reihe formal das Ende einer Exponentialreihe ist und daher auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig und absolut konvergiert. Demzufolge konvergiert also auch für beliebige $T > 0$ die Reihe $e^{\frac{d^2(x,y)}{4t}} \cdot F$ auf ganz $M \times M \times [0, T]$ gleichmäßig und absolut. Da ausserdem $k > n/2$ gewählt war, ist an der letzten Zeile ebenso sichtbar, dass

$$
\lim_{t \downarrow 0} F = 0 \qquad \text{gleichmäßig auf } \; M \times M.
$$

Ersetzt man nun die Formüberlegung aus (3.20) durch die Abschätzungen (3.15) bzw. (3.16) aus Lemma 3.8 von Seite 40, so erhält man ganz analog, dass für hinreichend großes k die Reihen der ersten und zweiten partiellen Ableitungen in Raumrichtungen sowie die der ersten Ableitungen in t ebenso gleichmäßig und absolut konvergieren. Es gilt daher präziser: für beliebiges $k > 2l + n/2$ ist $F \in C^l(M \times M \times [0, \infty))$, C^{2l} in den Raumvariablen, und die Differentiation der Reihe darf summandenweise ausgeführt werden.

Setzt man jetzt $p = H_k + H_k * F$, wo $k > n/2 + 2$, so ist erstens $F \in C^1$, daher nach (3.17) und dem davor Gesagten $H_k * F$ C^2 in den Raum- und C^1 in der Zeitvariablen. Da H_k als Parametrix sogar glatt ist, ist also p so regulär wie $H_k * F$. Zweitens ist wie bereits gesehen $L_x p = 0$. Um zu beweisen, dass p eine Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung auf M ist, muss also nur noch die Dirac-Eigenschaft gezeigt werden. Man hat für $f \in C^0(M)$

$$
\lim_{t \downarrow 0} \int_M p(x,z,t) f(z) dz = \lim_{t \downarrow 0} \Big(\int_M H_k(x,z,t) f(z) dz + \int_M (H_k * F)(x,z,t) f(z) dz \Big).
$$

Da H_k Parametrix ist (siehe Lemma 3.8 von Seite 40) existiert der Limes über das erste Integral und ist gleich $f(x)$. Der Beweis ist also abgeschlossen, wenn der Limes über das zweite Integral existiert und verschwindet. Dazu wählt man oBdA $t < 1$ und sieht mit (3.21), dass

$$
|F|(w,z,t) \leq t^{k-n/2} \Big(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{A(BVol(M))^{l-1}}{\dots} e^{-\frac{d^2(w,z)}{4}} \Big) =: t^{k-n/2} \tilde{F}(w,z),
$$

wo $\tilde{F}(w,z)$ nicht mehr von t abhängt und in den Raumvariablen so regulär ist wie F. Somit ist

$$\int_M (H_k * F)(x,z,t)f(z)dz = \int_M dz \int_0^t d\tau \Big(\int_M H_k(x,w,t)F(w,z,t-\tau)dw\Big) f(z)$$
$$\leq t^{k-n/2} \int_M dz \int_0^t d\tau \int_M H_k(x,w,t)\tilde{F}(w,z)f(z)dw.$$

Wegen Lemma 3.8 ist das innerste Integral für $t \longrightarrow 0$ beschränkt, da der Limes existiert und gleich $\tilde{F}(x,z)f(z)$ ist. Also ist auch das Integral über dieses innere Integral bei Integration von 0 bis t beschränkt für beliebiges endliches t. Die äussere Integration über M ändert nichts an der Endlichkeit, weil M kompakt ist und somit selbst endliches Maß hat (an dieser Stelle geht die Kompaktheit von M entscheidend ein). Damit ist klar, dass wegen des Vorfaktors $t^{k-n/2}$ der ganze Ausdruck mit $t \longrightarrow 0$ selbst verschwindet. Summa summarum ist für $k > n/2+2$

$$p(x,y,t) = H_k(x,y,t) + (H_k * F)(x,y,t) \tag{3.22}$$
$$= \frac{e^{-d^2(x,y)/4t}}{(4\pi t)^{n/2}} \Big[\rho(d(x,y)) \sum_{j=0}^{k} t^j u_j(x,y) + O(t^{k+1})\Big] \tag{3.23}$$

eine Fundamentallösung für die Wärmeleitungsgleichung auf M. Da M kompakt ist, ist die Fundamentallösung eindeutig. Daher sind (!) die Funktionen, die sich durch Variation von $k > n/2+2$ ergeben sämtlich identisch, insbesondere ist a posteriori die o.g. Fundamentallösung sogar $C^\infty(M \times M \times (0,\infty))$.

Nur der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle noch das folgende Existenzresultat zitiert

Theorem 3.9 (Existenz einer Fundamentallösung) *Sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es auf M eine Fundamentallösung $p = p(x,y,t)$ der Wärmeleitungsgleichung. p ist glatt, symmetrisch in x und y und*

$$p(x,y,t) = \int_M p(x,z,t-s)p(z,y,s)dVol(z) \tag{3.24}$$

Beweis: Siehe z.B. Schoen-Yau, [SY94, Seiten 94 ff.]. Die Tatsache, dass es sich bei diesem Theorem nicht zugleich um einen Eindeutigkeitssatz handelt, kommt daher, dass die Eindeutigkeit auf nichtkompaktem M im Allgemeinen nicht gilt (z.B. Chavel [Cha84, S.179].

□

3.1.3 Zusammenhänge mit der Geometrie

Direkte Konsequenzen

Man kann zunächst wegen der Glattheit der Fundamentallösung mit der Gleichung (3.6) von Seite 36 sofort sehen, dass alle Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf M ebenfalls glatt sind. Weil bekannt ist, dass die Fundamentallösung existiert und für positive

Zeiten glatt ist, konvergiert dann die folgende Reihe wegen (3.7) gleichmäßig und absolut für alle $t > 0$ und man kann definieren,

$$Z(t) :\equiv \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t}. \tag{3.25}$$

Es ergibt sich wegen der o.g. Gleichung ausserdem mit der Formel (3.22) von Seite 44 eine aussergewöhnlich interessante Vergleichsmöglichkeit: es ist nämlich zugleich

$$Z(t) = (4\pi t)^{-n/2} \sum_{j=0}^{k} t^j a_j + O(t^{k-n/2+1}), \quad \text{wo} \quad a_j = \int_M u_j(x,x) dV(x). \tag{3.26}$$

Da, wie schon gesehen, die Funktionen u_j glatt sind und M endliches Volumen hat, sind die Koeffizienten a_j wohldefiniert. Schon ohne auch nur einen dieser Koeffizienten zu kennen, kann man z.B. das folgende Korollar aus der Asymptotik des Wärmeleitungskerns ziehen.

Korollar 3.10 *Seien M, N kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Wenn die zugehörigen Laplace-Beltrami-Operatoren von M und N gleiches Spektrum haben, so ist $dim(M) = dim(N)$.*

Beweis: Seien $Z(t)$ für M und $Z'(t)$ für N definiert und sei $m = dim(M)$ sowie $n = dim(N)$. Wegen der gleichen Spektren gilt mit (3.25), dass $(4\pi t)^{m/2} Z(t) \equiv (4\pi t)^{m/2} Z'(t)$. Mit (3.26) gilt dann, (alle Größen mit ' gehören zu N, die anderen zu M) dass $a_0 = \lim_{t\downarrow 0} (4\pi t)^{m/2} Z(t) = \lim_{t\downarrow 0} (4\pi t)^{m/2} Z'(t) = \lim_{t\downarrow 0} c \cdot t^{(m-n)/2}[a_0 + ta_1 + ...]$. Wegen der Voraussetzung $u_0(y,y) = 1$ ist aber $a_0 \neq 0$ und es ergibt sich sofort ein Widerspruch, falls nicht der Exponent $(m-n)/2$ im letzten Term verschwindet.

□

Bemerkung: Wenn M, N gleiches Spektrum haben, so sind $(4\pi t)^{m/2} Z(t) \equiv (4\pi t)^{m/2} Z'(t)$ zwei Potenzreihen, die auf dem Minimum ihrer Konvergenzradien identisch sind. Aus dem Identitätssatz für Potenzreihen folgt dann die Identität aller Koeffizienten in (3.26).

Der Koeffizient a_0

Der erste Koeffizient der Asymptotik von $Z(t)$ ist hier sehr schnell zu berechnen, da für die Rekursion der Funktionen u_j in (3.10) auf Seite (38) explizit gefordert wurde, dass $u_0(y,y) = 1$. Geht man (wie z.B. Berger-Gauduchon-Mazet) heuristischer vor, so muss man diesen Wert mit Hilfe der Rekursionsformel (3.14) von Seite 39 und einer Taylorentwicklung der dort verwendeten Volumendichtefunktion ϕ in Riemannschen Normalkoordinaten um deren Ursprung berechnen. Man erhält auf diese Weise (und in der Notation von (3.13)), dass für kleine $r \geq 0$ in Polardarstellung um den Ursprung y,

$$\phi(x,y) = 1 - \frac{r^2}{6} Ric(\xi,\xi) + O(r^3). \tag{3.27}$$

(Siehe z.B. Chavel [Cha84, S.: 317 f.] oder den Beweis von Prop. 3.13 unten.) Auch damit sieht man sofort, dass mit $r \downarrow 0$ wegen $u_0(x,y) = \phi^{-1/2}(x,y)$ wie erwünscht $u_0(y,y) = 1$ ist. Man erhält also direkt

$$a_0 = \int_M u_0(y,y)dV(y) = \int_M dV = Vol(M). \tag{3.28}$$

Insbesondere folgt aus dem Beweis des letzten Korollars ohne weiteres Nachdenken

Korollar 3.11 *Seien M, N kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Wenn die zugehörigen Laplace-Beltrami-Operatoren von M und N gleiches Spektrum haben, so ist $Vol(M) = Vol(N)$.*

□

Der Koeffizient a_1

Um die weiteren Koeffizienten der Asymptotik von $Z(t)$ zu berechnen, gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten. Die eine berechnet elementar mit Hilfe von Taylorentwicklungen die Terme, die in den Rekursionsformeln aus (3.14) vorkommen. Für a_1 und a_2 ist diese Methode bei Berger [Ber68, S.922-926] ausgeführt und wird vom Autoren selbst dort "un calcul brutal" genannt. Die zweite Methode beruht auf dem folgenden für die vorliegende Arbeit per se sehr interessanten Theorem, das letztlich auf McKean-Singer zurückgeht. Hier ist eine Formulierung wie die bei Berger-Gauduchon-Mazet [BGM71, Ch. III, Prop. E.IV.4].

Theorem 3.12 (McKean-Singer) *Für beliebige Zahlen $n, j \in \mathbb{N}$ existiert ein festes und $O(n)$-invariantes Polynom P_j^n mit universellen Koeffizienten, so dass sich für alle Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g), für alle Punkte $y \in M$ und für beliebige Isometrien $I : (\mathbb{R}^n, g_{can.}) \longrightarrow (T_yM, g(y))$ der Koeffizient $u_j(y,y)$ darstellen lässt als*

$$u_j(y,y) = P_j^n\Big(I^*Riem^M(y), \nabla(I^*Riem^M(y)), \nabla\nabla(I^*Riem^M(y)), \dots\Big),$$

wo * den Pull-Back bezeichnet.

Man beachte den nun mit der Funktion $Z(t)$ gegebenen und schon in der Einleitung erwähnten Zusammenhang zwischen der rein analytischen Information über das Spektrum von Δ aus (3.25) und der geometrischen Information in den Krümmungstermen der McKean-Singerschen Darstellung der Koeffizienten der Asymptotik. Das obige Theorem von McKean-Singer lässt sich sogar konstruktiv nutzen. Man kann (so vorgeführt in [BGM71], Seiten 216-225) aus den Zusatzbedingungen der $O(n)$-Invarianz und der isometrischen Invarianz Bedingungen an die Grade der Monome ableiten, in denen ein Krümmungstensor oder seine Ableitungen in den Polynomen P_n^j auftreten. Im Fall der Suche nach u_1 und u_2 schränken diese Bedingungen die Polynome so weit ein, dass man ihre Form a priori kennt und nur noch die nichtverschwindenden Koeffizienten berechnen muss. Der grosse Vorteil dieser Methode liegt dann darin, dass diese (von der speziellen Mannigfaltigkeit ja unabhängigen) Koeffizienten auf einer beliebigen kompakten Muster-Mannigfaltigkeit berechnet werden können, in der die entsprechenden Monome nicht verschwinden: z.B. auf Sphären. Allerdings braucht man schon im Fall $i = 1$ dafür z.B. das Wissen, dass der Raum der $O(n)$-invarianten Linearformen über den Krümmungstensoren von der Skalaren Krümmung aufgespannt wird (siehe [BGM71, S. 221]).

Weil die Methode des oben erwähnten "calcul brutal" nach persönlicher Ansicht des Autors dieser Arbeit unmittelbarer am analytischen Geschehen auf der Mannigfaltigkeit ist (sie nutzt lediglich die Eigenschaft Riemannscher Normalkoordinaten, in ihrem Ursprung den $\mathbb{R}^n$ zu approximieren, s.u. präziser), zieht die vorliegende Arbeit für a_1 diese Methode vor.

Proposition 3.13 *Sei M kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und bezeichne $R(y)$ für $y \in M$ die skalare Krümmung von M in y. Es gilt*

$$u_1(y,y) = \frac{1}{6}R(y) \qquad \textit{bzw.} \qquad a_1 = \frac{1}{6}\int_M R(y)dV(y).$$

Beweis: Zu berechnen ist nach (3.14) von Seite 39 der Ausdruck

$$u_1(y,y) = \lim_{x \longrightarrow y} \phi^{-1/2}(x,y)\frac{1}{r}\int_0^r \phi^{1/2}(\exp_y s\xi, y)\Delta\phi^{-1/2}(\exp_y s\xi, y)ds$$

wo $x = \exp_y r\xi$ und äquivalent zu (3.13), $\phi = \det g_{ij}$ wo g_{ij} die Metrik in Riemannschen *Normalkoordinaten* um y darstellt. Der Limes existiert wegen $u_j \in C^\infty$ und darf daher entlang der Verbindungsgeodätischen von x und y berechnet werden. Angenommen, es wäre bereits bekannt, dass

$$\Delta\phi^{-1/2}(\exp_y t\xi) = \frac{1}{6}R(y) + O(t) \tag{3.29}$$

gälte. Dann hätte man für hinreichend kleines r,

$$u_1(x,y) = \frac{1}{r}\int_0^r \frac{\phi^{1/2}(\exp_y s\xi, y)}{\phi^{-1/2}(\exp_y r\xi, y)}\Delta\phi^{-1/2}(\exp_y s\xi, y)ds.$$

Da der Integrand stetig ist (es sind sogar alle beteiligten Funktionen einzeln stetig), gilt nach dem eindimensionalen Mittelwertsatz der Integralrechnung,

$$\begin{aligned}\exists s_0 \in [0,r]: \quad u_1(x,y) =& \frac{1}{r}\cdot r \cdot \frac{\phi^{1/2}(\exp_y s_0\xi, y)}{\phi^{1/2}(\exp_y r\xi, y)}\Delta\phi^{-1/2}(\exp_y s_0\xi, y)\\ =& \frac{\phi^{1/2}(\exp_y s_0\xi, y)}{\phi^{1/2}(\exp_y r\xi, y)}\Big(\frac{1}{6}R(y) + O(s_0)\Big)\end{aligned}$$

Mit $x \longrightarrow y$ geht $r \longrightarrow 0$ und wegen $s_0 \in [0,r]$ folgt, dass der Bruch (sogar Zähler und Nenner einzeln) gegen 1 strebt. Da der Term $O(s_0)$ mit $r \longrightarrow 0$ ebenfalls beliebig klein wird, ist dann die Behauptung gezeigt.

Zum Beweis von (3.29): Man betrachte eine ONB von T_yM, bezeichnet als $\{e_i\}_{i=1,..,n}$ und erweitere kanonisch zu einer Karte Riemannscher Normalkoordinaten $\{\partial_i\}_{i=1,..,n}$ um $y \in M$. In y ist bekannt, dass $g_{ij} = \delta_{ij}$, $\det g_{ij} = 1, \partial_l g_{ij} = 0$ für alle i,j,l, weswegen sowohl alle $\partial_l \det(g_{ij}) = 0$ als auch die Christoffelsymbole der Metrik dort verschwinden, wodurch wiederum partielle und kovariante Ableitungen dort in eins fallen. Die kovariante Ableitung entlang der Geodätischen $\gamma : t \longrightarrow \exp(t\xi), |\xi| = 1$ ist dort $\nabla_t = \gamma'(t) = \xi^i \partial_i|\gamma(t)$. Indem man den Zusammenhang zwischen den ∂_i und gewissen Jacobifeldern (siehe Chavel [Cha95, S. 82 f.]) kennt, kommt man dann über eine Taylorentwicklung von Produkten dieser Jacobifelder mit der Metrik entlang von Ursprungsgeodäten zu den Entwicklungen

$$g_{jk}(\exp\xi) = \delta_{jk} - \frac{\xi^i\xi^l}{3}\langle R(e_i,e_j)e_l,\, e_k\rangle + O(|\xi|^3) \tag{3.30}$$

$$g^{jk}(\exp\xi) = \delta_{jk} + \frac{\xi^i\xi^l}{3}\langle R(e_i,e_j)e_l,\, e_k\rangle + O(|\xi|^3). \tag{3.31}$$

Dabei bewegen wir uns stets in einer Umgebung um y, auf der exp glatt ist und alle Taylorreihen gleichmäßig und absolut konvergieren. Jetzt ändern wir die Notation für eine Rechnung ab und betachten statt bisher ξ jetzt $t\xi$, wo $|\xi| = 1$. Unter Ausnutzung der o.g. Besonderheiten der Normalkoordinaten an ihrem Ursprung sowie der Formel für die Ableitung der Determinanten (siehe z.B. Chavel [Cha95, S. 84]) und des Satzes über Gliedweise Differentiation der Taylorreihe einer Funktion auf deren Konvergenzradius sieht man dann, dass für kleine t

$$\begin{aligned}
\det g_{ij}(\exp t\xi) &= \det g_{ij}(0) + t\xi^k\partial_k \det g_{ij}(0) + t^2\frac{\xi^l\xi^k}{2}\partial_l\partial_k \det g_{ij}(0) + O(t^3)\\
&= 1 + 0 + \frac{t^2}{2}\xi^k\xi^l\partial_k\Big(\partial_l \det g_{ij}\Big)(0) + O(t^3)\\
&= 1 + \frac{t^2}{2}\xi^k\xi^l\partial_k\Big(\det g_{ij}\cdot g^{im}\partial_l g_{im}\Big)(0) + O(t^3)\\
&= \ldots = 1 + \frac{t^2}{2}\xi^k\xi^l\Big(\det g_{ij} g^{im}\partial_k\partial_l g_{im}\Big)(0) + O(t^3)\\
&= 1 + \frac{t^2}{2}\delta^{im}\cdot 1\cdot\frac{d^2}{dt^2}\Big(g_{im}(\exp t\xi)\Big)|_{t=0} + O(|\xi|^3)\\
&= 1 + \frac{t^2}{2}\delta^{im}\Big(-\frac{2}{3}\langle R(\xi,e_i)\xi,\, e_m\rangle + O(t)\Big) + O(|\xi|^3)\\
&= 1 - \frac{t^2}{3}Ric(\xi,\xi) + O(t^3).
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Sei f eine glatte Funktion mit $f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$. Wie man sofort nachrechnet, gilt für hinreichend kleine $t > 0$ und beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$, dass (Taylor)

$$f^\alpha(t) = f(0) + 0 + \alpha\frac{t^2}{2}f''(0) + O(t^3).$$

Insbesondere gilt also wegen der Besonderheiten der Normalkoordinaten in ihrem Ursprung die für uns wichtige Entwicklung

$$\phi^{-1/2}(\exp t\xi) = 1 + \frac{t^2}{12}Ric(\xi,\xi) + O(t^3). \tag{3.33}$$

Mit dieser Entwicklung hat man die Möglichkeit, die reine zweite partielle Richtungsableitung in Richtung von ξ am Ursprung der Normalkoordinaten durch Gliedweise Differentiation obiger Darstellung entlang der Geodäten $t \longrightarrow \exp t\xi$ zu berechnen.

Für die kommende Zwischenüberlegung sei der Notation halber $\phi^{-1/2} = f$. Es gilt in Normalkoordinaten

$$\Delta f(\exp \xi) = g^{ij}\partial_i\partial_j f - g^{ij}\Gamma^l_{ij}\partial_l f \quad \text{und} \quad \Delta f(y) = \partial_i\partial_i f$$

Der Trick besteht darin, den Ausdruck $\Delta f(\exp \xi)$ zu berechnen, indem man in der oberen Formel überall die Taylorentwicklungen einsetzt. Dadurch muss man letztlich doch alle Größen nur im Ursprung y kennen. Mittel dazu ist das Cauchy-Produkt von Potenzreihen, das innerhalb des Konvergenzradius gegen das Produkt der Reihen konvergiert. Interesse besteht an einer Entwicklung von $\Delta f(\exp \xi)$ mit Termen der Ordnung ≤ 1 (d.h. nur das konstante Glied und das Wissen darum, dass alles andere mit $x \longrightarrow y$ verschwindet). Man kann sich überlegen, dass

$$g^{ij}\Gamma^l_{ij}\partial_l f = \delta_{ij}\delta_{kl}\Gamma_{ilm}\partial_k f + O(t^2)$$

ist (Terme erster Ordnung gibt es nicht in der Entwicklung der Metrik). Weil es weder in der Entwicklung der Christoffelsymbole einen konstanten Term gibt (Normalkoordinaten!) noch in der Entwicklung von $\partial_k f = \partial_k(\phi^{-1/2})$, ist dann in obiger Zeile nach Einsetzen der entsprechenden Taylorreihe der Term kleinster Ordnung schon von Ordnung 2 und braucht uns nicht mehr zu interessieren.

Man habt jetzt, wenn man wiederum die Entwicklung der Metrik einsetzt und entsprechend abbricht,

$$\begin{aligned} \Delta f(\exp \xi) &= g^{ij}\partial_i\partial_j f + O(|\xi|^2) \\ &= \delta_{ij} \cdot (\text{Terme der Ordnung} \leq 1 \text{ von } \partial_i\partial_j f(0)) + O(|\xi|^2) = \partial_i\partial_i f(0) + O(|\xi|^2) \end{aligned}$$

Es genügt also, reine zweite Richtungsableitungen von f im Ursprung in Terme der Ordnung ≤ 1 zu entwickeln. Aber gerade dazu gab es ja (3.33). Man setzt also dort anstelle von ξ nacheinander alle Koordinatenrichtungen e_i ein und differenziert die Entwicklung gliedweise entlang $t \longrightarrow \exp te_i$. Also

$$\begin{aligned} \Delta f(\exp \xi) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2}(1 + \frac{t^2}{12}Ric(\xi,\xi) + O(t^3)) + O(t^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{6}Ric(e_i,e_i) + O(t) \qquad = R(y) + O(t), \end{aligned}$$

was die Rechnung beendet.

□

Die in der Einleitung angekündigte Verbindung der Asymptotik des Wärmeleitungskerns zum Satz von Gauss-Bonnet ist jetzt sichtbar.

Korollar 3.14 *Seien M, N kompakte Riemannsche Mannigfaltgkeiten der Dimension 2. Wenn die Spektren ihrer Laplace-Beltrami-Operatoren identisch sind, so haben M und N die gleiche Euler-Charakteristik.*

Beweis: In Dimension 2 besagt die Gauss-Bonnet Formel (z.B. [GHL90, 3.111, S.151]).

$$\chi(M) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_M RdV = \frac{3}{2\pi}a_1^M = \frac{3}{2\pi}a_1^N = \frac{1}{4\pi}\int_N RdV = \chi(N)$$

□

Insbesondere bestimmt das Spektrum des Laplace-Beltrami-Operators in Dimension 2 vollständig die Topologie von M.

Die Koeffizienten a_2 und a_3

Auch der Koeffizient a_2 kann, wie schon bemerkt, auf beide im letzten Abschnitt erwähnten Methoden ausgerechnet werden. Die Herleitung mit Hilfe des Theorems von McKean-Singer (Thm. 3.12 von Seite 46) ist im Buch von Berger-Gauduchon-Mazet [BGM71, S. 223 ff.] ausgeführt, die Rechnung im Sinne des oben genannten Calculs findet sich bei Berger in der Arbeit [Ber68, S. 921 ff, insbes. S.925 f.]. Wegen der Länge der jeweils auszuführenden Argumentation erlaubt sich der Autor der vorliegenden Arbeit, hier lediglich das Ergebnis zu zitieren.

Proposition 3.15 *Sei M kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und bezeichne $R(y)$ für $y \in M$ die skalare Krümmung von M in y. Es gilt*

$$\begin{aligned} u_2(y,y) &= \frac{1}{360}\left(\frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{5}|Riem|^2 - \frac{1}{5}|Ric|^2 + \frac{12}{10}\Delta R\right) \\ a_2 &= \frac{1}{360}\int\limits_M \frac{1}{2}R^2(y) + \frac{1}{5}|Riem|^2 - \frac{1}{5}|Ric|^2 dV(y). \end{aligned}$$

Bemerkung: Kompaktes M ist geschlossen ohne Rand. Wegen des Divergenztheorems verschwindet daher das Integral über ΔR.

Aus der gesammelten Information über die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 lässt sich eine ganze Reihe von Konsequenzen ziehen (siehe z.B. [BGM71, S. 226-232]) wo allein 9 Sätze bewiesen sind. Man kann z.B. zeigen

Proposition 3.16 *Sei M kompakte Fläche mit konstanter skalarer Krümmung s. Wenn dann die Spektren der Laplace-Beltrami-Operatoren von M und einer weiteren Mannigfaltigkeit N übereinstimmen, so ist auch N eine Fläche mit konstanter skalarer Krümmung s.*

So sind $(S^2, g_{can.})$, $(P^2(\mathbb{R}), g_{can.})$, der flache Torus oder die flache Kleinsche Flasche durch die Spektren ihrer Laplaceschen vollständig bestimmt (siehe [BGM71, Ch. III, Cor E.IV.6]).

Es ist jedoch bekannt, dass im Allgemeinen das Spektrum des Laplace-Operators eine Mannigfaltigkeit nicht vollständig charakterisiert.

Proposition 3.17 (T.Sakai) *Es sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $a_3 = \int\limits_M u_3(y,y)dV(y)$ gilt*

$$a_3 = \frac{1}{6!}\int\limits_M \Big(-\frac{142}{6}|R|^2 - \frac{26}{63}|\nabla Ric|^2 - \frac{1}{9}|\nabla Riem|^2 + \frac{5}{9}R^3$$
$$- \frac{2}{3}R|Ric|^2 + \frac{2}{3}R|Riem|^2 - \frac{4}{7}R^{ab}R^c_bR_{ac} + \frac{20}{63}R^{ab}R^{ij}R_{aibj}$$
$$- \frac{8}{63}R^{ij}R_i^{abc}R_{jabc} + \frac{8}{21}R^{abcd}R^{ij}_{ab}R_{cdij}\Big)dV.$$

Dabei stehen hochgestellte Indices abkürzend für Summationen mit Hilfe der Metrik (z.B. $R^{ab}R_{aibj} = R_{kl}g^{ka}g^{lb}R_{aibj}$).

Beweis: Siehe [Sak71, Thm 4.2], insbes. auch die Anmerkung auf Seite 603. McKean und Singer schreiben "The computation of k_3, k_4, etc. is a problem of classical invariant theory; (....) It looks pretty hopeless."([MS67, S.: 66]).

□

Korollare aus diesem Ergebnis zieht Sakai hauptsächlich für den Fall, dass M eine Einstein-Mannigfaltigkeit ist, weil sich die Form von a_3 dort etwas übersichtlicher darstellt.

3.1.4 Maximumprinzipien und Standardargumente

In diesem Abschnitt sollen diverse Formen eines starken Maximumprinzips für Funktionen $f : M \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ bewiesen werden, die die Differentialungleichung $Lf :\equiv \Delta f + \langle B, \nabla f\rangle - \frac{\partial}{\partial t}f \geq (\leq) 0$, B glattes beschränktes Vektorfeld auf M, erfüllen. Ein starkes Maximumprinzip für einen etwas allgemeineren Operator wird dann als Korollar abfallen. Wie schon erwähnt, ist der Wärmeleitungsoperator in lokalen Koordinaten eine gleichmäßig parabolische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit beschränkten Koeffizienten. Man zeigt deswegen ein entsprechendes Maximumprinzip für solche allgemeineren Operatoren im euklidischen Raum. Mit den Beweisen folgt die vorliegende Arbeit für diesen Teil dem Buch von Protter-Weinberger [PW76], der die entsprechenden Sätze für eine Raumdimension beweist und eine Anleitung zur Verallgemeinerung auf n Dimensionen gibt. Das parabolische Maximumprinzip des flachen Raumes lässt sich dann kartenweise auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten fortsetzen. Das starke Maximumprinzip für Elliptische Operatoren, und damit z.B. für den Laplace-Beltrami-Operator auf M (siehe Theorem 2.3 von Seite 10) wird dabei mitbewiesen.

Als Korollare aus den Maximumprinzipien folgen dann noch einige später wichtige Argumente. Man findet insbesondere das Resultat, dass eine Funktion f auf $M \times [0,T]$, die für $t = 0$ nichtnegativ ist, auch niemals negativ werden kann, wenn $Lf \leq 0$ gilt wo immer $f \leq 0$.
Ein von Hamilton in [Ham86] bewiesenes schwaches Maximumprinzip für Matrizen, dessen Beweis auf einem sehr ähnlichen Prinzip beruht, soll ebenfalls zitiert werden.

Vorbereitungen und Maximumprinzipien im flachen Raum

Lemma 3.18 *Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei Matrizen, wobei A positiv definit und B symmetrisch negativ semidefinit ist. Dann ist die Spur $tr(AB)$ kleiner oder gleich 0.*

Beweis: Angenommen $tr(AB) > 0$. Da die Spur einer Matrix die Summe ihrer Eigenwerte ist, existiert ein Eigenwert $\lambda > 0$ von (AB). Sei x ein Eigenvektor von (AB) zu diesem Eigenwert. Wegen der positiven Definitheit von A und der Symmetrie von B gilt dann mit $y := Bx$:

$$0 < y^T A y = y^T ABx = y^T \lambda x = \lambda x^T B^T x = \lambda x^T B x$$

Wegen $\lambda > 0$ kann man durch λ dividieren und erhält $x^T Bx > 0$, einen Widerspruch zur Voraussetzung, dass B negativ semidefinit sei.

□

Bemerkung: insbesondere gilt für jede in den Raumvariablen zweimal stetig differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ dort, wo sie ein lokales Maximum erreicht, dass ihre Hessematrix negativ semidefinit ist. An einer solchen Stelle ist für jede positiv definite Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$, $tr(A\ D^2(u)) = a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i} \leq 0$. Nach [GT83, Seite 32] genügt für das obige Lemma auch ein positiv semidefinites A.

Man möchte nun Maximumprinzipien für einen allgemeinen gleichmäßig parabolischen Operator auf Funktionen $u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ gewinnen. Die Ideen hierzu lassen sich an der n-dimensionalen reellen Wärmeleitungsgleichung gut skizzieren. Zunächst ist es trivial, dass eine Funktion u, die in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ die strikte Ungleichung $Lu = \Delta u - \frac{\partial}{\partial t} u > 0$ erfüllt, dort kein lokales Maximum annehmen kann. Dies gilt einfach, weil in P $\Delta u \leq 0$ und $\frac{\partial}{\partial t} u = 0$ erfüllt sein müssen. Will man eine Aussage auch für die schwächere Voraussetzung $Lu \geq 0$ machen, so kann man etwa folgendermaßen vorgehen: Wenn $Lu \geq 0$ auf einem kleinen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ gilt und u sein Maximum z.B. im Punkt P im inneren von Ω annimmt, dann kann man auch eine Funktion v konstruieren, so dass $\max_\Omega v(x, t) = v(P) = u(P)$ und für v strikt $Lv > 0$ gilt. Man bekommt dann mit v denselben Widerspruch, den man hätte, wenn schon u in P die strikte Differentialungleichung erfüllt hätte. Um v zu bekommen, addiert man zu u eine zeitunabhängige Funktion $w(x, t) = w(x)$, die in P verschwindet, die außerhalb von P so langsam wächst, dass $v = u + w < u(P)$ auf $\partial\Omega$, und die in x strikt subharmonisch (im klassischen C^2-Sinne) ist. Mit $Lw = \Delta w > 0$ ist dann $Lv = Lu + Lw > 0$. Man gewinnt ein passendes w z.B. mit der Tatsache, dass die Abstandsfunktion von einem gegebenen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ subharmonisch ist.

Sei nun der gleichmäßig parabolische Differentialoperator

$$Lu \equiv a_{ij}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + b_i \frac{\partial u}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial t} u \tag{3.34}$$

gegeben, und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times (0, T)$ ein Gebiet. Sei zunächst Ω ein Produkt von Intervallen und erfülle u die strikte Ungleichung $Lu > 0$ auf Ω. Unter der Annahme, dass für ein $P \in \Omega$ $u(P) = max_{\overline{\Omega}} u(x, t)$ gilt, wird mit dem letzten Lemma 3.18 wiederum sofort ein Widerspruch sichtbar, weil in P $\frac{\partial}{\partial t} u = 0, \frac{\partial}{\partial x^i} u = 0$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}$ negativ semidefinit ist.

Mehr noch, das Maximum von u kann auch nicht entlang der Randkomponente liegen, die durch rechtsseitigen Abschluss des Zeitintervalls entsteht. Wegen der Quaderform von Ω gilt sogar dort für die Raumrichtungen $\frac{\partial}{\partial x^i}u = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} \leq 0$ (Ω ist in Raumrichtungen offener Quader) und in Zeitrichtung $\frac{\partial}{\partial t}u \geq 0$ (sonst wäre u kurze Zeit zuvor größer gewesen). Um nun die Differentialungleichung $Lu \geq 0$ zu behandeln, beweisen wir zunächst drei Lemmata.

Lemma 3.19 *Sei L wie in 3.34, gleichmäßig parabolisch mit beschränkten Koeffizienten. Erfülle u die Ungleichung $Lu \geq 0$ auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Sei B eine Kreisscheibe so dass $B, \partial B \subset \Omega$. Sei $\sup_\Omega u = M$, $u < M$ im Inneren von B und $u(P) = M$ für ein $P \in \partial B$. Dann ist P entweder der späteste oder der früheste Punkt von ∂B (d.h. die Tangentialebene an ∂B in P hat ist in einem einzigen Zeitschnitt von Ω enthalten, bzw. P hat dieselben Raumkoordinaten wie der Mittelpunkt von B).*

Beweis: Sei $(\bar{x}, \bar{t})$ der Mittelpunkt und R der Radius von B. Wir nehmen an, $P \in \partial B$ sei weder der früheste noch der späteste Punkt von ∂B und provozieren einen Widerspruch.

OBdA ist P der einzige Punkt auf ∂B, and dem $u = M$. (Sonst ersetze B durch eine etwas kleinere Kreisscheibe $\tilde{B} \subseteq B$ mit $\partial\tilde{B} \cap \partial B = P$)

Angenommen $P = (x_1, t_1)$, wo $x_1 \neq \bar{x}$. Dann kann man eine Kreisscheibe B_1 um P mit Radius R_1 konstruieren, die so klein ist, dass

$$R_1 < |x_1 - \bar{x}|, \text{ und } \bar{K_1} \subset \Omega$$

Nun besteht ∂K_1 aus zwei Abschnitten $C' = \partial K_1 \cap \overline{B}$ und $C'' = \partial K_1 \backslash C'$. Nach Konstruktion von $\overline{B}$ gilt dann $u < M$ auf C'. Folglich existiert ein $\eta > 0$ so dass

$$u \leq M - \eta \text{ auf } C'.$$

Weil M das Maximum von u in Ω ist gilt ausserdem

$$u \leq M \text{ auf } C''.$$

Als Hilfsfunktion sei definiert

$$v(x,t) = e^{-\alpha[|x-\bar{x}|^2 + (t-\bar{t})^2]} - e^{-\alpha R^2}.$$

Für $\alpha > 0$ gilt dann $v > 0$ auf B, $v = 0$ auf ∂B und $v < 0$ auf $\Omega \backslash \overline{B}$. Mit der Schreibweise $\phi = -\alpha[|x-\bar{x}|^2 + (t-\bar{t})^2]$ bzw. $A = (a_{ij})_{ij}$ sieht man dann, dass

$$\begin{aligned} Lv &= a_{ij}(x_j - \bar{x}_j)(x_i - \bar{x}_i)4\alpha^2 e^\phi - 2\alpha e^\phi \delta_{ij} a_{ij} - 2\alpha b_i e^\phi (x_i - \bar{x}_i) + 2\alpha e^\phi (t - \bar{t}) \\ &= 2\alpha e^{-\alpha[|x-\bar{x}|^2 + (t-\bar{t})^2]}(2\alpha a_{ij}(x_j - \bar{x}_j)(x_i - \bar{x}_i) - tr(A) - b_i(x_i - \bar{x}_i) + (t - \bar{t})). \end{aligned}$$

Wegen des kleinen Radius R_1 verschwindet $|x - \bar{x}|$ nirgends in $\overline{B}_1$. Da A nach Voraussetzung positiv definit ist und sein kleinster Eigenwert gleichmäßig von Null weg beschränkt ist, kann $\alpha > 0$ so groß gewählt werden, dass

$$Lv > 0 \text{ auf } \overline{B}_1.$$

An dieser Stelle (und an analogen Stellen in den weiteren Lemmata) geht also entscheidend die Tatsache ein, dass L nicht nur parabolisch, sondern gleichmäßig parabolisch ist. Nun können wir definieren:

$$w(x,t) = u(x,t) + \varepsilon v(x,t)$$

Wo $\varepsilon > 0$ eine noch zu bestimmende kleine Konstante ist. Wegen der Linearität von L gilt

$$Lw = Lu + \varepsilon Lv > 0 \text{ auf } B_1. \tag{3.35}$$

Da $u \leq M - \eta$ auf C' ist, kann ε so klein gewählt werden, dass $w = u + \varepsilon v < M$ auf C' bleibt. Ausserdem gilt $w < M$ auf C'' weil dort $v < 0$ und $u \leq M$ ist. Also gilt

$$w < M \text{ auf ganz } \partial B_1$$

Andererseits gilt $v = 0$ auf ∂B, also

$$w(x_1,t_1) = (u + \varepsilon v)(x_1,t_1) = u(x_1,t_1) = M$$

Das Maximum von w in $\overline{B}_1$ muss also in einem inneren Punkt angenommen werden. Dies aber widerspricht der strikten Differentialungleichung 3.35, womit das Lemma bewiesen wäre. Das Argument funktioniert nicht für den spätesten oder frühesten Punkt in $\overline{B}$, weil bei $x_1 = \bar{x}$ kein Radius $R_1 < |x_1 - \bar{x}|$ gewählt werden kann.

□

Lemma 3.20 *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ Gebiet, L durch 3.34 gegeben, und erfülle die Funktion u auf Ω die Ungleichung $Lu \geq 0$. Sei $u \leq M$ in Ω, und existiere ein Punkt $(x_0,t_0) \in \Omega$, so dass $u(x_0,t_0) < M$. Bezeichne schließlich l diejenige Zusammenhangskomponente von $\Omega_{t_0} = \{(x,t) \in \Omega : t = t_0\}$, in der (x_0,t_0) liegt. Dann gilt $u < M$ auf ganz l.*

Bemerkung: D.h. $u < M$ für alle Punkte in Ω, die von (x_0,t_0) aus *im Augenblick* t_0 durch einen Weg in Ω erreichbar sind. Insbesondere ist $l = \Omega_{t_0}$, falls Ω ein Produkt $\tilde{\Omega} \times (0,T)$ ist, wo $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet ist.

Beweis: Angenommen, $u(x_1,t_0) = M$ an einer passenden Stelle $(x_1,t_0) \in l$. Sei $\gamma : [0,S] \longrightarrow \Omega_{t0}$ ein nach Bogenlänge parametrisierter stetiger Weg mit $\gamma(0) = x_1, \gamma(S) = x_0$. Dabei ist oBdA $u < M$ auf $\gamma((0,S))$, sonst bewegt man sich entlang γ auf den Punkt (x_0,t_0) zu, bis dieser Wunsch erfüllt ist.

Die Idee des Beweises besteht darin, die Distanz eines gegebenen Punktes zum nächstgelegenen Punkt mit $u = M$ als Funktion des Kurvenparameters s entlang γ zu betrachten. Man erhält, dass diese Distanz als Funktion in s nichtnegativ und monoton fallend bei beliebig kleinem Anfangswert ist. Daraus schließt man, dass sie entlang γ konstant verschwindet, was ein Widerspruch zu der Annahme ist, dass man entlang γ ein Intervall mit $u < M$ finden kann.

Sei $d_0 := \min\{S\ , \min_{s\in[0,S]} \operatorname{dist}(\gamma(s), \partial\Omega)\}$. Für $s \in (0, d_0)$ setze

$$d(\gamma(s)) = \min_{(x,t)\in\Omega : u(x,t) = M} \operatorname{dist}(\gamma(s),(x,t))$$

den euklidischen Abstand von $\gamma(s)$ zur nächstgelegenen Stelle in Ω, an der u sein Maximum annimmt. Dann gilt wegen $u(\gamma(0), t_0) = M$, dass $d(\gamma(s)) \leq s$. Wegen des letzten Lemmas ist bekannt, dass die nächstgelegene solche Stelle die selben Raumkoordinaten wie $\gamma(s)$ hat. Es handelt sich also um $(\gamma(s), t_0 \pm d(\gamma(s)))$. Bewegt man sich entlang γ, so kann man mit Pythagoras die Distanz zu dieser schon bekannten Maximalstelle abschätzen:

$$\sqrt{d^2(\gamma(s)) - \delta^2} < d(\gamma(s+\delta)) \leq \sqrt{d^2(\gamma(s)) + \delta^2} < d(\gamma(s)) + \frac{\delta^2}{2d(\gamma(s))} \tag{3.36}$$

Dabei stimmt die mittlere Ungleichung wegen der Bogenlängeneigenschaft von γ, die letzte sieht man durch Quadrieren, und die erste folgt aus der mittleren, indem man substituiert $x \longrightarrow x + \theta, \delta \longrightarrow -\theta$, quadriert, θ^2 subtrahiert, die Wurzel zieht (nichtnegativer Radikand), und passend umbenennt.

Wenn jetzt $d(\gamma(s)) = 0$, dann ist $\gamma(s) = M$ und der Widerspruch ist schon offensichtlich. Also sei stattdessen $d(\gamma(s)) > 0$. Man wählt ein $\delta \in (0, d(\gamma(s))$ und zerlegt $\gamma((x, x+\delta))$ in n gleichlange Abschnitte. Mit den Ungleichungen 3.36 angewandt auf $d(\gamma((s + \frac{j}{n}\delta) + \frac{1}{n}\delta))$ stößt man darauf, dass

$$d(\gamma(s + \frac{j+1}{n}\delta)) - d(\gamma(s + \frac{j}{n}\delta)) \leq \frac{\delta^2}{2n^2 d(\gamma(s + \frac{j}{n}\delta))} \leq \frac{\delta^2}{2n^2\sqrt{d(\gamma(s)) - \delta^2}}.$$

Die Einladung der linken Seite, zu einer Teleskopsumme zu entarten, fordert zum Summieren über $j = 0, .., n-1$ auf. Es ist

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; d(\gamma(s+\delta)) - d(\gamma(s) \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{\delta^2}{2\sqrt{d(\gamma(s)) - \delta^2}}.$$

Demzufolge ist also auch $d(\gamma(s+\delta)) \leq d(\gamma(s))$. Es gilt aber bekanntlich $d(\gamma(s)) \leq s$, wobei s beliebig nahe an 0 gewählt sein kann. Es muss also bereits $\forall s \in (0, d_0)$: $d(\gamma(s)) \equiv 0$ und folglich $u \equiv M$ auf $\gamma((0, d_0))$ gelten, womit der Widerspruch freigelegt ist. Es folgt, dass $u(x_1, t_0) < M$ gewesen sein muss.

$\square$

Lemma 3.21 *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ Gebiet und L durch 3.34 gegeben. Sei weiterhin $(x_1, t_1) = P \in \Omega$ und $B = B_R(P) \cap \{t \leq t_1\}$ die frühere Halbkugel einer Kugel des Radius R um P. Schließlich erfülle die Funktion u die Differentialungleichung $Lu \geq 0$ in B und sei $M = \max_{\overline{B}} u$. Wenn dann $u < M$ im Inneren $B \cap \{t < t_1\}$ von B, dann ist auch $u(P) < M$.*

Beweis: Es sind wieder einige Definitionen nötig, bevor die Idee sinnvoll skizziert werden kann. Sei

$$v(x,t) = e^{-(|x-x_1|^2 + \alpha(t-t_1))} - 1$$

und sei H das Hyperparaboloid, das der Niveaumenge $v = 0$ entspricht, i.e. der Gleichung

$$|x - x_1|^2 + \alpha(t - t_1) = 0$$

genügt. Es ist dann $P \in H$, P ist spätester Punkt in H und H tangiert den Zeitschnitt $\{t = t_1\}$ nur in P. Bezeichne $C^{'} := \{(x,t) \in \partial B | \exists \tilde{t} \geq t : (x, \tilde{t}) \in H\}$ den abgeschlossenen Teil von ∂B, der früher als H ist. Bezeichne weiterhin $C^{''} := H \cap B$, und schließlich $C^{'} \cup C^{''} := \partial D$, wodurch ein offenes Gebiet D definiert ist.

Stellt man sich in einem kartesischen Koordinatensystem die Zeitachse als senkrechte Achse und die Raumachsen waagerecht vor, dann hat D etwa die Form einer nach oben hyperbolischen und nach unten rund geschnittenen "offenen" Linse, an deren oberstem Randpunktpunkt P liegt. Es geschieht im Folgenden dies: Voraussetzung war, dass $u < M$ auf ganz B ist. Wenn man nun zusätzlich $u < M$ auf $C^{'} \subset \partial B$ annimmt, so erzwingt man $u(P) = M$. Durch Addition der oben definierten Hilfsfunktion v stößt man dann für $w = u + \varepsilon v$ auf einen Widerspruch der Art, wie wir ihn schon in Lemma 3.19 genutzt und der vorangehenden Bemerkung beschrieben haben. Aus den Eigenschaften von w erhält man durch Rückschluss auf u einen entsprechenden Widerspruch und der Beweis hat ein Ende.

Zunächst berechnet man

$$Lv = e^{-(|x-x_1|^2+\alpha(t-t_1))} \cdot (4a_{ij}(x_i - (x_1)_i)(x_j - (x_1)_j) - 2tr(A) - 2b_i(x_i - (x_1)_i) + \alpha)$$
$$\frac{\partial}{\partial t} v(P) = -\alpha$$

Man wählt daher $\alpha > 0$ so groß, dass $Lv > 0$ in B.

Wir nehmen jetzt an, es sei $u < M$ auf $C^{'}$. Dann existiert ein $\eta > 0 : u \leq M - \eta$ auf $C^{'}$. Es sei die Funktion $w = u + \varepsilon v$ mit noch zu bestimmendem ε gegeben. Wir tragen Fakten zusammen:

$$v = 0 \text{ auf } C^{''} \tag{3.37}$$
$$Lw = Lu + \varepsilon Lv > 0 \text{ in } D \tag{3.38}$$
$$w = u + \varepsilon v = u \leq M \text{ auf } C^{''} \tag{3.39}$$
$$\exists \varepsilon > 0 : w = u + \varepsilon v < M \text{ auf } C^{'}. \tag{3.40}$$

Wegen 3.38 nimmt w in D kein Maximum an. u nimmt sein Maximum auf dem Kompaktum $\overline{D}$ an, aber nach Voraussetzung nicht in B und nach Annahme nicht auf $C^{'}$, folglich zwingend in P. Dann aber gilt wegen (3.39) und (3.40), dass auch w sein Maximum nicht auf $C^{'}$ sondern in P annimmt.

Nun schließt man aus dem Verhalten von w zurück auf u. In P muss $\frac{\partial}{\partial t} w \geq 0$ gelten, sonst wäre w kurz zuvor größer gewesen. Da aber dort auch $\frac{\partial}{\partial t} v = -\alpha > 0$ ist, gilt in P, $\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\partial}{\partial t} w - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} v \geq \varepsilon\alpha > 0$. Da u stetig ist, gilt an jeder Raumstelle zur Zeit $t = t_1$ aber $u \leq M$. Somit $u(P) = \max u$, also ist dort auch im Bezug auf die Raumvariablen der Effekt zu spüren, dass $\frac{\partial}{\partial x^i} u = 0$ und $\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} u$ negativ semidefinit. Mit Lemma 3.18 ist dann aber

$$Lu = a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} u + 0 - \frac{\partial}{\partial t} u < a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} u < 0,$$

den Widerspruch, der das Lemma beweist.

□

An dieser Stelle bekommt man mit sehr kleinem Mehraufwand ein erstes Theorem.

Theorem 3.22 (starkes Maximumprinzip) *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ *ein Gebiet,* $\Omega_{\bar{t}} = \Omega \cap \{t \le t_1\}$. *Erfülle ausserdem die Funktion* u *in* $\Omega_{\bar{t}}$ *die gleichmäßig parabolische Differentialungleichung*

$$Lu \equiv a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + b_i \frac{\partial u}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial t}u \ge 0$$

wobei die Koeffizienten von L *beschränkt seien.*

Wenn nun u *in* $P \in \Omega_{\bar{t}}$ *sein Maximum* M *annimmt, dann ist* $u(Q) = M$ *für alle Stellen* $Q \in \Omega$, *von denen aus* P *entlang eines stückweise glatten Weges erreichbar ist, dessen Richtung dort, wo sie existiert, entweder eine verschwindende Zeitkomponente besitzt oder nur die Zeitkomponente, wobei diese positiv ist.*

Beweis: Sei $P = (x_0, t_0)$. Man betrachtet $\Omega_{t_0} = \Omega \cap \{t \le t_0\}$ und kümmert sich zunächst nur um die Zeitrichtung. Angenommen es existiere $\tilde{t} \le t_0 : \; u(x_0, \tilde{t}) < M$, dann richtet man sein Augenmerk auf das Geradenstück $\{(x_0,t) | \tilde{t} \le t \le t_0\} \subset \Omega_{t_0}$. Sei $\tau = \sup_{(\tilde{t},t_0]}\{t | u(x_0,t) < M\}$. Wegen der Stetigkeit von u ist dann $u(x_0,\tau) = M$ und Lemma 3.20 sagt, dass für alle Augenblicke $t \in (\tilde{t},\tau)$ die Menge $\{u(x,t) < M\}$ sich über die ganze Zusammenhangskomponente von (x_0,t) erstreckt. Dann aber liegt die Situation von Lemma 3.21 vor: $u < M$ auf der $\{t < \tau\}$-Hälfte einer kleinen Kugel $B_\epsilon(x_0,\tau)$ und $Lu \ge 0$ auf der entsprechenden in Zeitrichtung abgeschlossenen Halbkugel. Aus dem Lemma folgt dann, dass $u(x_0,\tau)$ ebenfalls echt kleiner als M ist. Das ist ein Widerspruch, der impliziert, dass zeitlich vor (x_0,t_0) an derselben Raumstelle u überall maximal sein muss.

Die horizontalen Abschnitte des Weges aus dem Theorem kommen von Lemma 3.20.

□

Korollar 3.23 (Spezialfall) *Wenn in Theorem 3.22 das Gebiet* Ω *die Form eines Produkts* $\Omega = \Omega_{space} \times (0,T)$ *hat, wo* $T > 0$ *und* $\Omega_{space} \subset \mathbb{R}^n$ *Gebiet sind, dann gilt:*

$$u(x_0,t_0) = M \;\Rightarrow\; u(x,t) = M \;\; \forall (x,t) : x \in \Omega_{space}, t \le t_0$$

Offensichtlich gilt das Resultat auch für eingeschränkte Zeiten $\Omega_{space} \times (t,T),\; t < T$.

Das folgende Theorem gilt mit entsprechenden unbequemen technischen Zusatzannahmen über die Geometrie des Randes des Gebiets Ω auch für allgemeine Gebiete wie die bisherigen Lemmata und das Theorem 3.22. Das Interesse dieser Arbeit liegt aber letztlich nur bei Gebieten mit Produktstruktur $\Omega = \Omega_{space} \times (0,\infty)$ wie sie der Spezialfall des Korollars 3.23 betrachtet: Im Hinterkopf stehen die Bilder von Karten aus einem Produkt $M \times (0,\infty)$, wo M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist. Da hier nur Mannigfaltigkeiten mit glattem Rand betrachtet werden, reicht es sogar, für das Gebiet $\Omega_{space} \subseteq \mathbb{R}^n$, einen glatten Rand anzunehmen (Mollifiziere den Rand von Karten, verkleinere dabei zur Not ein Wenig). Da die Einschränkung auf solche Gebiete hier zu einer viel übersichtlicheren Formulierung führt, verzichten wir auf den Beweis des allgemeineren Falles.

Theorem 3.24 (Maximumprinzip für Randpunkte) *Sei $\Omega = \Omega_{space} \times (0, \infty)$ wo $\Omega_{space} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet ist, $\Omega_{t_0} = \Omega \cap \{t \leq t_0\}$. Erfülle ausserdem die Funktion u in Ω_{t_0} die gleichmäßig parabolische Differentialungleichung*

$$Lu \equiv a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + b_i \frac{\partial u}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial t} u \geq 0$$

wobei die Koeffizienten von L beschränkt seien. Sei $M = \max_\Omega u$, $u < M$ auf Ω_{t_0} und existiere ein $P = (x_0, t_0) \in \partial\Omega$, so dass $u(P) = M$. Wenn dann $\frac{\partial}{\partial\nu}$ eine beliebige Richtungsableitung in eine von Ω_{t_0} nach aussen zeigende Richtung bezeichnet, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial\nu} u > 0 \text{ im Punkt } P$$

Beweis: Bezeichne B eine Kugel um einen Punkt $(x_1, t_1) \in \Omega$, so dass $\partial B \cap \partial\Omega = P$, und $B_{t_0} := B \cap \{t \leq t_0\} \subset \Omega_{t_0}$. B existiert, weil Ω einen glatten Rand hat. Offensichtlich gilt $t_0 = t_1$. Wir bezeichnen den Radius von B mit R, $R = |x_1 - x_0|$. Sei B_1 eine Kugel mit Zentrum in P und Radius $R_1 < R$. Analog der Bezeichnungsweise in Lemma 3.21 definiert man $C' = \partial B_1 \cap \overline{B_{t_0}}$ sowie $C'' = \partial B \cap (B_1 \cap \Omega_{t_0})$. Dann bilden C', C'' und die Ebene $\{t = t_0\}$ den Rand eines Gebiets, das D heisse. In einem kartesischen Koordinatensystem, in dem die senkrechte Achse die Zeitachse ist und die waagerechte Achse die Raumdimensionen symbolisiert, ist $\partial\Omega$ eine senkrechte Linie, an die im Punkt P eine auf der Kante stehende Linse anliegt. Die Ebene $\{t = t_0\}$ ist eine waagerechte Linie, die diese Linse entlang ihrer Achse zerteilt und D ist die untere Hälfte dieser Linse.

Nach Definition ist $u < M$ auf $C'' \backslash P$. Nach Voraussetzung ist ausserdem $u < M$ auf $C' \subset \Omega_{t_0}$. Folglich gilt

$$u < M \text{ auf } C'' \backslash P \tag{3.41}$$
$$u = M \text{ im Punkt } P$$
$$\exists \eta > 0 : \; u \leq M - \eta \text{ auf } C'. \tag{3.42}$$

Man definiert ähnlich wie in Lemma 3.19 die Hilfsfunktion v und berechnet

$$v(x,t) = e^{-\alpha[|x-x_1|^2 + (t-t_1)^2]} - e^{-\alpha R^2}$$
$$Lv = 2\alpha e^{-\alpha[|x-x_1|^2+(t-t_1)^2]}(2\alpha a_{ij}(x_j - x_{1j})(x_i - x_{1i}) - tr(A) - b_i(x_i - x_{1i}) + (t - t_1)).$$

Man verwendet nun ein so großes α, dass $Lv > 0$ auf $\overline{D}$. Wiederum sei $w := u + \varepsilon v$. Damit gilt $\forall \varepsilon > 0, Lw = Lu + \varepsilon Lv > 0$ in D. Wegen (3.42) existiert ein genügend kleines ε, so dass

$$w < M \text{ auf } C'.$$

Weil die Niveaumenge $v = 0$ sich mit ∂B in Eins fügt, folgt aus (3.41) zusätzlich

$$w < M \text{ auf } C'' \backslash P \;\text{ und }\; w(P) = M.$$

Da $w < M$ auf C' ist, ergibt sich aus dem letzten Korollar angewandt auf das Gebiet D sofort ein Widerspruch, wenn wir annehmen dass w ein Maximum innerhalb von D annimmt. Also ist $w < M$ auf ganz $\overline{D} \backslash P$. Deswegen gilt in P jedenfalls

$$\frac{\partial}{\partial\nu} w = \frac{\partial}{\partial\nu} u + \varepsilon \frac{\partial}{\partial\nu} v \geq 0$$

Wenn man $\rho(x,t) := (|x-x_1|^2 + (t-t_1)^2)^{1/2}$ notiert, so kann man an der Stelle P berechnen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\nu}v = \langle\nabla v,\, \nu\rangle = \langle\nabla(e^{-\alpha\rho^2} - e^{-\alpha R^2}),\, \nu\rangle = -2\alpha e^{-\alpha\rho^2}\langle\nabla\rho,\, \nu\rangle \\ = -2\alpha e^{-\alpha R^2}|\nabla\rho||\nu|\cos\theta = -2\alpha e^{-\alpha R^2}|\nu|\cos\theta < 0\end{aligned}$$

Wo eingegangen ist, dass der glatte Rand von Ω wegen der von innen anlegbaren Kugel den euklidisch gemessenen Winkel zwischen der Einheitsnormalen an $\partial\Omega$ und einem beliebigen anderen nach aussen zeigenden Vektor echt unter $\pi/2$ hält. Insbesondere ist $\frac{\partial}{\partial\nu}u > 0$ in P, was den Beweis beendet.

□

Bemerkung: Wenn u im üblichen Gebiet Ω_{space} die elliptische Ungleichung

$$Lu(x) \equiv a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}u(x) + b_i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}u(x) \geq 0$$

erfüllt, dann erfüllt es wegen $\frac{\partial}{\partial t}u \equiv 0$ auch die zugehörige parabolische Ungleichung

$$Lu - \frac{\partial}{\partial t}u \geq 0$$

in jedem Gebiet $\Omega = \Omega_{space} \times (0,T)$. Falls u an einem Punkt x_0 im Inneren von Ω_{space} sein Maximum annimmt, dann auch an allen Punkten $(x_0,t), t \in (0,T)$. Mit Korollar 3.23 gilt in jedem Fall für festes $t_0 > 0$, dass u konstant auf ganz Ω_{space} ist. In diesem Sinne implizieren mutatis mutandis die beiden letzten Theoreme und das eben erwähnte Korollar entsprechende Maximumprinzipien für elliptische Operatoren auf Gebieten im $\mathbb{R}^n$.

Übergang auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Sei nun M wieder eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die bisherige Arbeit dieses Abschnitts dient zum Beweis von Maximumprinzipien für die Wärmeleitungsgleichung auf M. Die Formulierung des starken Maximumprinzips orientiert sich an Chavel [Cha84, S. 180], wobei es gegenüber Chavel offensichtlich ausreicht, wenn u im Parameter t nur einmal stetig differenzierbar ist.

Bemerkung: Mit demselben Gedankengang wie dem in der Schlussbemerkung zum letzten Unterabschnitt folgt aus dem nächsten Theorem das starke Maximumprinzip für den Laplace-Beltrami-Operator aus Theorem 2.3.

Theorem 3.25 *Sei M Riemannsche Mannigfaltigkeit mit gegebenem Laplace-Beltrami Operator Δ und zugehörigem Wärmeleitungsoperator $L = \Delta - \frac{\partial}{\partial t}$ auf $M \times (0,\infty)$. Sei $u \in C^0(M \times [0,T])$ beschränkt, sowie auf $M \times (0,T)$ C^2 in den Raumvariablen und C^1 in der Zeitvariable. Es gelte ausserdem*

$$Lu \geq (\leq) 0 \text{ auf } M \times (0,T)$$

Wenn dann ein $(x_0, t_0) \in M \times (0, T]$ *existiert, so dass*

$$u(x_0, t_0) = \sup_{M\times[0,T]} u \ (\inf_{M\times[0,T]} u),$$

Dann gilt bereits

$$u|_{M\times[0,t_0]} = u(x_0, t_0).$$

Bemerkung: Offensichtlich spielt es keine Rolle, ob der Startzeitpunkt 0 oder ein beliebiges $t > 0$ ist. Wenn M kompakt ist, u aber für kleines t unbeschränkt, d.h. $u \overset{t\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \infty$, dann gilt obiges Maximumprinzip auf jedem $M \times [\epsilon, T]$.

Konvention: in dieser Arbeit wird auch dann von der Anwendung eines Maximumprinzips gesprochen werden, wenn eigentlich das zugehörige Minimumprinzip gemeint ist.

Beweis: Es reicht, den Fall $Lu \geq 0$ zu betrachten, da der Fall $Lu \leq 0$ dann durch Anwendung des ersten Falles auf $-u$ folgt.

Wir nehmen an, es existiere eine Stelle (x_1, t_0) auf M zur Zeit t_0, so dass $u(x_1, t_0) < u(x_0, t_0) = \sup_{M\times[0,T]} u$. Da M kompakt ist, existiert eine Verbindungsgeodätische γ mit $\gamma(0) = x_0, \gamma(S) = x_1$. Entlang γ gibt es $s_0 = \max\{s \in [0, S] | u(\gamma(s), t_0) = u(x_0, t_0)\}$, den letzte Punkt entlang γ, an dem u noch sein Supremum annimmt. Offensichtlich gilt $s_0 < S$. Wir bezeichnen $p = (\gamma(s_0), t_0)$ und führen in einer Umgebung $U \times (0, t_0 + \epsilon) \subseteq M \times (0, \infty)$ von p lokale Koordinaten mithilfe einer Karte x ein. Als weitere Bezeichnungen gelten: $\Omega = x(U \times (0, t_0 + \epsilon)), \tilde{f} = f \circ x^{-1}, \tilde{g^{ij}} = g^{ij}(x^{-1}(x(p)))$ und entsprechend $\tilde{\Gamma^i_{kl}} = \Gamma^i_{kl}(x^{-1}(x(p)))$.

Dann gilt für die Funktion $\tilde{f} = f \circ x^{-1}$ wegen der Definition der Wärmeleitungsgleichung auf M, dass sie auf Ω die OBdA gleichmäßig parabolische Differentialungleichung

$$\tilde{L}(\tilde{f}) \equiv \tilde{g^{ij}} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^i \partial x^j} - \tilde{g^{kl}} \tilde{\Gamma^i_{kl}} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f} \geq 0$$

erfüllt (siehe Definition 3.2 und nachfolgende Bemerkung). Ausserdem nimmt die Funktion $\tilde{f}$ ihr Supremum im Punkt $x(p)$ im Inneren von Ω an, und ist deswegen nach Theorem 3.22 oder Korollar 3.23 auf ganz Ω konstant. Also ist auch f auf $x^{-1}(\Omega)$ konstant, i.e. zur Zeit t_0 auf der ganzen Umgebung U von $\gamma(s_0)$. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalitätseigenschaft von s_0 entlang γ. Da sich auf jeder lokalen Karte die Konstanz von u auf frühere Zeiten mit Korollar 3.23 sofort fortsetzt, ist der Beweis abgeschlossen.

□

Für den Beweis oben interessierte am Wärmeleitungsoperator nur seine Form in Karten. Dieser Form genügen aber auch allgemeinere Differentialoperatoren, weswegen sofort das nächste Theorem folgt:

Theorem 3.26 (Verallgemeinerung) *Das letzte Theorem bleibt richtig, wenn der Operator* L *die allgemeinere Form*

$$Lu \equiv \Delta u + g^{ij} b_j \nabla_i u - \frac{\partial}{\partial t} u$$

hat, wo $b_k = b_k(x, t)$ *glatte beschränkte Koeffizienten sind.*

Beweis: L ist in Karten gleichmäßig parabolisch, da sich an der Beschränktheit der Koeffizienten der ersten partiellen Ableitungen gegenüber dem Wärmeleitungsoperator nichts ändert und die Ableitungen zweiter Ordnung nachwievor die gleichmäßig positiv definite Koeffizientenmatrix g^{ij} haben.

□

Das nächste Theorem stellt die Riemannsche Version von Theorem 3.24 dar. Im Sinne des letzten Theorems, und da in dieser Arbeit der Spezialfall, in dem L der Wärmeleitungsoperator ist nicht gebraucht wird, ist es hier gleich für den allgemeineren Operator formuliert.

Theorem 3.27 *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M und $x_0 \in \partial M$. Sei weiterhin $O_{space} \subseteq \overline{M}$ relativ offen in $\overline{M}$ und $x_0 \in O_{space}$, und sei $O_{t_0} = O_{space} \times (0, t_0]$ sowie $O = O_{space} \times (0, t_0 + \epsilon)$.*

Nun Sei $u : M \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben so, dass

$$Lu \equiv \Delta u + g^{ij} b_j \nabla_i u - \frac{\partial}{\partial t} u \geq 0 \quad \text{in } O$$

wo $b_k = b_k(x,t)$ glatte beschränkte Koeffizienten sind.

Wenn dann $u(x_0, t_0) = m = \max_O u$ und $u < m$ auf $O_{t_0} \backslash \partial M \times (0, t_0]$ (d.h. u nimmt sein Maximum nicht zusätzlich irgendwann auf dem Inneren von M an), so gilt

$$\frac{\partial}{\partial \nu} u(x_0, t_0) > 0,$$

wo ν eine beliebige von O_{t_0} auswärts zeigende Richtung bezeichnet.

Beweisidee / Skizze: Sei $n = dim M$. Der Rand von M sei, wie in der Standarddefinition des Randes einer Riemannschen Mannigfaltigkeit üblich, in Karten über einem Halbraum des $\mathbb{R}^n$ modelliert. Wir führen um den Punkt $P \in \partial M$ lokale Koordinaten von einer solchen Karte ein. Da es sich um eine lokale Aussage handelt, genügt die Betrachtung dieser einen Karte. Wegen der Definitionen von Δ und $\frac{\partial}{\partial t}$ liegt dann die Situation von Theorem 3.24 auf Seite 58 dieser Arbeit vor.

□

Das folgende Lemma ist eine Anwendung des starken Maximumprinzips aus Theorem 3.25, die Hamilton [Ham93] zum Beweis mehrer Abschätzungen benötigt.

Lemma 3.28 (MP-Argument) *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, kompakt und ohne Rand. Sei weiter $h : M \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $h \longrightarrow \infty$ für $t \longrightarrow 0$ (die also insbes. ihr Infimum nicht bei $t = 0$ annimmt). Sei ausserdem der Differentialoperator*

$$Lh \equiv \Delta h + g^{ij} b_j \nabla_i h - \frac{\partial}{\partial t} h$$

gegeben, wo $b_k = b_k(x,t)$ glatte beschränkte Koeffizienten sind. Wenn dann $Lh \leq 0$ wo immer $h \leq 0$, so bleibt für alle Zeiten und überall $h \geq 0$. Insbesondere gilt, falls L der Wärmeleitungsoperator ist, die Formulierung: wenn $\frac{\partial}{\partial t} h \geq \Delta h$ wo immer $h \leq 0$, dann bleibt für alle Zeiten und überall $h \geq 0$.

Beweis: $M \times [\epsilon, T]$ ist kompakt und h dort stetig. Weil h für $t = 0$ sein Infimum nicht annimmt, existiert $(x_0, t_0) \in M \times (0, T]$: $h(x_0, t_0) = \inf_{M\times[0,T]} h$. Falls $h(x_0, t_0) \geq 0$, so sind wir fertig. Wir nehmen also $h(x_0, t_0) = -\epsilon < 0$ an und suchen den Widerspruch.

Die Menge $A = \{(x,t)|h(x,t) < 0\}$ ist nichtleer und als stetiges Urbild einer offenen Menge relativ offen in $M \times (0, T]$. Wegen $(x_0, t_0) \in A$ gibt es eine offene Umgebung U von x_0 in M und ein kleines offenes Intervall $I \subseteq (0, T]$ um t_0, so dass $h < 0$ auf ganz $U \times I$. Da für kleines t h sicher positiv wird, lässt sich das Intervall I solange nach unten ausweiten, bis es einen Punkt $(x_1, t_1) \in \partial U \times I$ gibt, für den $h(x_1, t_1) = 0$ (nenne das neue I immernoch I).

Auf der kleinen Mannigfaltigkeit $U \times I$ ist überall $h < 0$, also nach Voraussetzung $Lh \leq 0$, und h nimmt sein Minimum im Inneren von $U \times I$ an. Wegen des starken Maximumprinzips aus der Verallgemeinerung 3.26 von Theorem 3.25 ist daher $h \equiv \inf h \equiv -\epsilon$ auf ganz $U \times I \cap \{t \leq t_0\}$. Dann aber kann h an der Stelle (x_1, t_1) nicht stetig sein und der Beweis ist beendet.

□

Ein Maximumprinzip für symmetrische (0,2)-Tensorfelder

Für den Beweis seiner Matrix-Harnack-Ungleichung benötigt Hamilton ein Maximumprinzip für die Eigenwerte symmetrischer $n \times n$ Matrizen (d.h. symmetrischer zweifach kovarianter Tensoren auf TM). Hamilton zitiert für dieses Maximumprinzip sich selbst (das benötigte Theorem ist Theorem 9.1 aus [Ham82], S. 279, und steht nicht, wie Hamilton bibliographiert, in [Ham86]). Anders als Hamilton in seiner Arbeit betrachten wir hier allerdings keinen Fluss, weswegen $\frac{\partial}{\partial t} g \equiv 0$ und wir den Originalbeweis sogar vereinfacht übernehmen können. Es ist aus der linearen Algebra bekannt, dass symmetrische $n \times n$ Matrizen n reelle Eigenwerte besitzen (ihr charakteristisches Polynom zerfällt über $\mathbb{R}$ vollständig in Linearfaktoren).

Definition 3.29 (Null-Bedingung) *(Formulierung für Normalkoordinaten) Sei $F : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ Funktion. Sei weiterhin eine symmetrische Matrix $N_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. Man sagt, F erfülle die Null-Bedingung für Eigenwerte, falls gilt, dass $F(N_{ij})$ symmetrische Matrix ist und falls für beliebige Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$*

$$(\forall j : \quad N_{ij} v^i = 0) \quad \Longrightarrow \quad F(N_{kl})_{ij} v^i v^j \geq 0$$

Bemerkung: Die letztere Bedingung bedeutet, falls man F als Abbildung zwischen Mengen von Eigenwerten betrachtet, dass Null-Eigenwerte der Matrix N_{ij} auf nichtnegative Eigenwerte von $F(N_{ij})$ abgebildet werden. Es ist keine Aussage über negative Eigenwerte oder strikt positive Eigenwerte enthalten.

Theorem 3.30 (Hamiltonsches Matrix-Maximumprinzip) *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Metrik g und N_{ij} Koeffizienten eines symmetrischen $(0,2)$-Tensorfeldes auf $M \times [0, T]$. Sei weiterhin b^k glattes Vektorfeld auf $M \times [0, T]$. Sei auf einem Intervall $0 \leq t \leq T$*

$$\frac{\partial}{\partial t} N_{ij} = \Delta N_{ij} + b^k \nabla_k N_{ij} + p(N)_{ij}, \tag{3.43}$$

wo $p(N)_{ij} = p(N_{ij}, g_{ij})$ ein Polynom in N_{ij} ist, dessen N-Potenzen aus der Kontraktion von Produkten von N_{ij} mit sich selbst durch die Metrik bestehen. Erfülle weiterhin das Polynom p die obige Null-Bedingung für Eigenwerte. Wenn dann im Eigenwertsinne $N_{ij} \geq 0$ in $t = 0$ gilt, so bleibt $N_{ij} \geq 0$ für alle Zeiten $t \in [0, T]$.

Beweisidee / Skizze: Man unterteilt $(0, T)$ in endlich viele Teilintervalle der noch zu bestimmenden Länge δ. Das Theorem wird für das erste Teilintervall bewiesen und dann der Beweis iteriert, um ganz $(0, T)$ abzudecken. Zunächst schafft man sich auf $0 \leq t \leq \delta$ einen besseren Tensor

$$\tilde{N_{ij}} = N_{ij} + \epsilon(\delta + t)g_{ij}$$

und zeigt, dass für beliebig kleine positive ϵ gilt, dass $\tilde{N_{ij}} > 0$. Man begibt sich dazu an die hypothetische Stelle (x, θ), an der der neue Tensor seinen frühesten Null-Eigenwert (und damit einen Null-Eigenvektor $v, |v| = 1$) bekommt. Weil das Polynom p die Null-Bedingung erfüllt gilt dann $p(\tilde{N_{ij}}(x, \theta)) \geq 0$. Wegen seiner Stetigkeitseigenschaften kann man ausserdem $|p(\tilde{N})_{ij} - p(N)_{ij}| \leq C|\tilde{N_{ij}} - N_{ij}|$ abschätzen, wo für kleines ϵ und δ die Konstante C nur noch von M und $|N_{ij}|$ abhängt. Man erhält also

$$p(N)_{ij} \geq -C\epsilon\delta. \tag{3.44}$$

Nun erweitert man v im Raum parallel (bezüglich des Zusammenhangs auf M) und Zeitunabhängig zu einem glatten Einheitsvektorfeld auf eine Umgebung von (x, θ) und betrachtet die Funktion $f = \tilde{N_{ij}} v^i v^j$. Wegen der günstigen Wahl des Vektorfeldes v erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{N_{ij}} v^i v^j) = (\frac{\partial}{\partial t}\tilde{N_{ij}}) v^i v^j = (\frac{\partial}{\partial t}(N_{ij} + \epsilon(\delta + t)g_{ij})) v^i v^j = (\frac{\partial}{\partial t} N_{ij}) v^i v^j + \epsilon$$
$$\nabla_k f = \nabla_k(\tilde{N_{ij}} v^i v^j) = \nabla_k(\tilde{N_{ij}}) v^i v^j = \ldots = (\nabla_k N_{ij}) v^i v^j$$
$$\Delta f = \nabla_k \nabla_k f = \nabla_k((\nabla_k N_{ij}) v^i v^j) = (\Delta N_{ij}) v^i v^j$$

Die Funktion f wird in (x, θ) minimal im Sinne von $\frac{\partial}{\partial t} f < 0, \nabla f = 0, \Delta f \geq 0$. Diese Tatsache beschert dann die Abschätzung

$$\begin{aligned} -\epsilon > \frac{\partial}{\partial t} f - \epsilon &= (\frac{\partial}{\partial t} N_{ij}) v^i v^j \\ &= (\Delta N_{ij}) v^i v^j + b^k(\nabla_k N_{ij}) v^i v^j + p(N)_{ij} v^i v^j \geq p(N)_{ij} v^i v^j. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Aus (3.44) und (3.45) folgt dann $\epsilon \leq C\epsilon\delta$, was man durch genügend kleine Wahl von δ (will $C\delta < 1$) zu einem Widerspruch machen kann.

□

Man erhält sofort die für Hamiltons Anwendung passende Form der Aussage (Bezeichnungen wie oben)

Korollar 3.31 *Die Aussage des obigen Theorems bleibt richtig, falls statt der Evolutionsgleichung (3.43) für N_{ij} nur die Evolutionsabschätzung*

$$\frac{\partial}{\partial t} N_{ij} \geq \Delta N_{ij} + b^k \nabla_k N_{ij} + p(N)_{ij} \tag{3.46}$$

gilt.

Beweis: Im Beweis des Theorems geht die Evolutionsgleichung nur in (3.45) ein, und die entsprechende Zeile bleibt in der Relation zwischen ihren äussersten Termen offensichtlich richtig, wenn statt der Gleichung die Ungleichung (3.46) steht.

□

3.1.5 Miscellanea

Im letzten Abschnitt dieser Arbeit sollen die Beweise mehrerer Harnackungleichungen ausgeführt werden. Dazu werden auch die nun folgenden Lemmata und Theoreme vonnöten sein. Nach Ansicht des Autors würden die Zitate innerhalb der Beweise des letzten Abschnitts den dortigen gedanklichen Ablauf eher unklarer machen. An dieser Stelle stehen sie etwas unmotiviert im Raum, stören aber weniger. Das erste Lemma des Abschnitts ist der Nachtrag einer Abschätzung, die bei der Konstruktion der Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung auf kompakten Mannigfaltigkeiten benötigt wurde.

Lemma 3.32 *Seien x, y, z Punkte eines beliebigen metrischen Raumes mit Metrik d. Dann gilt für alle $\tau \in (0, t)$ die Abschätzung*

$$\frac{d^2(x,y)}{\tau} + \frac{d^2(y,z)}{t-\tau} \geq \frac{d^2(x,z)}{t}$$

Beweis: Falls zwei der Punkte x, y, z zusammenfallen, ist die Behauptung evident. Es gilt ansonsten für $a, b \geq 0$ und $a > 0$ oder $b > 0$,

$$f : (0,t) \longrightarrow \mathbb{R} : \tau \mapsto \frac{a^2}{\tau} + \frac{b^2}{t-\tau} \quad \Rightarrow \quad f'(\tau)\frac{b^2\tau^2 - a^2(t-\tau)^2}{(t-\tau)^2\tau^2}$$

Die Ableitung von f verschwindet im Definitionsbereich also genau bei $\tau_{min} = ta/(a+b)$ und da f an den Rändern seines Definitionsbereichs gegen $+\infty$ strebt, hat die Funktion an dieser Stelle ihr globales Minimum $f(\tau_{min}) = (a+b)^2/t$ und die Behauptung folgt mit $a = d(x,y)$, $b = d(y,z)$ aus der Dreiecksungleichung für die Metrik d.

□

Das zweite Lemma ist eine einfache Abschätzung der Frobeniusnorm einer symmetrischen Matrix gegen ihre eigene Spur:

Lemma 3.33 (Spurlemma) *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrix. Dann gilt*

$$|A|^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq \frac{1}{n}\big(tr(A)\big)^2 \tag{3.47}$$

Beweis: Mithilfe der Tatsache, dass A als symmetrische Matrix n reelle Eigenwerte besitzt kann man sehen, dass

$$|A|^2 - \frac{1}{n}\big(\mathrm{tr}(A)\big)^2 = \sum_i \lambda_i^2 - \frac{1}{n}\big(\sum_i \lambda_i\big)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)^2) \geq 0$$

Ausführlich z.B. in[Hui96], im Anschluss an Theorem 1.13.

□

Den folgenden Volumenvergleichssatz benötigt Hamilton für den Beweis eines Korollars. Er findet sich in geringfügig strengerer Form bei Chavel [Cha95], S.119.

Theorem 3.34 (Günther, Bishop) *Bezeichne $V_\delta(r)$ das Volumen einer Kugel $B(r)$ in der Raumform $\mathbb{M}_\delta$ mit konstanten Schnittkrümmungen δ und sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n, deren Schnittkrümmungen alle kleiner oder gleich δ sind. Wir notieren mit $V(x;r)$ das Volumen der Kugel $B_x(r) \subseteq M$ um $x \in M$ mit Radius r. Weiterhin sei inj(x) der Injektivitätsradius von $x \in M$, also der geodätische Abstand von x zum nächstgelegenen Punkt in seinem cut locus. Dann gilt für alle $x \in M$ die Ungleichung*

$$V(x;r) \geq V_\delta(r)$$

für alle Radien $r \leq \min\{inj(x), \pi/\sqrt{\delta}\}$.

Die nächste Proposition braucht Hamilton für dasselbe Korollar, wie auch schon den vorangegangenen Volumenvergleichssatz. Sie ist zugleich eine der direktest einsehbaren Folgerungen für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Die Aussage findet sich z.B. bei Chavel [Cha84], S.136.

Proposition 3.35 *Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand und $f(x,t)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $M \times (0,T)$. Dann ist*

$$t \longrightarrow \int_M f(x,t)dVol(x)$$

eine in t konstante Funktion.

Beweis: Da M kompakt ist, sind alle vorkommenden Integrale endlich. Es gilt das Divergenztheorem auf M und Parameterdifferentiationen können unter dem Integral ausgeführt werden. folglich gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_M f dV(x) = \int_M \frac{\partial}{\partial t} f d(x) = \int_M \Delta f dV(x) = \int_M \mathrm{div}(\nabla f) dV(x) = 0,$$

da das nun mit dem Divergenztheorem folgende Randintegral ein Integral über die leere Menge wäre.

□

3.2 Neuere Harnack-Ungleichungen für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

3.2.1 Harnack-Ungleichungen in Spurform

Den Schwerpunkt für den Rest der vorliegenden Arbeit liefern die Artikel [Ham93] von R.S.Hamilton bzw. [CH97] von Chow und Hamilton. Historisch gesehen ist Hamiltons Arbeit ([Ham93]) eine Reaktion auf den folgenden von Li und Yau in [LY86] bewiesenen Satz.

Theorem 3.36 (Li-Yau [LY86], S.157) *Sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n mit $Ric \geq 0$. Falls $\partial M \neq \varnothing$, so sei er konvex, d.h. es habe die zweite Fundamentalform II von ∂M keine negativen Eigenwerte ($II \geq 0$). Sei $u \geq 0$ Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $M \times (0, \infty)$ mit homogenen Neumann-Randbedingungen*

$$\frac{\partial}{\partial \nu} u = 0 \qquad \textit{auf} \;\; \partial M \times (0, \infty)$$

Dann gilt auf $M \times (0, \infty)$ die Abschätzung:

$$\Delta u - \frac{|\nabla u|^2}{u} + \frac{n}{2t} u \geq 0 \tag{3.48}$$

Für den Beweis machen sich Yau un Li folgendes Lemma zunutze, das hier auf einen Spezialfall reduziert wiedergegeben werden kann (der Beweis wird dadurch übersichtlicher)

Lemma 3.37 (Li-Yau [LY86], S.155) *Sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $Ric \geq 0$ Sei $f(x,t)$ glatte Funktion auf $M \times [0, \infty)$ und erfülle die Differentialgleichung*

$$\Delta f - \frac{\partial}{\partial t} f = -|\nabla f|^2. \tag{3.49}$$

Wenn dann

$$F := t(|\nabla f|^2 - \frac{\partial}{\partial t} f) = -t \Delta f \tag{3.50}$$

definiert wird, so gilt die Abschätzung

$$\Delta F - \frac{\partial}{\partial t} F \geq -2\langle \nabla f, \nabla F \rangle - \frac{1}{t} F + \frac{2t}{n} \big(|\nabla f|^2 - \frac{\partial}{\partial t} f \big)^2 \tag{3.51}$$

Bemerkung: Wenn u eine positive Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $M \times [0, \infty)$ ist, dann erfüllt insbesondere die Funktion $f = \log u$ die Bedingung (3.49). Die Definition von F ist für positive t zu verstehen, und mit $F(x, 0) = 0$ stetig nach $t = 0$ fortsetzbar, weil mit u auch f glatt aus seinen (beschränkten) Anfangswerten evolviert. Will man statt einer stetig nach $t = 0$ fortsetzbaren Lösung z.B. die Fundamentallösung behandeln, so kann dies (siehe den Beweis des Theorems) nur auf Zeitintervallen $[\tau, \infty)$ geschehen, wo $\tau > 0$ eine beliebig kleine aber eben echt positive Zeit ist.

Beweis: Man rechnet nach, dass

$$\nabla_i F = t \big(2 \nabla_i \nabla_k f \nabla_k f - \frac{\partial}{\partial t} \nabla_i f \big) \tag{3.52}$$

$$\Delta F = \nabla_i \nabla_i F = t \big(2 \Delta \nabla_k f \nabla_k f + 2 \nabla_i \nabla_k f \nabla_i \nabla_k f - \frac{\partial}{\partial t} \Delta f \big). \tag{3.53}$$

Wegen der Ricci-Formel aus dem Vertauschungslemma 2.4 und wegen $Ric \geq 0$, bzw. wegen der Spurabschätzung aus Lemma 3.33 gilt, dass

$$2 \Delta \nabla_k f \nabla_k f \geq 2 \nabla_k \Delta f \nabla_k f \quad \text{bzw.} \quad 2 \nabla_i \nabla_k f \nabla_i \nabla_k f \geq \frac{2}{n} (\Delta f)^2$$

Also ist

$$\Delta F \geq t\big(\frac{2}{n}(\Delta f)^2 + 2\langle \nabla \Delta f,\, \nabla f\rangle - \frac{\partial}{\partial t}\Delta f\big)$$

Nun kann man wegen der Voraussetzung (3.49) auf der rechten Seite ersetzen

$$\Delta f = \frac{\partial}{\partial t} f - |\nabla f|^2 = -\frac{1}{t}F,$$

und bekommt

$$\begin{aligned}\Delta F \geq & t\Big(\frac{2}{n}\big(\frac{\partial}{\partial t}f - |\nabla f|^2\big)^2 + 2\langle \nabla - \frac{1}{t}F,\, \nabla f\rangle - \frac{\partial}{\partial t}\big(-\frac{1}{t}F\big)\Big)\\ =&\frac{2t}{n}\big(\frac{\partial}{\partial t}f - |\nabla f|^2\big)^2 - 2\langle \nabla F,\, \nabla f\rangle + \frac{\partial}{\partial t}\big(t\frac{1}{t}F\big) - \frac{\partial}{\partial t}(t)\frac{1}{t}F\\ =&\frac{2t}{n}\big(\frac{\partial}{\partial t}f - |\nabla f|^2\big)^2 - 2\langle \nabla F,\, \nabla f\rangle + \frac{\partial}{\partial t}F - \frac{1}{t}F\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann durch Subtraktion von $\frac{\partial}{\partial t}F$.

□

Beweis des Theorems: Für u ist Glattheit nur auf dem offenen Zeitintervall $t > 0$ vorausgesetzt. Man wählt daher zunächst $\tau > 0$ beliebig aber fest. Die Funktion $f(x,t) := \log(u(x, t+\tau) + \epsilon)$ ist dann glatt auch auf dem abgeschlossenen Zeitintervall $t \geq 0$ und erfüllt insbesondere die Bedingung (3.49). Da τ beliebig klein gewählt werden darf, ist mit der Definition von F aus (3.50) das Theorem dann bewiesen, wenn $F \leq n/2$ gezeigt ist. Dazu bringt man zuerst die Aussage des letzten Lemmas auf eine passende Gestalt, um dann nacheinander durch Kontraposition zu zeigen, dass F über diesen Wert weder im Inneren von M noch auf ∂M wachsen kann. Im ersten Fall braucht man dazu nichteinmal ein Maximumprinzip, womit auch schon gesagt ist, dass der zweite Fall nicht ohne auskommt.

Für F gilt wegen seiner Definition, dass

$$\frac{1}{t}F^2 = t\big(\frac{\partial}{\partial t}f - |\nabla f|^2\big)^2.$$

Mit dem letzten Lemma ist dann

$$\Delta F - \frac{\partial}{\partial t}F \geq -2\langle \nabla f,\, \nabla F\rangle - \frac{1}{t}F + \frac{2}{tn}F^2 = -2\langle \nabla f,\, \nabla F\rangle + \frac{2}{nt}F\Big(F - \frac{n}{2}\Big). \qquad (3.54)$$

Zuerst vermuten wir einen Punkt $(x_0, t_0) \in M \times [0, T]$ mit $F(x_0, t_0) > n/2 > 0$. Da f glatt für $t \geq 0$, insbesondere also für $t \longrightarrow 0$ beschränkt ist, ist F in $t = 0$ definiert und $F(x, 0) = 0 \ \ \forall x \in M$. Es muss also $t_0 > 0$ sein und man kann die Bedingungen an ein lokales Maximum ausnutzen: $\Delta F(x_0, t_0) \leq 0$ und $\nabla F(x_0, t_0) = 0$. Dann aber gilt

$$-\frac{\partial}{\partial t}F \geq \Delta F - \frac{\partial}{\partial t}F \geq -2\langle \nabla f,\, \nabla F\rangle + \frac{2}{nt}F\Big(F - \frac{n}{2}\Big) = \frac{2}{nt}F\Big(F - \frac{n}{2}\Big) > 0,$$

so muss der Wert von F am selben Ort x_0 vor kurzer Zeit noch größer gewesen sein, was ein Widerspruch ist.

Daher kann allenfalls noch $F(x_0, t_0) > n/2 > 0$ für einen Punkt $(x_0, t_0) \in \partial M \times (0, T]$ gelten. In einer Umgebung dieses Punktes kann man (3.54) umformulieren zu

$$\Delta F + 2\langle \nabla f, \nabla F \rangle - \frac{\partial}{\partial t} F \geq 0$$

Das starke Maximumprinzip in der Fassung für Randpunkte (Theorem 3.27) sagt dann, dass

$$\frac{\partial}{\partial \nu} F(x_0, t_0) > 0, \tag{3.55}$$

wo ν lokale äussere Einheitsnormale an ∂M in (x_0, t_0) ist. Sei nun mit (e_α), $\alpha = 1, .., n$ ein orthonormales, an ∂M adaptiertes N-Bein gegeben, so dass $\nu = e_n$. Im Folgenden laufen griechische Indizes über $1, .., n$, lateinische über $1, .., n-1$, und es gelte die Schreibweise $\nabla_\alpha = \nabla_{e_\alpha}$. Man berechnet dann

$$\frac{\partial}{\partial \nu} F = \nabla_n F = 2t \nabla_n \nabla_\alpha f \nabla_\alpha f - t \nabla_n \frac{\partial}{\partial t} f = 2t \nabla_n \nabla_\alpha f \nabla_\alpha f,$$

weil $\nabla_n \frac{\partial}{\partial t} f = \frac{\partial}{\partial t} \nabla_n f = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla_n(\log(u + \epsilon)) = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial}{\partial \nu} u/u) = \frac{\partial}{\partial t}(\equiv 0) = 0$ (es gelten nach Voraussetzung homogene Neumann-Randbedingungen). Um die lokale Konvexität von ∂M ins Spiel zu bringen, fasst man nun ∂M als Hyperfläche in M auf und drückt den verbleibenden Term mit Hilfe der zweiten Fundamentalform des Randes aus (Zusammenhang, Christoffelsymbole und Skalarprodukt sind von M)

$$\begin{aligned} 2t \nabla_n \nabla_\alpha f \nabla_\alpha f &= 2t \langle \nabla_n \nabla f, \nabla f \rangle = 2t \langle \nabla_n (e_\alpha(f) e_\alpha), \nabla f \rangle \\ &= 2t \langle e_n(e_\alpha(f)) \cdot e_\alpha + \qquad\qquad\qquad\qquad e_\alpha(f) \cdot \nabla_n e_\alpha, \nabla f \rangle \\ &= 2t \langle e_\alpha(e_n(f)) \cdot e_\alpha + [e_\alpha, e_n](f) \cdot e_\alpha + \qquad e_\alpha(f) \cdot \nabla_n e_\alpha, \nabla f \rangle, \end{aligned}$$

wo $[\cdot, \cdot]$ die Lie-Klammer ist. Wiederum wegen der Neumann-Randbedingungen ist dann auf ∂M konstant $e_n(f) = \frac{\partial}{\partial \nu} f = 0$. Daher verschwinden alle partiellen Ableitungen der Funktion $\frac{\partial}{\partial \nu} f$ tangential zu ∂M, mit anderen Worten: $e_\alpha(e_n(f)) \cdot e_\alpha = (\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \nu} f) \cdot e_n$. Aus demselben Grund ist $\langle (\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \nu} f) \cdot e_n, \nabla f \rangle = 0$, und der Term verschwindet aus der Rechnung. Nun benutzt man die Definition des Torsionstensors, und erinnert sich der Tatsache, dass der Levi-Civita-Zusammenhang Torsionsfrei ist, also gilt

$$[e_\alpha, e_n](f) \cdot e_\alpha = \Gamma^\beta_{n\alpha} e_\beta(f) \cdot e_\alpha - \Gamma^\beta_{\alpha n} e_\beta(f) \cdot e_\alpha.$$

Die Christoffelsymbole sind in einem ONB im allgemeinen nicht symmetrisch in den beiden unteren Indizes, aber es gilt wegen der Orthonormalität $\Gamma^\beta_{n\alpha} = -\Gamma^\alpha_{n\beta}$. Deswegen folgt

$$\begin{aligned} 2t \nabla_n \nabla_\alpha f \nabla_\alpha f &= 2t \langle \Gamma^\beta_{n\alpha} e_\beta(f) \cdot e_\alpha - \Gamma^\beta_{\alpha n} e_\beta(f) \cdot e_\alpha + e_\alpha(f) \cdot \Gamma^\beta_{n\alpha} e_\beta, \nabla f \rangle \\ &= 2t \langle -\Gamma^\beta_{\alpha n} e_\beta(f) \cdot e_\alpha, \nabla f \rangle \end{aligned}$$

Nocheinmal kommt ins Spiel, dass∇f keinen Anteil in Richtung e_n besitzt. Es ist

$$\begin{aligned} 2t \nabla_n \nabla_\alpha f \nabla_\alpha f =& 2t \langle -\Gamma^\beta_{\alpha n} e_\beta(f) \cdot e_\alpha, \nabla f \rangle \\ =& -2t \Gamma^\beta_{\alpha n} e_\beta(f) e_\gamma(f) \langle e_\alpha, e_\gamma \rangle \\ =& -2t \Gamma^\beta_{\alpha n} e_\beta(f) e_i(f) g_{\alpha i} \\ =& -2t \Gamma^\beta_{in} e_\beta(f) e_i(f) = -2t \Gamma^j_{in} e_j(f) e_i(f) \end{aligned}$$

Der letzte Schritt gilt wegen der Antisymmetrie $\Gamma^n_{in} = -\Gamma^n_{in}$. Jetzt lässt sich, wegen der Adaptiertheit des ONB an ∂M, der Ausdruck ganz in Größen der Geometrie von ∂M ausdrücken. Man erhält

$$\frac{\partial}{\partial\nu}F = 2t\nabla_n\nabla_\alpha f\nabla_\alpha f - 2th_{ij}\ {}^{\partial M}\nabla_j f\ {}^{\partial M}\nabla_i f < 0$$

wegen der positiven Definitheit der zweiten Fundamentalform von ∂M. Das ist ein Widerspruch zu (3.55), also muss überall $F \leq n/2$ gelten. Das Theorem folgt durch den Grenzübergang $\epsilon \longrightarrow 0$.

$\square$

Zum Vergleich nun das Hamiltonsche Theorem. Hamilton braucht mehrmals die folgende Rechnung.

Lemma 3.38 *Sei f Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf M, $f(x,t) \neq 0$. Dann gilt*

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{|\nabla f|^2}{f} = \Delta\frac{|\nabla f|^2}{f} - \frac{2}{f}\left|\nabla_i\nabla_j f - \frac{\nabla_i f\nabla_j f}{f}\right|^2 - 2R_{ij}\frac{\nabla_i f\nabla_j f}{f} \tag{3.56}$$

Beweis: Man rechnet in lokalen Normalkoordinaten um den Punkt $x \in M$. Es gilt an der Stelle (x,t) unter Verwendung der Ricci-Formel (2.6) aus Lemma 2.4 von Seite 10

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t}|\nabla f|^2}{f} = \frac{\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_i f\nabla_i f)}{f} = 2\frac{\nabla_i\frac{\partial}{\partial t}f\nabla_i f}{f} = 2\frac{\nabla_i\Delta f\nabla_i f}{f}$$

Unter Verwendung dieser Tatsache sieht man, dass

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\frac{|\nabla f|^2}{f} &= \frac{\frac{\partial}{\partial t}|\nabla f|^2}{f} - \frac{|\nabla f|^2\frac{\partial}{\partial t}f}{f^2}\\ &= 2\frac{\nabla_i\Delta f\nabla_i f}{f} - \frac{\nabla_i f\nabla_i f\Delta f}{f^2}.\end{aligned} \tag{3.57}$$

Von nun an geht die Wärmeleitungsgleichung nirgendwo im Beweis mehr ein. Es ist

$$\begin{aligned}\dots \quad &= 2\frac{\Delta\nabla_i f - R_{ji}\nabla_j f}{f} - \frac{\nabla_i f\nabla_i f\Delta f}{f^2}\\ &= 2\frac{\nabla_j\nabla_j\nabla_i f\nabla_i f}{f} - 2R_{ij}\frac{\nabla_j f\nabla_i f}{f} - \frac{\nabla_i f\nabla_i f\nabla_j\nabla_j f}{f^2}\end{aligned} \tag{3.58}$$

Auf der anderen Seite sieht man durch reines Rechnen und Ordnen, ohne mehr als Quotientenregeln oder Produktregeln anzuwenden, dass (über quadrierte Indizes wird ebenfalls summiert)

$$\begin{aligned}&\Delta\frac{|\nabla f|^2}{f} = \nabla_j\nabla_j\frac{\nabla_i f\nabla_i f}{f}\\ &= \nabla_j\left(2\frac{\nabla_j\nabla_i f\nabla_i f}{f} - \frac{\nabla_i f\nabla_i f\nabla_j f}{f^2}\right) =\\ &2\frac{\nabla_j\nabla_j\nabla_i f\nabla_i f}{f} - \frac{\nabla_j(\nabla_j f\nabla_i f\nabla_i f)}{f^2} + \frac{2}{f}\left((\nabla_j\nabla_i f)^2 - \frac{\nabla_j\nabla_i f\nabla_j f\nabla_i f}{f} + \frac{(\nabla_i f\nabla_j f)^2}{f^2}\right)\end{aligned}$$

Dabei steckt im zweiten Bruch eine Produktregel. Wenn man nun dieses Ergebnis von Gleichung (3.58) subtrahiert, so geschieht es wegen dieser Produktregel, dass der letzte Term von (3.58) ausgelöscht wird, dafür aber ein bekannter anderer Term bleibt. Ausserdem heben sich die jeweils ersten Terme gegenseitig weg. Es ist

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\frac{|\nabla f|^2}{f} - \Delta\frac{|\nabla f|^2}{f} = \\
&\quad -2R_{ij}\frac{\nabla_j f \nabla_i f}{f} + 2\frac{\nabla_j\nabla_i f \nabla_j f \nabla_i f}{f^2} - \frac{2}{f}\left((\nabla_j\nabla_i f)^2 - \frac{\nabla_j\nabla_i f \nabla_j f \nabla_i f}{f} + \frac{(\nabla_i f \nabla_j f)^2}{f^2}\right) \\
&\quad = -2R_{ij}\frac{\nabla_j f \nabla_i f}{f} - \frac{2}{f}\left(\nabla_j\nabla_i f - \frac{\nabla_i f \nabla_j f}{f}\right)^2,
\end{aligned}$$

wo im letzten Schritt den Term vor der Klammer in die Klammer gezogen und das Binom zusammengefasst worden ist. Da auch hier über quadrierte Indizes summiert wird, ist die Rechnung vollständig.

□

Theorem 3.39 (Hamilton [Ham93], S. 117) *Sei M eine n-dimensionale kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $Ric \geq -K, K \geq 0$. Wenn $f > 0$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf M ist, dann gilt die Abschätzung*

$$\Delta f - e^{-2Kt}\frac{|\nabla f|^2}{f} + e^{2Kt}\frac{n}{2t}f \geq 0 \tag{3.59}$$

Beweis: Man definiert die linke Seite der Behauptung als Hilfsfunktion

$$h = \frac{\partial}{\partial t}f - e^{-2Kt}\frac{|\nabla f|^2}{f} + e^{2Kt}\frac{n}{2t}f.$$

Das Theorem ist dann bewiesen, wenn $h \geq 0$. Das Argument benutzt Lemma 3.28 von Seite 61. Mit dessen Hilfe genügt es, zu erwähnen, dass $h \longrightarrow \infty$ für $t \longrightarrow 0$, weil h sein Infimum dann nicht bei $t = 0$ annehmen kann, und zu zeigen, dass $\frac{\partial}{\partial t}h \geq \Delta h$ wo immer $h \leq 0$. Man berechnet also zunächst, da die Exponentialausdrücke nur von t abhängen

$$\Delta h = \Delta\frac{\partial}{\partial t}f - e^{-2Kt}\Delta\left(\frac{|\nabla f|^2}{f}\right) + (\Delta f)e^{2Kt}\frac{n}{2t}. \tag{3.60}$$

Etwas umständlicher und unter Verwendung von Lemma 3.38 gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}h &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}f + 2Ke^{-2Kt}\frac{|\nabla f|^2}{f} - e^{-2Kt}\frac{\partial}{\partial t}\frac{|\nabla f|^2}{f} + e^{2Kt}\left(\frac{Kn}{t}f - \frac{n}{2t^2}f + \frac{n}{2t}\frac{\partial}{\partial t}f\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Delta f + 2Ke^{-2Kt}\frac{|\nabla f|^2}{f} + e^{2Kt}\left(\frac{Kn}{t}f - \frac{n}{2t^2}f + \frac{n}{2t}\frac{\partial}{\partial t}f\right) \\
&\qquad - e^{-2Kt}\left(\Delta\frac{|\nabla f|^2}{f} - \frac{2}{f}\left|\nabla_i\nabla_j f - \frac{\nabla_i f\nabla_j f}{f}\right|^2 - 2R_{ij}\frac{\nabla_i f\nabla_j f}{f}\right) \\
&\geq \frac{\partial}{\partial t}\Delta f + 2Ke^{-2Kt}\frac{|\nabla f|^2}{f} + e^{2Kt}\left(\frac{Kn}{t}f - \frac{n}{2t^2}f + \frac{n}{2t}\frac{\partial}{\partial t}f\right) \\
&\qquad - e^{-2Kt}\left(\Delta\frac{|\nabla f|^2}{f} - 2R_{ij}\frac{\nabla_i f\nabla_j f}{f}\right) + e^{-2Kt}\frac{2}{nf}\left(\frac{\partial}{\partial t}f - \frac{|\nabla f|^2}{f}\right)^2 \\
&\geq \frac{\partial}{\partial t}\Delta f - e^{-2Kt}\Delta\frac{|\nabla f|^2}{f} + e^{-2Kt}\frac{2}{nf}\left(\frac{\partial}{\partial t}f - \frac{|\nabla f|^2}{f}\right)^2 \\
&\qquad + e^{2Kt}\left(\frac{n}{2t}\Delta f - \frac{n}{2t^2}f\right).
\end{aligned}$$

Der vorletzte Schritt besteht aus der Spurabschätzung von Lemma 3.33 auf Seite 64. Im letzten Schritt wurde die untere Schranke für den Ricci-Tensor benutzt, um den Ricci-Term gegen den zweiten Bruch abzuschätzen und beide verschwinden zu lassen. Ausserdem ist bei den Termen mit Faktor e^{2Kt} der erste hinweggeschätzt und auf den letzten die Wärmeleitungseigenschaft von f angewandt worden. Da $\Delta\frac{\partial}{\partial t}f = \frac{\partial}{\partial t}\Delta f$ gilt, folgt jetzt mit (3.60), dass

$$\frac{\partial}{\partial t}h \geq \Delta h + e^{-2Kt}\frac{2}{nf}\left(\frac{\partial}{\partial t}f - \frac{|\nabla f|^2}{f}\right)^2 - e^{2Kt}\frac{n}{2t^2}f \tag{3.61}$$

Der Rest des Hamiltonschen Beweises bedarf keiner zusätzlichen Ausführungen mehr: Angenommen, es gibt ein (x,t) mit $h(x,t) \leq 0$, dann ist dort

$$e^{2Kt}\frac{n}{2t}f \leq -\frac{\partial}{\partial t}f + e^{-2Kt}\frac{|\nabla f|^2}{f} \leq -\frac{\partial}{\partial t}f + \frac{|\nabla f|^2}{f},$$

und die ganze Zeile ist offensichtlich nichtnegativ. Weiterhin gilt

$$\frac{1}{t} = \frac{2}{nf}e^{-2Kt}e^{2Kt}\frac{n}{2t}f$$

Oder äquivalent dazu, und dann weiter mit obiger Gleichung bei $h \leq 0$

$$\frac{1}{t}e^{2Kt}\frac{n}{2t}f = \frac{2}{nf}e^{-2Kt}(e^{2Kt}\frac{n}{2t}f)^2 \leq \frac{2}{nf}e^{-2Kt}\left(-\frac{\partial}{\partial t}f + \frac{|\nabla f|^2}{f}\right)^2$$

Also auch $\frac{\partial}{\partial t}h \geq \Delta h$, und der Beweis des Theorems ist abgeschlossen.

□

Bemerkung: Auf Seite 91 dieser Arbeit wird gezeigt, dass die Ungleichungen aus den Theoremen von Li-Yau sowie Hamilton für positive Zeiten t auf der Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung des $\mathbb{R}^n$ scharf sind. Die Formulierung für positive Funktion bei Hamilton im Gegensatz zu nichtnegativen bei Li-Yau ist kein tatsächlicher Unterschied zwischen den Geltungsbereichen der Sätze. Beide Theoreme gelten nicht bei $t = 0$ und eine nichtnegative Lösung, die nicht überall und immer konstant verschwindet für $t \neq 0$ wegen des später in dieser Arbeit bewiesenen Maximumprinzips (Theorem 3.25 auf Seite 59) schon echt positiv.

Unter der strengeren Krümmungsbedingung gelingt sogar eine Abschätzung, die den Platz unter der positiven Lösung besser ausnutzt, indem sie als untere Schranke für die Lösung nicht mehr die Konstante 0, sondern eine weitere Funktion u zulässt, die ihrerseits in die Abschätzung eingeht. Die Autoren der entsprechenden Arbeit (Bennet Chow und Richard S. Hamilton in [CH97]) sprechen daher von einer "constrained trace Harnack inequality" für die Wärmeleitungsgleichung. Auf den Begriff der Spur gehen wir im Anschluss an das folgende Ergebnis genauer ein.

Theorem 3.40 (Chow, Hamilton [CH97]) *Sei* (M, g) *Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Ric* ≥ 0. *Seien weiter* u, f *Funktionen auf* M *mit*

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \Delta u, \quad \frac{\partial}{\partial t}f = \Delta f \quad \text{und} \quad |u| < f$$

dann ist insbesondere f *strikt positiv und es gilt*

$$\frac{\Delta f}{f} - \frac{|\nabla f|^2}{f^2} + \frac{n}{2t} \geq \frac{|\nabla \frac{u}{f}|^2}{1 - (\frac{u}{f})^2} \tag{3.62}$$

Bemerkung: Wenn $u = Cf$, $C \in (-1, 1)$, so verschwindet die rechte Seite der Abschätzung im Theorem identisch, weil der Gradient im Zähler verschwindet, und man erhält die vorher schon betrachteten Abschätzungen zurück (Durchmultiplizieren mit f). Die Tatsache, dass die Funktion $u \equiv (1 - \epsilon)f$ den oben erwähnten "Platz" unter der Funktion f optimal ausnutzt, und dennoch nicht zu einer besseren Abschätzung führt, liegt daran, dass mit der unteren Schranke $(1 - \epsilon)f$ keine gegenüber der untersuchten Funktion f neue Information codiert wird.

Beweis: Siehe S. 93

An dieser Stelle lässt sich die eigentliche Harnack-Ungleichung formulieren und beweisen, die zwei Werte einer Lösung u der Wärmeleitungsgleichung an verschiedenen Stellen (x_1, t_1) und (x_2, t_2) miteinander vergleicht.

Korollar 3.41 (Harnack-Ungleichung) *Sei* M *eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension* n *mit Ric* ≥ 0. *Falls* $\partial M \neq \emptyset$, *so sei er konvex. Sei wie in Theorem 3.36* $u \geq 0$ *glatte Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf* $M \times (0, \infty)$ *mit homogenen Neumann-Randbedingungen auf* $\partial M \times (0, \infty)$. *Dann gilt für* $t_2 > t_1$ *und beliebige Punkte* x_1, x_2 *von* M *die Abschätzung*

$$u(x_2, t_2) \leq u(x_1, t_1) \cdot \left[\left(\frac{t_2}{t_1} \right)^{n/2} \cdot e^{\frac{1}{4(t_2 - t_1)} \cdot C(M, x_1, x_2)} \right], \tag{3.63}$$

wo $C(M, x_1, x_2) = \inf_{\gamma:[0,1] \longrightarrow M, \gamma(0) = x_2, \gamma(1) = x_1} \int_0^1 |\gamma'|^2 ds$ *ist.*

Beweis: Sei $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ so, dass $\gamma(0) = x_2, \gamma(1) = x_1$. γ existiert wegen der Existenz der Verbindungsgeodätischen (M ist vollständig) nach eventueller Umparametrisierung. Man betrachtet dann $\eta : [0,1] \longrightarrow M \times (0,\infty) : s \mapsto (\gamma(s), (1-s)t_2 + st_1)$. Entlang η gilt nacheinander wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechung, wegen der Kettenregel und wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, dass

$$\begin{aligned}\log(\frac{u(x_2,t_2)}{u(x_1,t_1)}) &= \log u(x_2,t_2) - \log u(x_1,t_1) = \int_\eta \frac{d}{ds}(\log u(\eta))ds \\ &= \int_0^1 \langle (\nabla \log u)(\eta(s)),\, \gamma'(s)\rangle + \frac{\partial}{\partial t}(\log u)(\gamma,t)\cdot \frac{d}{ds}((1-s)t_2 + st_1)ds \\ &\le \int_0^1 |\nabla \log u||\gamma'| + \frac{\partial}{\partial t}\log u \cdot (t_1 - t_2)ds \\ &\le \int_0^1 \frac{|\nabla u|}{u}|\gamma'| + (t_2 - t_1)\Big[\frac{n}{2t} - \frac{|\nabla u|^2}{u^2}\Big]ds.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt ist dabei die entscheidende Abschätzung aus Theorem 3.36 von Seite 66 eingegangen (man beachte den Vorzeichenwechsel). Mithilfe einer binomischen Abschätzung kann jetzt die Freiheit des Ausdrucks von u erkauft werden. Dazu nutzt man aus, dass $-(a-b)^2 \le 0$ und daher $2ab - a^2 \le b^2$ sind. Man setzt

$$a = \frac{|\nabla u|}{u}\cdot\sqrt{t_2 - t_1}\ , \quad b = \frac{|\gamma'|}{2\sqrt{t_2 - t_1}}$$

und bekommt

$$\frac{|\nabla u|}{u}|\gamma'| - \frac{|\nabla u|^2}{u^2}(t_2 - t_1) \le \frac{|\gamma'|^2}{4(t_2 - t_1)}.$$

Man kann also fortfahren

$$\begin{aligned}\log(\frac{u(x_2,t_2)}{u(x_1,t_1)}) &\le \int_0^1 (t_2 - t_1)\frac{n}{2t} + \frac{|\gamma'|^2}{4(t_2 - t_1)}ds = \frac{n}{2}\int_0^1 \frac{(t_2 - t_1)}{t_2 + s(t_1 - t_2)} + \int_0^1 \frac{|\gamma'|^2}{4(t_2 - t_1)} \\ &= \frac{n}{2}\log\frac{t_2}{t_1} + \frac{1}{4(t_2 - t_1)}\cdot\int_0^1 |\gamma'|^2 ds\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt, indem man diese Zeile in den Exponenten einer e-Funktion hebt.

□

3.2.2 Der Übergang zur Matrix-Harnack-Ungleichung

Der eigentliche Verdienst der oben schon zitierten Arbeit von Hamilton besteht in der Verallgemeinerung der Ungleichung aus dem Theorem von Li und Yau zu einer vollen Matrixungleichung. Sei $f > 0$ Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit M. Dann geschieht die erwähnte Verallgemeinerung in dem Sinne, dass statt des Δf als der Spur der Hessematrix von f, die volle zwei-Form mit den Koeffizienten $\nabla_i\nabla_j f$ im Ergebnis abgeschätzt werden kann. Besonders gut sehen kann man die Verwandtschaft zwischen dem Resultat von Li und Yau und dem von Hamilton in der Formulierung von Korollar 3.48. Statt

$$\frac{\partial}{\partial t}f - \frac{|\nabla f|^2}{f} + \frac{n}{2t}f \geq 0$$

haben wir nun

$$\nabla_i \nabla_j f - \frac{\nabla_i f \nabla_j f}{f} + \frac{1}{2t} f g_{ij} \geq 0.$$

Hamilton muss den Gewinn, in der Aussage seines Theorems mehr als nur die Spur der zweiten Ableitungen zu kontrollieren, allerdings damit bezahlen, dass bei seinen Voraussetzungen an die Krümmung von M ebenfalls statt einer Spur nun die einzelne Terme kontrolliert werden müssen. Präziser lässt sich das wie folgt formulieren: statt

$$\forall k = 1, .., n \quad Ric(e_k, e_k) = \sum_i Riem(e_k, e_i, e_k, e_i) \geq 0$$

brauchen wir jetzt

$$\forall i, k = 1, .., n \quad Riem(e_k, e_i, e_k, e_i) \geq 0,$$

also eine volle Kontrolle der Schnittkrümmungen, sowie zusätzlich die Forderung, dass alle kovarianten Ableitungen von Ric verschwinden. Hamilton beweist eine Matrix-Harnack-Ungleichung unter allgemeineren Krümmungsbedingungen ($R_{ikik} \geq -K$ und $|\nabla Ric| \leq L$). Die etwas kompliziertere Form, die die Ungleichung dadurch annimmt (siehe Theorem 3.47 auf Seite 83) bringt es mit sich, dass er ausserdem Abschätzungen für Δf und $|\nabla f|^2$ gegen ein Produkt von f mit Konstanten braucht, die wiederum nur von der Geometrie von M abhängen. Für diese Abschätzungen braucht er die fünf hier als Vorarbeit gegebenen Sätze.

Sei im Folgenden stets M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Wir sagen f sei eine positive Lösung, wenn $\Delta f = \frac{\partial}{\partial t} f$ auf $M \times (0, \infty)$, f glatt auf $M \times [0, \infty)$ und $\forall t \geq 0$, $f > 0$.

Theorem 3.42 (Hamilton [Ham93], S. 115) *Gelte auf M, dass $Ric \geq -K, K \geq 0$ und sei f eine positive Lösung. Wenn dann f nach oben beschränkt ist, so gilt die Abschätzung*

$$t|\nabla f|^2 \leq (1 + 2Kt) f^2 \log(\frac{\sup f}{f}) \tag{3.64}$$

Beweis: Das Theorem folgt aus dem starken Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung in Theorem 3.25 von Seite 59. Mit der Notation $A = \sup f$ und

$$\phi = \frac{t}{1 + 2Kt}, \quad (\text{ somit } \quad \frac{\partial}{\partial t}\phi = \frac{1}{(1 + 2Kt)^2} \ )$$

ist eine zu (3.64) äquivalente Formulierung

$$h :\equiv \frac{t}{1 + 2Kt} \cdot \frac{|\nabla f|^2}{f} - f \log(A/f) = \phi \frac{|\nabla f|^2}{f} - f \log(A/f) \leq 0. \tag{3.65}$$

Da $\phi(0) = 0$ und $(A/f) \geq 1$ sowie $f > 0$ ist, gilt an $t = 0$, dass $h \leq 0$. Bewiesen ist das Theorem, wenn $h \leq 0$ für alle Zeiten richtig bleibt. Es genügt also $Lh = \Delta h - \frac{\partial}{\partial t} h \geq 0$ für alle Zeiten zu zeigen. Mit dem starken Maximumprinzip gilt dann $h \equiv \sup_{M \times [0,T]} h$, falls h dieses Supremum später als bei $t = 0$ annimmt. Wegen $h \leq 0$ bei $t = 0$ müsste ein eventuelles positives Supremum von h aber später als bei $t = 0$ angenommen werden und es ergibt sich sofort ein Widerspruch, der den Beweis abschließt.

Um Lh abschätzen zu können ist etwas technische Vorarbeit vonnöten. Es gilt zunächst

$$\Delta \log(A/f) = \nabla_i \nabla_i log(A/F) = \nabla_i \big(-\frac{\nabla_i f}{f}\big) = \frac{|\nabla f|^2 - f \Delta f}{f^2} \tag{3.66}$$

und deswegen

$$\begin{aligned} \Delta(f \log(A/f)) &= \Delta f \cdot \log(A/f) + 2 \nabla_i f \nabla_i \log(A/f) + f \Delta \log(A/f) \\ &= \Delta f \cdot \log(A/f) - 2 \frac{|\nabla f|^2}{f} + f \frac{|\nabla f|^2 - f \Delta f}{f^2} \\ &= \Delta f \cdot \log(A/f) - \frac{|\nabla f|^2}{f} - \Delta f, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(f \log(A/f)) &= \frac{\partial}{\partial t} f \cdot \log(A/f) + f \frac{\partial}{\partial t} \log(A/f) \\ &= \Delta f \cdot \log(A/f) + f(-\frac{\frac{\partial}{\partial t} f}{f}) = \Delta f \cdot \log(A/f) - \Delta f \\ &= \Delta(f \log(A/f)) + \frac{|\nabla f|^2}{f}. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Für die eben definierte Hilfsfunktion ϕ gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi + 2K\phi = \frac{1}{(1+2Kt)^2} + \frac{2Kt}{1+2Kt} = 1 - \frac{2Kt}{(1+2Kt)^2} \leq 1. \tag{3.68}$$

Ausserdem ist

$$\Delta h = \phi \Delta \frac{|\nabla f|^2}{f} - \Delta(f \log(A/f)) \tag{3.69}$$

Mit (3.67), (3.68), (3.69) und dem Lemma 3.38 von Seite 69 zeigt sich dann

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}h &= \frac{\partial}{\partial t}\phi \cdot \frac{|\nabla f|^2}{f} - \frac{\partial}{\partial t}(f\log(A/f)) + \phi\frac{\partial}{\partial t}\frac{|\nabla f|^2}{f} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\phi \cdot \frac{|\nabla f|^2}{f} - \big(\Delta(f\log(A/f)) + \frac{|\nabla f|^2}{f}\big) \\
&\quad + \phi\big(\Delta\frac{|\nabla f|^2}{f} - \frac{2}{f}\Big|\nabla_i\nabla_j f - \frac{\nabla_i f\nabla_j f}{f}\Big|^2 - 2R_{ij}\frac{\nabla_i f\nabla_j f}{f}\big) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\phi \cdot \frac{|\nabla f|^2}{f} - \frac{|\nabla f|^2}{f} + \Delta h - \phi\frac{2}{f}\Big|\nabla_i\nabla_j f - \frac{\nabla_i f\nabla_j f}{f}\Big|^2 - \phi 2R_{ij}\frac{\nabla_i f\nabla_j f}{f} \\
&\le \frac{\partial}{\partial t}\phi \cdot \frac{|\nabla f|^2}{f} - \frac{|\nabla f|^2}{f} + \Delta h + \phi 2K\frac{|\nabla f|^2}{f} \\
&= \big(\frac{\partial}{\partial t}\phi + 2K\phi - 1\big)\frac{|\nabla f|^2}{f} + \Delta h \\
&\le \Delta h.
\end{aligned}$$

Dabei ging im vorletzten Schritt die untere Schranke für die Ricci-Krümmung ein.

□

Bemerkung: Ein Trick von Hamilton besteht darin, das eben bewiesene Theorem "auf dem Zeitintervall $\tau/2 \le t \le \tau$" anzuwenden, wo $\tau \le 1$ ist. Dann muss die Beschränktheit von f nur auf diesem Intervall bekannt sein: man wählt eine Konstante $A \ge sup_{M\times[\tau/2,\tau]}f$, und es ergeben sich dadurch im Beweis keine Veränderungen. Durch eine Abschwächung der Aussage des Theorems bei Auswertung in $t = \tau$ erhält man dann die Abschätzung

$$\frac{\tau}{2}|\nabla f(x,\tau)|^2 \le \tau|\nabla f(x,\tau)|^2 \le (1+K\tau)f(x,\tau)^2\log(A/f(x,\tau)), \qquad (3.70)$$

die Hamilton für den Beweis des folgenden Lemmas nutzt.

Korollar 3.43 (Hamilton [Ham93], S. 116) *Sei f eine positive Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $M \times (0,T), T > 1$. Dann gilt für beliebiges $0 < t \le 1$, dass*

$$f(x,t) \le \frac{B}{t^{n/2}}\int_M f(x,t)dVol(x), \qquad (3.71)$$

wo B eine Konstante ist, die nur von M abhängt.

Beweisidee / Skizze: Man fixiert den Punkt (ξ,τ), der die linke Seite des Theorems auf dem Zeitintervall $[0,1]$ maximiert, bekommt dadurch eine Schranke A für f auf dem Teilintervall $[\tau/2,\tau]$ und benutzt dort das letzte Theorem. Man erhält dadurch eine Abschätzung der Form

$$\nabla\sqrt{\log(A/f)} \le C(\tau, Ric).$$

Um die Abhängigkeit der Konstanten vom Zeitpunkt τ loszuwerden, wälzt man sie auf eine Abhängigkeit von der Geometrie ab, indem man auf einer Zeitabhängigen kleinen Kreisscheibe $B_\rho(\xi)$ weiterrechnet. Auf dieser Scheibe bekommt man im Zeitintervall $[\tau/2, \tau]$ eine untere Abschätzung für f, und es gilt mit einer Konstanten, die nur von der Dimension abhängt,

$$C_n t^{n/2} f(x,t) \leq C_n \tau^{n/2} f(\xi, \tau) \leq \tau^{n/2} f(x, \tau)$$

Die letzte Ungleichung kann man zum Zeitpunkt τ über B_ρ aufintegrieren und bekommt

$$AC_m Vol B_\rho(\xi) \leq \int_{B_\rho(\xi)} f(x,\tau) dVol(x)$$

Jetzt kann man rechts das Integral auch über ganz M laufen lassen, und mit dem Volumenvergleichssatz von Günther das Kugelvolumen nach unten gegen $\tau^{n/2} C(M)$ abschätzen. Wegen der Supremaleigenschaft von A ist man dann am Ziel.

Beweis: Da M kompakt ist, nimmt $t^{n/2} f$ in einem Punkt (ξ, τ) sein Maximum b über $M \times [0,1]$ an. Also ist die Funktion f dort beschränkt durch

$$f(x,t) = \frac{1}{t^{n/2}} t^{n/2} f(x,t) \leq \frac{1}{t^{n/2}} (t^{n/2} f(\xi, \tau) \leq \frac{2^{n/2} b}{\tau^{n/2}} =: A$$

Die Anwendung von Theorem 3.42 bringt dann wegen (3.70) auf dem Zeitintervall $[\tau/2, \tau] \subset [0,1]$ für alle $x \in M$ die Abschätzung

$$\frac{\tau}{2} |\nabla f(x,\tau)|^2 \leq (1 + K\tau) f(x,\tau)^2 \log(A/f(x,\tau)),$$

Mit der Notation

$$l(x,\tau) = \log(A/f(x,\tau))$$

gilt deswegen

$$|\nabla \sqrt{l}| = \big(\frac{|\nabla f|^2}{4f^2 l}\big)^{1/2} \leq \big(\frac{1}{4f^2 l}(1+K\tau) f^2 l \frac{2}{\tau}\big)^{1/2} = \sqrt{\frac{1+K\tau}{2\tau}},$$

und so man in M eine geodätische Kugel um den Punkt ξ mit Radius

$$\rho = \min\{\sqrt{\frac{1+K\tau}{2\tau}}, \mathrm{inj}(M)\}$$

betrachtet, kann man darauf in lokalen Riemannschen Normalkoordinaten den Mittelwertsatz anwenden, um zu sehen dass

$$|\sqrt{l}(x,\tau) - \sqrt{l}(\xi,\tau)| \leq |\nabla \sqrt{l}| \cdot d(x,\xi) \leq \sqrt{\frac{1+K\tau}{2\tau}} \cdot \rho \leq \sqrt{\frac{1+K\tau}{2\tau}} \sqrt{\frac{1+K\tau}{2\tau}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Weil $f \leq f(\xi,\tau) \leq A$ an den betrachteten Stellen gilt, sind die Betragsstiche der linken Seite hinfällig, und es entsteht die folgende Harnack-Ungleichung für $\sqrt{l}$

$$\sqrt{l}(x,\tau) \leq \sqrt{l}(\xi,\tau) + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Andererseits gilt aber auch

$$l(\xi,\tau) = \log(\frac{A}{f(\xi,\tau)}) = \log(\frac{2^{n/2}b}{\tau^{n/2}f(\xi,\tau)}) = \log(\frac{2^{n/2}\tau^{n/2}f(\xi,\tau)}{\tau^{n/2}f(\xi,\tau)}) = \frac{n}{2}\log 2.$$

Insgesamt gilt dann für alle $x \in B_\rho(\xi)$

$$l(x,t) \leq \big(\sqrt{\frac{n}{2}\log 2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\big)^2 =: c(m)$$

beziehungsweise wegen der Definition von l,

$$f(x,\tau) \geq A \cdot e^{-c(m)} =: C(m)A$$

mit einer neuen Konstante $C(m) \geq 0$, die nur von der Dimension von M abhängt. Diese Ungleichung wird im nächsten Schritt über $B_\rho(\xi)$ aufintegriert, so dass

$$C(m)A \cdot VolB_\rho(\xi) = \int_{B_\rho(\xi)} C(m)AdVol \leq \int_{B_\rho(\xi)} f(x,\tau)dVol(x) \leq \int_M f(x,\tau). \quad (3.72)$$

Es besteht jetzt die Notwendigkeit, das Volumen der betrachteten Kugel nach unten abzuschätzen. Da das entsprechende Argument vom bisherigen Gang des Beweises ablenkt, gehen wir für den Moment davon aus, dass bereits

$$VolB_\rho(\xi) \geq C(M) \cdot \tau^{n/2} \quad (3.73)$$

gezeigt sei, wo $C(M) \geq 0$ eine Konstante ist, die nur von M abhängt. Dann gilt wegen Proposition 3.35 von Seite 65, dass das Integral von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung über ganz M in der Zeit konstant bleibt, und deswegen folgt aus (3.72) durch "Anbauen in die kleinere Richtung "

$$C(m)C(M)t^{n/2}f(x,t) \leq C(m)C(M)\tau^{n/2}f(x,\tau) \leq C(m)AVolB_\rho(\xi) \leq \int_M f(x,\tau)$$

oder äquivalent, mit $B = (C(m)C(M))^{-1}$

$$f(x,t) \leq \frac{1}{C(m)C(M)t^{n/2}} \cdot \int_M f(x,\tau) = \frac{B}{t^{n/2}} \cdot \int_M f(x,t),$$

womit der Beweis beendet wäre.

Es bleibt, (3.73) zu beweisen. Als Anmerkung sei hinzugefügt, dass genau wegen des verbleibenden Schrittes die Einschränkung auf das Zeitintervall [0,1] in der Aussage des Korollars steht. Der Definition von ρ wegen gilt, dass entweder $\rho = \mathrm{inj}(M) \geq \sqrt{\tau} \cdot \mathrm{inj}(M) =: \sqrt{\tau} \cdot C_{1M}$ ist, oder

$$\rho = \sqrt{\frac{\tau}{1+K\tau}} \geq \sqrt{\tau} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+K}} =: \sqrt{\tau} \cdot C_{1M}.$$

In jedem Fall ist $C_{1M} \leq 1$ und $C_{1M} \leq \mathrm{inj}(M)$ wegen der Minimalitätseigenschaft von ρ. Sei jetzt $\delta < \infty$ obere Schranke für die Schnittkrümmungen von M. δ kann gewählt werden, weil M kompakt ist und der Injektivitätsradius von $x \in M$ als Funktion auf M stetig ist, also ein Minimum annimmt, und dieses echt positiv sein muss (sonst ist M keine Riemannsche Mannigfaltigkeit). Man kann jetzt ohne Verlust der bisherigen Abschätzungen C_{1M} durch

$$C_{2M} = \min\{C_{1M}, \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}\}$$

ersetzen, und auch C_{2M} hängt nur von M ab. Weil $0 \leq \tau \leq 1$ ist, kann man nun auf Kugeln des Radius $\sqrt{\tau} \cdot C_{2M}$ den Güntherschen Volumenvergleichssatz 3.34 von Seite 65 anwenden und erhält

$$VolB_\rho(\xi) \geq VolB_{C_{2M}\sqrt{\tau}} \geq V_\delta(C_{2M}\sqrt{\tau}) \geq V_\delta(\frac{C_{2M}}{2}\sqrt{\tau}),$$

wo $V_\delta(r)$ das Volumen der Kugel mit Radius r in der Raumform mit konstanten Schnittkrümmungen δ bezeichnet. OBdA gilt $\delta > 0$. Aus der bekannten Formel für die Volumenberechnung von Kugeln in den Raumformen (z.B. in Chavel [Cha95], Kapitel 3, insbes. (3.25), S. 117) folgt dann mit der letzten Zeile

$$VolB_\rho(\xi) \geq \cdots \geq V_\delta(\frac{C_{2M}}{2}\sqrt{\tau}) = c_{n-1} \cdot \int_0^{\frac{C_{2M}}{2}\sqrt{\tau}} \big(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\sin(\sqrt{\delta}t)\big)^{n-1} dt$$

Nun ist bei unserer Radienwahl über das Argument der Sinusfunktion zu sagen, dass

$$0 \leq t\sqrt{\delta} \leq \sqrt{\delta} \cdot \sqrt{\tau}\frac{C_{2M}}{2} \leq \sqrt{\delta} \cdot \sqrt{\tau}\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Für Argumente $s \in [0, \pi/2]$ gilt aber $\sin(s) \geq s/2$, und daraus folgt schließlich

$$\begin{aligned} VolB_\rho(\xi) &\geq c_{n-1} \cdot \int_0^{\frac{C_{2M}}{2}\sqrt{\tau}} \big(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\sin(\sqrt{\delta}t)\big)^{n-1} dt \\ &\geq c_{n-1} \cdot \int_0^{\frac{C_{2M}}{2}\sqrt{\tau}} \big(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\frac{t\sqrt{\delta}}{2}\big)^{n-1} dt \\ &= c_{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} \cdot \int_0^{\frac{C_{2M}}{2}\sqrt{\tau}} t^{n-1} dt \\ &= c_{n-1}\frac{1}{n2^{n-1}} \cdot \big(\frac{C_{2M}}{2}\sqrt{\tau}\big)^n \\ &= c_{n-1}\frac{1}{n2^{2n-1}}(C_{2M})^n \cdot \tau^{n/2} =: C(M) \cdot \tau^{n/2} \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis des Korollars abgeschlossen.

□

Bemerkung: Wenn M nicht kompakt ist, kann es sein, dass im letzten Beweisschritt δ nicht existiert: Sei M z.B. eine "unendliche Fanfare "$S^1(r) \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^3$ mit der vom umliegenden Raum induzierten Standardmetrik, deren Radius $r = r(t)$ entlang der reellen Achse $(0, \infty)$ mit $r(t) = e^{-t}$ abnimmt. Dann ist für einen beliebigen

Punkt $(x,t) \in M$ der Cut locus die in die S^1-Richtung diametral gegenüberliegende "Schweissnaht "entlang der Fanfare. Offensichtlich ist die Distanz d von (x,t) zu seinem cut locus $d = \pi e^{-t}$, und die Schnittkrümmung pro Zeitschnitt in der S^1-Schnittebene ist jeweils $K(t) = (1/r(t))^2 = e^{2t} \longrightarrow \infty$ für großes t.

Korollar 3.44 (Hamilton [Ham93], S. 117) *Gelte auf M, dass $Ric \geq -K, K \geq 0$. Wenn dann f eine positive Lösung mit der Eigenschaft $\int\limits_M f \leq 1$ ist, so gilt*

$$t|\nabla f|^2 \leq Cf^2 \log(\frac{B}{t^{n/2} f}) \tag{3.74}$$

Wo $0 < t \leq 1$ und wo B und C Konstanten sind, die nur von M abhängen.

Beweis: Wegen Korollar 3.43 gilt für die positive Lösung f auf dem Zeitintervall $[0,1]$

$$f(x,t) \leq \frac{\hat{B}}{t^{n/2}} \int\limits_M f(x,t) dVol(x) \leq \frac{\hat{B}}{t^{n/2}} \leq \frac{2^{n/2}\hat{B}}{\tau^{n/2}} =: A$$

wo τ so gewählt ist, dass $0 \leq \tau/2 \leq t \leq \tau \leq 1$. Dabei ist im letzten Schritt die Integralbedingung an f eingegangen. Auf dem Zeitintervall $[\tau/2, \tau]$ ergibt dann das Theorem 3.42

$$t|\nabla f|^2 \leq (1+2Kt) f^2 \log(\frac{2^{n/2}\hat{B}}{\tau^{n/2} f}) \leq (1+2K) f^2 \log(\frac{2^{n/2}\hat{B}}{t^{n/2} f}) \leq Cf^2 \log(\frac{B}{t^{n/2} f})$$

$\square$

Als nächstes erfordert der Beweis der angestrebten Matrix-Ungleichung eine obere Schranke für Δf.

Lemma 3.45 (Hamilton [Ham93], S. 122) *Es sei f eine positive Lösung auf M. Wenn f beschränkt ist, dann gilt für $0 \leq t \leq 1$ die Abschätzung*

$$t\Delta f \leq Cf\big(1 + \log(\frac{\sup f}{f})\big), \tag{3.75}$$

wo C eine Konstante ist, die nur von M abhängt.

Beweis: Auf der kompakten Mannigfaltigkeit M gilt $Ric \geq -K$ für ein passendes $K \geq 0$. Es sei definiert

$$\phi = \phi(t) := \frac{e^{Kt} - 1}{Ke^{Kt}} \quad \text{und}$$
$$h = h(x,t) := \phi\Big(\Delta f + \frac{|\nabla f|^2}{f}\Big) - f\big(n + 4\log(A/f)\big)$$

Wegen der Exponentialreihe gilt mit der Definition von ϕ

$$1 + Kt \leq e^{Kt} \iff t \leq \frac{e^{Kt} - 1}{K} \iff t \leq e^{Kt}\phi \Rightarrow t \leq e^{K}\phi$$

Angenommen, es ist $h \leq 0$ für alle Zeiten t. Dann ist wegen der Definition von h, und im zweiten Schritt durch Multiplikation mit e^K (mit Hilfe der letzten Zeile)

$$\begin{aligned} &\phi\Big(\Delta f + \frac{|\nabla f|^2}{f}\Big)^2 \leq f\big(n + 4\log(A/f)\big) \\ \Longleftrightarrow\ &t\Big(\Delta f + \frac{|\nabla f|^2}{f}\Big)^2 \leq e^K nf + e^K f 4\log(A/f) \end{aligned}$$

also auch

$$t\Delta f \leq t\Big(\Delta f + \frac{|\nabla f|^2}{f}\Big)^2 \leq e^K nf + e^K f 4\log(A/f) \leq Cf(1 + \log(A/f)),$$

wo z.B. $C = e^K \cdot \max\{n, 4\}$ womit das Theorem bewiesen wäre. Um $h \leq 0$ zu zeigen kann man das MP-Argument aus Lemma 3.28 von Seite 61 auf $-h$ anwenden. Es genügt daher, zu zeigen dass

$$\frac{\partial}{\partial t}h \leq \Delta h \qquad \text{wo immer} \qquad h \geq 0. \tag{3.76}$$

Also muss die Evolution von h berechnet und abgeschätzt werden. Unproblematisch ist

$$\Delta h = \phi\big(\Delta\frac{\partial}{\partial t}f + \Delta\frac{|\nabla f|^2}{f}\big) - \Delta f(n + 4\log(A/f)) + 4\Delta f + 4\frac{|\nabla f|^2}{f} \tag{3.77}$$

Für $\frac{\partial}{\partial t}h$ benutzt man Lemma 3.38 von Seite 69, in das man sofort die Spurabschätzung $|A|^2 \geq (1/n)(\mathrm{tr}(A))^2$ aus Lemma 3.33 einträgt. Es gilt dann

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{|\nabla f|^2}{f} \leq \Delta\frac{|\nabla f|^2}{f} - \frac{2}{f}\big(\Delta f - \frac{|\nabla f|^2}{f}\big)^2 - 2R_{ij}\frac{\nabla_i f \nabla_j f}{f}.$$

Damit folgt für die Zeitableitung von h, wenn auch $Ric \geq -K$ gleich verwertet wird,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}h \leq &\big(\frac{\partial}{\partial t}\phi\big)\Big(\Delta f + \frac{|\nabla f|^2}{f}\Big) \\ &+ \phi\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Delta f + \Delta\frac{|\nabla f|^2}{f} - \frac{2}{nf}\big(\Delta f - \frac{|\nabla f|^2}{f}\big)^2 + 2K\frac{|\nabla f|^2}{f}\Big) \\ &- \frac{\partial}{\partial t}f(n + 4\log(A/f)) - 4\frac{\partial}{\partial t}f \end{aligned}$$

Durch Umordnen und wegen der stattfindenden Auslöschungen gilt dann ohne tiefliegende technische Einsichten, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}h - \Delta h \leq &-\frac{2}{nf}\big(\Delta f - \frac{|\nabla f|^2}{f}\big)^2 + \frac{\partial}{\partial t}\phi\Delta f \\ &+ 2K\phi\frac{|\nabla f|^2}{f} + \frac{\partial}{\partial t}\phi\frac{|\nabla f|^2}{f} - 4\frac{|\nabla f|^2}{f}. \end{aligned}$$

Dabei ist verwendet worden, dass $\frac{\partial}{\partial t}\Delta f = \Delta\frac{\partial}{\partial t}f$ und dass $\frac{\partial}{\partial t}f = \Delta f$. Für die letzte Zeile dieses Ausdrucks kann man die Eigenschaft von ϕ benutzen, dass

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi = 1 - K\phi \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial}{\partial t}\phi + K\phi = 1 \ \text{ und } \ 2K\phi + \frac{\partial}{\partial t}\phi = 2 - \frac{\partial}{\partial t}\phi$$

um zu erhalten, dass

$$\frac{\partial}{\partial t}h - \Delta h \leq -\frac{2}{nf}\big(\Delta f - \frac{|\nabla f|^2}{f}\big)^2 + \frac{\partial}{\partial t}\phi\big(\Delta f - \frac{|\nabla f|^2}{f}\big) - 2\frac{|\nabla f|^2}{f}. \tag{3.78}$$

Um den Beweis abzuschließen, und (3.76) zu zeigen, notiere man die weitere Eigenschaft von ϕ, dass $0 \leq \frac{\partial}{\partial t}\phi = 1 - \frac{e^{Kt}-1}{e^{Kt}} \leq 1$ und fahre mit einer Fallunterscheidung fort.

Falls $\Delta f \leq \frac{|\nabla f|^2}{f}$, so wird auf der rechten Seite von (3.78) nichts addiert $(\frac{\partial}{\partial t}\phi \geq 0)$ und man ist fertig.

Falls $\frac{|\nabla f|^2}{f} \leq \Delta f \leq 3\frac{|\nabla f|^2}{f}$ gilt, so findet unter den beiden letzten Termen der rechten Seite von (3.78) folgendes statt $(\frac{\partial}{\partial t}\phi \leq 1)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi\Delta f - \frac{\partial}{\partial t}\phi\frac{|\nabla f|^2}{f} - 2\frac{|\nabla f|^2}{f} \leq \frac{\partial}{\partial t}\phi\Delta f - 3\frac{\partial}{\partial t}\phi\frac{|\nabla f|^2}{f} \leq 0$$

also wird wiederum nichts addiert, und man ist ebenfalls fertig.

Falls $\Delta f \geq 3\frac{|\nabla f|^2}{f}$, so gilt mit $h \geq 0$, dass

$$\begin{aligned} & \phi\Big(\Delta f + \frac{|\nabla f|^2}{f}\Big) - f\big(n + 4\log(A/f)\big) \geq 0 \\ \Longrightarrow \quad & \Delta f + \frac{|\nabla f|^2}{f} \geq \frac{nf}{\phi} \end{aligned}$$

und durch Subtraktion von Δf und Addition von $2\frac{|\nabla f|^2}{f}$ folgt wegen der Voraussetzung $\Delta f \geq 3\frac{|\nabla f|^2}{f}$, dass

$$2\alpha := 2\Big(\Delta f - \frac{|\nabla f|^2}{f}\Big) \geq \Delta f + \frac{|\nabla f|^2}{f} \geq \frac{nf}{\phi}.$$

Indem man nun zu Kehrwerten und verkehrten Vorzeichen übergeht, sieht man, dass

$$-\frac{2\phi}{mf}\alpha^2 \leq \frac{1}{2\alpha}\alpha^2 = -\alpha,$$

weswegen auch mit $\frac{\partial}{\partial t}\phi \leq 1$

$$\frac{\partial}{\partial t}h \leq \Delta h - \frac{2\phi}{nf}\alpha^2 + (\frac{\partial}{\partial t}\phi)\alpha - 2\frac{|\nabla f|^2}{f} \leq \Delta h - \alpha + (\frac{\partial}{\partial t}\phi)\alpha - 2\frac{|\nabla f|^2}{f} \leq \Delta h,$$

und man ist komplett fertig.

□

Man kann die Unabhängigkeit der Abschätzung aus dem letzten Lemma von $\sup f$ erkaufen, wenn man statt der Beschränktheit von f eine Integralbedingung wie im folgenden Corollar stellt.

Korollar 3.46 (Hamilton [Ham93], S. 123) *Sei f positive Lösung auf M. Wenn $\int_M f = 1$ ist, dann gilt für $0 \leq t \leq 1$ die Abschätzung*

$$t\Delta f \leq Cf\big(1 + \log(\frac{B}{t^{n/2} f})\big), \tag{3.79}$$

wo B und C Konstanten sind, die nur von M abhängen.

Bemerkung: Die Voraussetzung $\int_M f = 1$, d.h. $\|f\|_1 = 1$ ist hier vorallem deshalb interessant, weil auch das Gesamtmaß einer Diracschen Delta-Distribution beschränkt ist. Da die Fundamentallösung eine solche Delta-Distribution ist, und wegen des Erhaltungssatzes aus Proposition 3.35 von Seite 65 und der Linearität der Wärmeleitungsgleichung entsprechend normiert werden kann, ist die obige Aussage auch für die Fundamentallösung als Grenzfall gültig.

Beweis: Sei $t \in (0,1]$ beliebig aber fest. Die Voraussetzungen von Korollar 3.43 sind erfüllt. Mit der Integralbedingung an f ergibt sich aus diesem Korollar, dass für eine beliebige Wahl von $\tau \in (0,1]$ mit $0 \leq \tau/2 \leq t \leq \tau$,

$$f(x,t) \leq \frac{B}{t^{n/2}} \leq \frac{2^{n/2}B}{\tau^{n/2}} =: A$$

wo B nur von M abhängt. Mit dieser Schranke für f auf dem Intervall $[\tau/2, \tau]$ ergibt das letzte Lemma

$$t\Delta f \leq Cf\big(1 + \log(\frac{2^{n/2}B}{\tau^{n/2} f})\big) \leq Cf\big(1 + \log 2^{n/2} + \log(\frac{B}{t^{n/2} f})\big) \leq \overline{C}f\big(1 + \log(\frac{B}{t^{n/2} f})\big),$$

da $\log 2^{n/2} \geq 0$. Insbesondere gilt das Korollar mit derselben Konstanten B wie das Korollar 3.43.

$\square$

An dieser Stelle stehen Aussagen zur Verfügung, mit denen sowohl $t|\nabla f|^2$ alsauch $t\Delta f$ gegen ein Produkt aus Werten der Funktion f selbst und Konstanten, die nur von der Geometrie von M abhängen, abgeschätzt werden können. Damit sind die Mittel für den Beweis des folgenden Haupttheorems da.

Theorem 3.47 (Hamilton [Ham93], S. 123) *Sei M eine n-dimensionale kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei weiter f eine positive Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf M mit der Eigenschaft $\int_M f \leq 1$. Dann gilt*

$$\nabla_i \nabla_j f - \frac{\nabla_i f \nabla_j f}{f} + \frac{1}{2t} f g_{ij} + Cf\big(1 + \log(\frac{B}{t^{n/2} f})\big) g_{ij} \geq 0, \tag{3.80}$$

wo $0 < t \leq 1$ und wo B und C Konstanten sind, die nur von M abhängen.

Es wird sich herausstellen, dass für den Fall nichtnegativer Ricci-Krümmung (also, in der bisherigen Notation, $K = 0$) und der Ricci-Parallelität die Abschätzungen aus den vorhergegangenen Lemmata und Korollaren nicht nötig sind. Der Beweis des nächsten Theorems kollabiert unter der Zusatzannahme $K = 0, \nabla Ric = 0$ zu einem Spezialfall, in dem die entsprechenden Stellen entfallen. Direkter sieht man den Unterschied in den technischen Anforderungen aber an der unvergleichlich kompakteren Form des Beweises der constrained matrix Harnack inequality von Hamilton und Chow, der am Schluss dieser Arbeit präsentiert wird. Auch aus diesem Theorem fällt der oben erwähnte Spezialfall nichtnegativer paralleler Ricci-Krümmung ab, aber da der Beweis an allgemeineren Krümmungsbedingungen von vornherein nicht interessiert ist, schrumpft er auch formal auf eine recht elegante Größe.

Bemerkung: Die in den folgenden Beweisen verwendeten Ungleichheitszeichen haben verschiedene Bedeutungen. Solange Gleichungen zwischen Termen bestehen, die die Koeffizienten von Matritzen in ungebundener Form (freie Indizes) enthalten, handelt es sich um Gleichungen zwischen den einzelnen Koeffizienten. In dem Moment, wo $\leq$ oder $\geq$ steht, handelt es sich jedoch, wie aus Formulierungen der Art "$Ric \geq 0$ "bekannt, um Ungleichungen zwischen den Eigenwerten der entsprechenden Tensoren. Wir sagen also für zwei beliebige Tensoren gleicher Art H und P, dass $H \geq P$, falls der Tensor $H - P$ keine negativen Eigenwerte besitzt.

Beweisidee / Skizze: Sei

$$H_{ij} = \nabla_i \nabla_j f - \frac{\nabla_i f \nabla_j f}{f} \tag{3.81}$$

Man will mit Hilfe des Maximum-Prinzips für Matritzen zu beweisen, dass diese Matrix, oder eine "möglichst ähnliche "Matrix, für alle Zeiten keine negativen Eigenwerte bekommt. Es ist ziemlich klar, dass von der Matrix H_{ij} allein ein solches Verhalten nicht erwartet werden kann. Insbesondere ist ihr Verhalten für kleine Zeiten t nicht kontrollierbar und über ihre einzelnen Eigenwerte ist zunächst gar nichts bekannt. Zunächst muss daher wie auch schon im Beweis der Spur-Ungleichung von Li und Yau (Theorem 3.36 von Seite 66) der Zeit-Parameter um eine kleine Größe ins Positive verschoben werden. Das Theorem wird also für $t > \tau > 0$, $\tau > 0$ beliebig, bewiesen und gilt somit doch wieder für alle positiven Zeiten t. Hamilton findet dann mit Hilfe einer Funktion $P = P(x,t)$ eine leicht handhabbare Matrix der Form Pg_{ij}, deren sämtliche Eigenwerte für kleine $t > \tau$ beliebig groß werden.

Betrachtet man die Aussage des Theorems, so zerfällt die linke Seite von (3.80) gerade in einen Anteil, der obigem H_{ij} entspricht und einen Störungstensor von dieser Form. Indem er nun die neue Matrix $N_{ij} = H_{ij} + Pg_{ij}$ betrachtet, kann er sein MP-Argument für Matritzen anwenden und erhält das gewünschte Ergebnis.

Man beachte, dass das Verfahren im Fall der Spur-Ungleichungen dasselbe war: auch hier war ein Term $f \cdot n/2t$ addiert worden, der für das Maximum-Prinzip den Wert (d.h. den einzigen Eigenwert) der jeweiligen linken Seiten für kleine t beliebig groß machte. Die jetzt angewandte Methode bläst lediglich diesen Term durch Multiplikation mit der Metrik zu einem einfachstmöglichen Tensor $(f/2t)g_{ij}$ auf, der die entsprechende Spur $f \cdot n/2t$ hat, und daher eine Chance besitzt, dieselbe Aufgabe zu erfüllen. Die Endform dieses Korrekturtensors ist im jetztigen Theorem wegen der allgemeinerern Krümmungsbedingungen etwas schwieriger, und der zunächst unerwartete zusätzliche Term kommt genau vom letzten Korollar, das in Vorbereitung bewiesen wurde. Man vergleiche mit der Form des Korrekturtensors in der constrained matrix Harnack inequality am Schluss dieser Arbeit: Dort sind einfachere Krümmungseigenschaften vorausgesetzt, und der Korrekturterm nimmt tatsächlich die erwartete einfachstmögliche Form an.

Beweis: Im ersten Teil des Beweises geschieht reine Rechenarbeit: Es sind zunächst die Evolutionen des oben in (3.81) definierten H_{ij}, des in der Beweisskizze erwähnten (und noch zu definierenden) Pg_{ij} und ihrer Summe zu finden. Sei also

$$H_{ij}(x,t) = \Big(\nabla_i\nabla_j f - \frac{\nabla_i f \nabla_j f}{f}\Big)(x, t+\tau), \qquad \tau > 0 \text{ beliebig}$$

Dann ist H_{ij} insbesondere beschränkt auf dem ganzen nach unten abgeschlossenen Zeitintervall $t \geq 0$ und alle Ableitungen von H_{ij} lassen sich stetig nach $t = 0$ fortsetzen. Es gilt mit der Wärmeleitungseigenschaft von f direkt

$$\frac{\partial}{\partial t} H_{ij} = \nabla_i\nabla_j\Delta f - \frac{\nabla_i\Delta f\nabla_j f}{f} - \frac{\nabla_i f\nabla_j\Delta f}{f} + \Delta f\frac{\nabla_i f\nabla_j f}{f^2}$$

Etwas mühsamer ist

$$\begin{aligned}\Delta H_{ij} =& \Delta\nabla_i\nabla_j f - \frac{\Delta\nabla_i f\nabla_j f}{f} - \frac{\nabla_i f\Delta\nabla_j f}{f} + \Delta f\frac{\nabla_i f\nabla_j f}{f^2} \\ & - 2\frac{\nabla_i\nabla_k f\nabla_j\nabla_k f}{f} + 2\frac{\nabla_k f\nabla_i\nabla_k f\nabla_j f}{f^2} + 2\frac{\nabla_k f\nabla_j\nabla_k f\nabla_i f}{f^2} - 2\frac{\nabla_k f\nabla_k f\nabla_i f\nabla_j f}{f^3} \\ =& \Delta\nabla_i\nabla_j f - \frac{\Delta\nabla_i f\nabla_j f}{f} - \frac{\nabla_i f\Delta\nabla_j f}{f} + \Delta f\frac{\nabla_i f\nabla_j f}{f^2} - \frac{2}{f}H_{ik}H_{kj},\end{aligned}$$

wobei nur benutzt wurde, dass erste und zweite kovariante Ableitungen von Funktionen kommutieren. Mit der Ricci-Formel (2.6) aus Lemma 2.4 von Seite 10 können in der letzten Zeile die in den Brüchen vorkommenden Laplace-Operatoren mit der kovarianten Ableitung vertauscht werden, und durch Subtraktion der bisherigen Ergebnisse folgt

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)H_{ij} = \nabla_i\nabla_j\Delta f - \Delta\nabla_i\nabla_j f + \frac{\nabla_i f R_{lj}\nabla_l f}{f} + \frac{\nabla_j f R_{li}\nabla_l f}{f} + \frac{2}{f}H_{ik}H_{kj}.$$

Die Vertauschungsformel (2.7) aus dem selben Lemma ermöglicht dann den Vergleich der beiden ersten Terme der rechten Seite, und es bleibt stehen:

$$\begin{aligned}(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)H_{ij} =& - R_{lj}\nabla_i\nabla_l f - R_{li}\nabla_j\nabla_l f + 2R_{ljki}\nabla_l\nabla_k f + (\nabla_l R_{ij} - \nabla_i R_{lj} - \nabla_j R_{li})\nabla_l f \\ & + \frac{\nabla_i f R_{lj}\nabla_l f}{f} + \frac{\nabla_j f R_{li}\nabla_l f}{f} + \frac{2}{f}H_{ik}H_{kj}.\end{aligned}$$

Etwas Umordnen und Zusammenfassen bringt dann

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}H_{ij} =& \Delta H_{ij} + \frac{2}{f}H_{ik}H_{kj} - R_{lj}H_{li} - R_{li}H_{lj} \\ & + 2R_{ljki}\nabla_l\nabla_k f + (\nabla_l R_{ij} - \nabla_i R_{lj} - \nabla_j R_{li})\nabla_l f\end{aligned}$$

oder schöner, durch Addieren von 0 in passender Form,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}H_{ij} =& \Delta H_{ij} + \frac{2}{f}H_{ik}H_{kj} + 2R_{ikjl}H_{kl} - R_{lj}H_{li} - R_{li}H_{lj} \\ &+ \frac{2}{f}R_{ikjl}\nabla_l f\nabla_k f + (\nabla_l R_{ij} - \nabla_i R_{lj} - \nabla_j R_{li})\nabla_l f \\ =:& \Delta H_{ij} + \frac{2}{f}H_{ik}H_{kj} + 2R_{ikjl}H_{kl} - R_{lj}H_{li} - R_{li}H_{lj} \quad + \quad \alpha,\end{aligned} \tag{3.82}$$

wo α durch die letzte Zeile als abkürzende Schreibweise für die zweite Zeile der ersten Gleichung definiert wird. Die Beschäftigung mit der Evolution von H_{ij} ist damit fürs Erste abgeschlossen. Als nächstes steht der Korrekturtensor auf dem Plan. Da die Bedingungen von Korollar 3.43 erfüllt sind, gilt wegen der Integralbedingung an f, dass für $0 < t < 1$ $tn/2f(x,t) \leq B$, wo B nur von M abhängt (das formal genaue Argument steht z.B. im Beweis des vorangegangen Korollars). Da M kompakt ist, gibt es ausserdem auf M eine untere Grenze $-K$ für die Schnittkrümmungen und eine obere Grenze L für $|\nabla Ric|$. Sei dann

$$l(x,t) :\equiv n + \log(\frac{B}{t^{n/2}f}) \quad (\Rightarrow l \geq n)$$

und

$$P(x,t) :\equiv \frac{1}{2t}f(x,t) + A(K + L^{2/3})f(x,t) \cdot l(x,t)$$

wo A eine später zu wählende nichtnegative Konstante ist. Um die Evolution des Korrekturtensors Pg_{ij} zu kennen, reicht es wegen des Levi-Civitta Zusammenhangs auf (M,g) und der Tatsache, dass die Metrik keiner Evolution unterliegt, wenn die entsprechende Evolution für P bekannt ist. Man berechnet also ohne Tricks anzuwenden

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P &= \frac{\Delta f}{2t} - \frac{1}{2t^2}f + \Delta f A(K + L^{2/3})(l-1) - \frac{n}{2t}A(K + L^{2/3})f, \\ \Delta P &= \frac{\Delta f}{2t} + \Delta f A(K + L^{2/3})(l-1) - \frac{|\nabla f|^2}{f}A(K + L^{2/3})\end{aligned}$$

sowie zusammengenommen (das am Ende der Zeile definierte Q dient als abkürzende Schreibweise),

$$\frac{\partial}{\partial t}P = \Delta P - \frac{1}{2t^2}f - \frac{n}{2t}A(K + L^{2/3})f + \frac{|\nabla f|^2}{f}A(K + L^{2/3}) =: \Delta P + Q$$

An weiteren Eigenschaften von P sei hier schon bereitgestellt, dass

$$\frac{2}{f}P^2 = \frac{1}{2t^2}f + 2\frac{A}{t}(K + L^{2/3})fl + 2A^2(f + L^{2/3})^2 fl^2,$$

was einfach durch Quadrieren von P und Ausklammern von $f/2$ aus dem entstehenden Binom folgt, sowie

$$\begin{aligned}
\frac{2}{f}P^2 + Q &= A(K + L^{2/3})\Big(\frac{2fl}{t} - \frac{nf}{2t} + \frac{|\nabla f|^2}{f}\Big) + 2A^2(f + L^{2/3})^2 fl^2 \\
&\geq A(K + L^{2/3})\Big(\frac{4fl}{2t} - \frac{lf}{2t}\Big) + 2A^2(f + L^{2/3})^2 fnl \\
&\geq \frac{A}{t}(K + L^{2/3})fl + 2nA^2(f + L^{2/3})^2 fl
\end{aligned} \tag{3.83}$$

was wegen $l \geq n$ gilt.

Nun sei

$$N_{ij} = H_{ij} + Pg_{ij}.$$

Benötigt wird die Evolution dieser Matrix. Es ist zunächst

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}N_{ij} =&\frac{\partial}{\partial t}H_{ij} + (\frac{\partial}{\partial t}P)g_{ij} \\
=&\Delta H_{ij} + \frac{2}{f}H_{ik}H_{kj} + 2R_{ikjl}H_{kl} - R_{lj}H_{li} - R_{li}H_{lj} + \alpha + (\Delta P + Q)g_{ij} \\
=&\Delta N_{ij} + \frac{2}{f}H_{ik}H_{kj} + 2R_{ikjl}H_{kl} - R_{lj}H_{li} - R_{li}H_{lj} + \alpha + Qg_{ij}
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Ziel ist es jetzt, möglichst viele Terme in der Evolution durch N_{ij} auszudrücken, was im Folgenden termweise entlang der rechten Seite der letzten Gleichung geschieht. Wegen $g_{ij} = \delta_{ij}$ ist

$$N_{ik}N_{kj} = H_{ik}H_{kj} + 2PH_{ij} + P^2 g_{ij}$$

und deswegen gilt für den zweiten Term der rechten Seite von (3.84)

$$\begin{aligned}
\frac{2}{f}H_{ik}H_{kj} =&\frac{2}{f}N_{ik}N_{kj} - \frac{4}{f}PH_{ij} - \frac{2}{f}P^2 g_{ij} \\
=&\frac{2}{f}N_{ik}N_{kj} - \frac{4}{f}PN_{ij} + \frac{2}{f}P^2 g_{ij}
\end{aligned}$$

Für den dritten Term der rechten Seite von (3.84) ist

$$2R_{ikjl}H_{kl} = 2R_{ikjl}N_{kl} - 2R_{ikjl}Pg_{kl} = 2R_{ikjl}N_{kl} - 2PR_{ij}$$

Wenn man auch im vierten und fünften Term die H_{ik} bzw. H_{jk} durch N_{ik} bzw. N_{jk} ersetzt, so muss man zum Ausgleich dort zweimal den Term $R_{ij}P$ addieren, was den gerade erhaltenen Ausdruck $-2PR_{ij}$ wieder auslöscht. Insgesamt resultiert, womit die Abkürzung α ausgedient hat,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}N_{ij} =&\Delta N_{ij} + \frac{2}{f}N_{ik}N_{kj} - \frac{4}{f}PN_{ij} \\
&+ 2R_{ikjl}N_{kl} - R_{lj}N_{li} - R_{li}N_{lj} \\
&+ \frac{2}{f}R_{ikjl}\nabla_l f\nabla_k f + (\nabla_l R_{ij} - \nabla_i R_{lj} - \nabla_j R_{li})\nabla_l f + (\frac{2}{f}P^2 + Q)g_{ij}
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Der Rest des Beweises besteht darin, die rechte Seite dieser Gleichung nach unten abzuschätzen. Dazu steht die Schranke an die Schnittkrümmungen und an die Kovarianten Ableitungen des Ricci-Tensors zur Verfügung. Man kann also ausnutzen, dass

$$P_{ikjl} :\equiv R_{ikjl} + K(g_{ij}g_{kl} - g_{li}g_{jk})$$

im Eigenwertsinne nichtnegativ ist. (D.h. $\forall p \in M$ und beliebige Vektoren $v, w \in T_pM$ gilt, dass $P_{ikjl}(p)v^i w^k v^j w^l \geq 0$.) Die Aussage ist einfach wegen der Definition der Schnittkrümmungen richtig. Löst man diese Gleichung nach dem Krümmungstensor auf, so erhält man durch Multiplikation mit N_{kl} und entsprechende Summation,

$$2R_{ikjl}N_{kl} = 2P_{ikjl}N_{kl} - 2KNg_{ij} + 2KN_{ij}, \tag{3.86}$$

wo $N = N_{kl}g_{kl}$ die Spur bezeichnet. Weiter gilt mit der Überlegung, dass für Vektoren v, w wegen der oben besprochenen Nichtnegativität von P_{ikjl}

$$R_{ikjl}v^i w^k v^j w^l \geq -K(g_{ij}g_{kl} - g_{li}g_{jk})v^i w^k v^j w^l = -K|v|^2|w|^2 + K\langle v,\, w\rangle^2 \geq -K|v|^2|w|^2$$

gilt, insbesondere die Eigenwertabschätzung

$$\frac{2}{f}R_{ikjl}\nabla_l f \nabla_k f \geq -\frac{2}{f}K|\nabla f|^2 g_{ij} \tag{3.87}$$

Als nächstes gilt sogar koeffizientenweise die Abschätzung

$$\begin{aligned}
-&(\nabla_l R_{ij} - \nabla_i R_{lj} - \nabla_j R_{li})\nabla_l f \\
&\leq |\ldots| \leq |\nabla_l R_{ij}\nabla_l f| + |\nabla_i R_{lj}\nabla_l f| + |\nabla_j R_{li}\nabla_l f| \\
&\leq |\nabla f|\sqrt{\sum_l (\nabla_l R_{ij})^2} + |\nabla f|\sqrt{\sum_l (\nabla_i R_{lj})^2} + |\nabla f|\sqrt{\sum_l (\nabla_j R_{li})^2} \\
&\leq 3|\nabla f|\sqrt{\sum_{l,i,j} \nabla_l R_{ij}} = 3|\nabla f||\nabla Ric| \leq 3L|\nabla f|,
\end{aligned}$$

und durch Verkehrung des Vorzeichens entsteht im Eigenwertsinne

$$(\nabla_l R_{ij} - \nabla_i R_{lj} - \nabla_j R_{li})\nabla_l f \geq -3L|\nabla f|g_{ij} \tag{3.88}$$

Unabhängig davon gilt für nichtnegative a, b, dass $0 \leq (a-b)^2 \leq a^2 + b^2 - ab$ und deswegen die weitere Einsicht

$$L|\nabla f| \leq L^{2/3}\frac{|\nabla f|^2}{f} + L^{4/3}f. \tag{3.89}$$

Indem man die Zwischenergebnisse (3.86), (3.87), (3.88) und (3.89) in die Evolutionsgleichung für N_{ij}, (3.85), zurückträgt, erhält man unter Verwendung des verbleibenden Überblicks die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}N_{ij} =& \Delta N_{ij} + \frac{2}{f}N_{ik}N_{kj} - \frac{4}{f}PN_{ij} \\
&+ 2P_{ikjl}N_{kl} + 2KN_{ij} - R_{lj}N_{li} - R_{li}N_{lj} \\
&+ Zg_{ij},
\end{aligned} \tag{3.90}$$

wo

$$Z := \frac{2}{f}P^2 + Q - 2KN - (2K + 3L^{2/3})\frac{|\nabla f|^2}{f} - 3L^{4/3}f =: \frac{2}{f}P^2 + Q - \beta$$

Hier beginnt der letzte Schritt des Beweises, in dem das Matrix-Maximumprinzip angewandt werden soll. Wegen des Korrekturtensors Pg_{ij} ist klar, dass für kleine t jeder Eigenwert von N_{ij} über alle Grenzen wächst (man beachte, dass wegen der Zeitverschiebung in H_{ij} $H_{ij}(x,0)$ definiert und beschränkt ist). Ausserdem hat die obige Evolutionsabschätzung bereits die für das Korollar 3.31 von Seite 63 nötige Form (dabei verschwindet das dortige Vektorfeld b^k identisch)

$$\frac{\partial}{\partial t}N_{ij} \geq \Delta N_{ij} + p(N)_{ij}.$$

Falls das Polynom

$$\begin{aligned} p(N_{ij})_{ij} :\equiv &\frac{2}{f}N_{ik}N_{kj} - \frac{4}{f}PN_{ij} \\ &+ 2P_{ikjl}N_{kl} + 2KN_{ij} - R_{lj}N_{li} - R_{li}N_{lj} + Zg_{ij}, \end{aligned}$$

also die in Definition 3.29 von Seite 62 gestellte Null-Bedingung für Eigenwerte erfüllt, so folgt aus dem Korollar, dass $N_{ij} \geq 0$ für alle Zeiten und der Beweis des Theorems ist abgeschlossen.

Es bleibt also, für das obige Polynom p die Null-Bedingung nachzuweisen. Hamilton schätzt dazu zuerst ohne Rekurs auf einen Null-Eigenvektor von N_{ij} die Matrix Zg_{ij} ab und kümmert sich dann um den Rest des Polynoms. Es gilt

$$N = \Delta f - \frac{|\nabla f|^2}{f} + nP = \Delta f - \frac{|\nabla f|^2}{f} + n[\frac{1}{2t}f + A(K + L^{2/3})fl].$$

Die Terme, die Δf und $|\nabla f|^2$ enthalten, kann Hamilton wegen der vorher bewiesenen Sätze Korollar 3.46 von Seite 83 und Korollar 3.44 von Seite 83 durch

$$\Delta f \leq \frac{C}{t}fl \tag{3.91}$$

$$\frac{|\nabla f|^2}{f} \leq \frac{C}{t}fl \tag{3.92}$$

abschätzen, wo C die größere der beiden Konstanten C aus den Korollaren ist. Man beachte, das das in den Korollaren vorkommende B, das in der hiesigen Formulierung in l steckt, bei beiden Korollaren oBdA (Übergang zur größeren von beiden) dieselbe Konstante ist, es also nicht zu einem Wohldefiniertheitsproblem kommt. Es ist deswegen

$$\begin{aligned} \beta =&2KN + (2K + 3L^{2/3})\frac{|\nabla f|^2}{f} + 3L^{4/3}f \\ =&2K\Delta f - 2K\frac{|\nabla f|^2}{f} + 2KnP + (2K + 3L^{2/3})\frac{|\nabla f|^2}{f} + 3L^{4/3}f \\ =&2K\Delta f + 2Kn[\frac{1}{2t}f + A(K + L^{2/3})fl] + 3L^{2/3}\frac{|\nabla f|^2}{f} + 3L^{4/3}f \\ \leq&2K\frac{C}{t}fl + \frac{1}{t}Knf + 2KnA(K + L^{2/3})fl + 3L^{2/3}\frac{C}{t}fl + 3L^{4/3}f. \end{aligned}$$

Wegen $l \geq n \geq 1$ und da oBdA $A \geq 1$ gilt weiter

$$\begin{aligned}
\ldots \leq & 2K\frac{C}{t}fl + \frac{1}{t}Kn \cdot fl + 3L^{2/3}\frac{C}{t}fl + A2Kn(K + L^{2/3})fl + A3L^{4/3}fl. \\
\leq & \frac{\tilde{C}}{t}fl(K + L^{2/3}) + Afln(2K^2 + 2KL^{2/3} + 3L^{4/3}) \\
\leq & \frac{\tilde{C}}{t}fl(K + L^{2/3}) + Afln \cdot 4(K + L^{2/3})^2 \\
\leq & \frac{\hat{C}}{t}(K + L^{2/3}) \cdot fl + \hat{C}A(K + L^{2/3})^2 \cdot fl
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der vor langer Zeit bereitgestellten Abschätzung 3.83 (Seite 87, dieser Beweis) folgt dann

$$\begin{aligned}
Z =: & \frac{2}{f}P^2 + Q - \beta \\
\geq & \frac{2}{f}P^2 + Q - \frac{\overline{C}}{t}(K + L^{2/3}) \cdot fl - \overline{C}A(K + L^{2/3})^2 \cdot fl \\
\geq & \frac{A}{t}(K + L^{2/3})fl + 2nA^2(f + L^{2/3})^2 fl - \frac{\overline{C}}{t}(K + L^{2/3}) \cdot fl - \overline{C}A(K + L^{2/3})^2 \cdot fl \\
\geq & \frac{1}{t}(K + L^{2/3})fl[A - \hat{C}] + (K + L^{2/3})^2 fl[2nA^2 - \hat{C}A]
\end{aligned}$$

und somit, falls z.B. $A \geq \hat{C}$ gewählt wird,

$$Z \geq 0$$

Jetzt sieht man, dass p die Null-Bedingung erfüllt: Sei A_{ij} symmetrische Matrix mit kleinstem Eigenwert 0, und sei $v, |v| = 1$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt

$$\begin{aligned}
p(A_{ij})_{ij}v^iv^j = & \frac{2}{f}A_{ik}A_{kj}v^iv^j - \frac{4}{f}PA_{ij}v^iv^j \\
& + 2P_{ikjl}A_{kl}v^iv^j + (2KA_{ij} - R_{lj}A_{li} - R_{li}A_{lj} + Zg_{ij})v^iv^j, \\
= & 0 - 0 + 2P_{ikjl}A_{kl}v^iv^j + 0 + Zg_{ij}v^iv^j \\
\geq & 2P_{ikjl}A_{kl}v^iv^j
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Weil nun die Matrix A_{ij} symmetrisch ist, existiert (z.B. Fischer [Fis89], Theorem 6.5.3, S.206) eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren, in der A_{ij} eine Diagonalmatrix ist, und oBdA befinden wir uns bereits in dieser Darstellung. Insbesondere ist der Vektor v bereits ein Basisvektor, z.B. der i-te, wodurch z.B. $Riem(v, w, v, w) = R_{ikil}w^kw^l$ ist. Also gilt (und dabei wird nach dem ersten Gleichheitszeichen *nicht* mehr über i summiert,)

$$\begin{aligned}
P_{ikjl}A_{kl}v^iv^j = & R_{ikil}A_{kl} + K(g_{ii}g_{kl} - g_{il}g_{ik}))A_{kl} \\
= & R_{ikik}A_{kk} + K \cdot \mathrm{tr}(A) - KA_{ii}
\end{aligned}$$

durch Summation über l. Weil A_{ii} in der speziellen Basis gerade der Eigenwert zum Eigenvektor v ist, also verschwindet, gilt mit der Eigenschaft von $-K$, untere Schranke der Schnittkrümmungen zu sein,

$$=R_{ikik}A_{kk} + K \cdot \mathrm{tr}(A) \geq K(\mathrm{tr}(A) - \sum_k A_{kk}) = 0$$

Also erfüllt p die Null-Bedingung für Eigenvektoren, und das Theorem ist bewiesen.

Im Riemannschen Setting könnte man aus jeder Orthonormalbasis eines Tangentialraumes an M in einem Punkt x ein entsprechendes System Riemannscher Normalkoordinaten fortsetzten, und daher tatsächlich annehmen, dass die von uns betrachtete Matrix N_{ij} bereits Diagonalform besitzt. Es handelt sich aber bei der Null-Bedingung um eine Eigenwerteigenschaft, und Eigenwerte sind invariant bei Basiswechseln. Der Ausflug in die speziellen Koordinaten hat also nur mit der Testmatrix A_{ij} zu tun, und dient dort nur der besseren Sichtbarkeit des Ergebnisses, das als solches dann in beliebigen Koordinaten Gültigkeit besitzt.

□

Korollar 3.48 (Hamilton [Ham93], S. 125) *Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtnegativen Schnittkrümmungen. Sei zusätzlich M Ricci-parallel, so dass* $\nabla_i R_{jk} = 0$. *Dann gilt für jede positive Lösung f der Wärmeleitungsgleichung auf M*

$$\nabla_i \nabla_j f - \frac{\nabla_i f \nabla_j f}{f} + \frac{1}{2t} f g_{ij} \geq 0. \tag{3.94}$$

Beweis: Unter den verschärften Krümmungsbedingungen kann im Beweis des letzten Theorems $K = L = 0$ gesetzt werden. Dann tritt der Spezialfall

$$P = \frac{1}{2t} f \quad (\Longrightarrow \frac{2}{f} P^2 + Q = 0, Z = 0), \quad P_{ikjl} = R_{ikjl}$$

ein, und l braucht gar nicht definiert zu werden. Die entscheidende Evolutionsgleichung (3.90) nimmt dann die Form

$$\frac{\partial}{\partial t} N_{ij} = \Delta N_{ij} + \frac{2}{f} N_{ik} N_{kj} - \frac{4}{f} P N_{ij} + 2R_{ikjl} N_{kl} - R_{lj} N_{li} - R_{li} N_{lj}$$

an. Da Z nicht auftaucht, werden die Abschätzungen aus den Korollaren 3.44 und 3.46 sowie die Konstante B aus Korollar 3.43 nicht mehr benötigt, und die Voraussetzungen dieser Sätze müssen nicht mehr erfüllt sein. Dadurch wird sowohl die Beschränkung auf das Zeitintervall $(0, 1]$ alsauch die Integralbedingung an f obsolet. Die restliche Anwendung des Matrix-Maximumprinzips läuft wie im letzten Beweis.

□

Bemerkung: Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y, t) \mapsto (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x-y|^2/(4t)}$ die wohlbekannte Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$. Sei $y \in \mathbb{R}^n$

fixiert. Dann gilt (Differentiationen in Raumrichtungen geschehen an der Variablen x)

$$\begin{aligned}
\nabla_i f &= -\frac{(x_i - y_i)}{2t} \cdot f \quad \text{und somit} \\
\frac{\nabla_i f \nabla_j f}{f} &= \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{4t^2} \cdot f \quad \text{bzw.} \\
\nabla_i \nabla_j f &= -\left[f \nabla_i \frac{(x_j - y_j)}{2t} + \frac{(x_i - y_i)}{2t} \nabla_i f \right] = \frac{\nabla_i f \nabla_j f}{f} - \frac{\delta_{ij}}{2t} \cdot f
\end{aligned}$$

Da im Standard-$\mathbb{R}^n$ $g_{ij} = \delta_{ij}$ ist, sieht man insbesondere, dass

$$\nabla_i \nabla_j f - \frac{\nabla_i f \nabla_j f}{f} + \frac{1}{2t} f g_{ij} = \frac{\nabla_i f \nabla_j f}{f} - \frac{\delta_{ij}}{2t} \cdot f - \frac{\nabla_i f \nabla_j f}{f} + \frac{1}{2t} f g_{ij} = 0.$$

Die Hamiltonsche Abschätzung aus 3.47 von Seite 83 bzw. aus dem letzten Korollar ist also scharf auf der Fundamentallösung des $\mathbb{R}^n$. Dasselbe gilt dann trivialerweise auch für die Spurform der Abschätzung aus den Theoremen 3.36 (Seite 66) von Li und Yau bzw. 3.39 (Seite 70) von Hamilton.

3.2.3 Die Chow-Hamilton constrained matrix Harnack inequality

Wie schon im Falle der Spur-Harnack-Ungleichungen aus diesem Kapitel, so haben Hamilton und Chow auch für die Matrix-Harnack-Ungleichung eine "constrained inequality "bewiesen. Für die Krümmungsbedingungen gilt beim Übergang von der Spur- auf die Matrixaussage der schon auf Seite 73 bedachte Handel. An dieser Stelle sei auch der Beweis von Theorem 3.40 nachgeholt, der mit dem nächsten Lemma leicht folgt. Beim Nachlesen im Original sei davor gewarnt, dass Hamilton und Chow die gegenteilige Vorzeichenkonvention für den Riemannschen Krümmungstensor benutzen.

Lemma 3.49 *Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und seien $f, u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Lösungen der Wärmeleitungsgleichung auf M. Wir notieren*

$$P_{ij} = \nabla_i \nabla_j (\log f) - \frac{\nabla_i (\frac{u}{f}) \nabla_j (\frac{u}{f})}{1 - (\frac{u}{f})^2}$$

Dann gilt die Gleichheit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} P_{ij} =& \Delta P_{ij} + 2\nabla_l (\log f) \nabla_l P_{ij} + 2P_{il}P_{lj} - R_{il}P_{lj} - R_{jl}P_{li} \\
&+ \frac{2}{1 - (\frac{u}{f})^2} \Big(\nabla_i \nabla_l (\frac{u}{f}) + 2\frac{2(\frac{u}{f}) \nabla_i (\frac{u}{f}) \nabla_l (\frac{u}{f})}{1 - (\frac{u}{f})^2} \Big) \Big(\nabla_j \nabla_l (\frac{u}{f}) + 2\frac{2(\frac{u}{f}) \nabla_j (\frac{u}{f}) \nabla_l (\frac{u}{f})}{1 - (\frac{u}{f})^2} \Big) \\
&+ 2R_{ikjl}P_{kl} + 2R_{ikjl} \frac{\nabla_k (\frac{u}{f}) \nabla_l (\frac{u}{f})}{1 - (\frac{u}{f})^2} + 2R_{ikjl} \nabla_k (\log f) \nabla_l (\log f) \\
&- (\nabla_i R_{jl} + \nabla_j R_{il} - \nabla_l R_{ij}) \nabla_l (\log f).
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Beweis: Hamilton und Chow [CH97] S. 219-221. Der Beweis erfolgt durch reines Nachrechnen ohne Verwendung jedweder tieferliegender Ergebnisse. Gegenüber der Darstellung an der zitierten Stelle bringen weitere Zwischenschritte keine weitere Klarheit.

$\square$

Nachtrag: Beweis zu Theorem 3.40 von Seite 72: man benutzt das vorhergehende Lemma und übernimmt deswegen auch dessen Notation. Das Theorem ist mit dieser Notation bewiesen, falls

$$\text{mit} \quad P = g^{ij}P_{ij} = \operatorname{tr}\Big(\nabla_i\nabla_j(\log f) - \frac{\nabla_i(\frac{u}{f})\nabla_j(\frac{u}{f})}{1-(\frac{u}{f})^2}\Big) \ \text{gilt:} \quad P + \frac{n}{2t} \geq 0$$

für alle Zeiten. Dazu wird zunächst die Spur über das vorangegangene Lemma notiert. Dazu sei bemerkt, dass in den ohnehin verwendeten Normalkoordinaten

$$g^{ij}\big(-R_{il}P_{lj} - R_{jl}P_{li} + 2R_{ikjl}P_{kl}\big) = -R_{il}P_{il} - R_{il}P_{il} + 2R_{kl}P_{kl} = 0$$

gilt. Weil die kovariante Ableitung mit der Metrik (und dadurch mit der Spurbildung) kommutiert, folgt ausserdem mit der zweiten, einfach kontrahierten Bianchi-Identität (z.B. (2.10)), dass

$$g^{ij}(\nabla_i R_{jl} + \nabla_j R_{il} - \nabla_l R_{ij}) = g^{ij}(\nabla_j R_{il} - \nabla^k R_{kilj}) = \nabla^i R_{li} - \nabla^k R_{kl} = 0.$$

Mit diesen beiden Ungleichungen und der Spurabschätzung aus Lemma 3.33 von Seite 64 gilt schließlich als Spur des vorangegangenen Lemmas, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}P =& \Delta P + 2\langle\nabla(\log f),\, \nabla P\rangle + 2\Big|\nabla\nabla(\log f) - \frac{\nabla(\frac{u}{f})\nabla(\frac{u}{f})}{1-(\frac{u}{f})^2}\Big|^2 \\
& + \frac{2}{(1-(\frac{u}{f})^2)^3}\Big|2(\frac{u}{f})\nabla(\frac{u}{f})\nabla(\frac{u}{f}) + (1-(\frac{u}{f})^2)\nabla\nabla(\frac{u}{f})\Big|^2 \\
& + 2Ric(\nabla(\log f), \nabla(\log f)) + \frac{1}{1-(\frac{u}{f})^2}2Ric(\nabla(\frac{u}{f}), \nabla(\frac{u}{f})) \\
\geq& \Delta P + 2\langle\nabla(\log f),\, \nabla P\rangle + 2|P_{ij}|^2 + 0 + 0 + 0 \\
\geq& \Delta P + 2\langle\nabla(\log f),\, \nabla P\rangle + \frac{2}{n}P^2,
\end{aligned}$$

wo auch die Tatsache $Ric \geq 0$ eingegangen ist. Um jetzt als letzten Schritt das MP-Argument aus Lemma 3.28 von Seite 61 anwenden zu können, formuliert man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(P + \frac{n}{2t}) =& \frac{\partial}{\partial t}P + \frac{\partial}{\partial t}(\frac{n}{2t}) \\
& \geq \Delta P + 2\langle\nabla(\log f),\, \nabla P\rangle + \frac{2}{n}P^2 - \frac{n}{2t^2} \\
& = \Delta\big(P + \frac{n}{2t}\big) + 2\langle\nabla(\log f),\, \nabla\big(P + \frac{n}{2t}\big)\rangle + \frac{2}{n}P^2 - \frac{2}{n}\cdot(\frac{n}{2t})^2 \\
=& \Delta\big(P + \frac{n}{2t}\big) + 2\langle\nabla(\log f),\, \nabla\big(P + \frac{n}{2t}\big)\rangle + \frac{2}{n}\big(P - \frac{n}{2t}\big)\big(P + \frac{n}{2t}\big).
\end{aligned}$$

Wenn jetzt an einer Stelle (x,t) gilt, dass $P + \frac{n}{2t} \leq 0$, dann ist dort sicher auch $P - \frac{n}{2t} \leq 0$ und somit

$$L(P + \frac{n}{2t}) \equiv \Delta\big(P + \frac{n}{2t}\big) + 2\langle\nabla(\log f),\, \nabla\big(P + \frac{n}{2t}\big)\rangle - \frac{\partial}{\partial t}\big(P + \frac{n}{2t}\big) \leq 0$$

Mit Lemma 3.28 folgt dann ein Widerspruch aus der Annahme, dass $(P + \frac{n}{2t}) < 0$ an irgendeiner Stelle zu irgendeiner Zeit, und der Beweis des Theorems ist vollständig. Dazu sei bemerkt, dass das Lemma angewandt werden kann, da die Koeffizienten des Gradiententerms

$$g^{ij} b_j = g^{ij} \nabla_j (\log f) = g^{ij} \frac{\nabla_j f}{f}$$

beschränt sind, weil f in passenden Karten strikt positiv und von 0 weg beschränkt ist.

□

Die Eleganz der Arbeit von Hamilton und Chow liegt darin, dass mit dem oben zitierten Lemma 3.49 auch eine Matrix-Harnack-Ungleichung bewiesen werden kann, und dass der dafür nötige Aufwand nicht größer ist, als der eben für die Spur-Ungleichung betriebene.

Das Lemma kann wie im Beweis der älteren Matrix-Harnack-Ungleichung von einer Gleichheit zwischen Koeffizienten zu einer Gleichheit zwischen Eigenwerten der zugehörigen Tensoren uminterpretiert werden. Um möglichst viele Terme der rechten Seite von (3.95) nach unten im Eigenwertsinne gegen 0 abschätzen zu können, lassen sich folgende Überlegungen anstellen: sei $v \in T_pM$ zu gegebener Zeit t beliebig aber fest, dann ist

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-(\frac{u}{f})^2}\Big(\nabla_i\nabla_l(\frac{u}{f}) + 2\frac{2(\frac{u}{f})\nabla_i(\frac{u}{f})\nabla_l(\frac{u}{f})}{1-(\frac{u}{f})^2}\Big)\Big(\nabla_j\nabla_l(\frac{u}{f}) + 2\frac{2(\frac{u}{f})\nabla_j(\frac{u}{f})\nabla_l(\frac{u}{f})}{1-(\frac{u}{f})^2}\Big)v^iv^j \\ = \frac{2}{1-(\frac{u}{f})^2}\sum_l v^k\Big(\nabla_k\nabla_l(\frac{u}{f}) + 2\frac{2(\frac{u}{f})\nabla_k(\frac{u}{f})\nabla_l(\frac{u}{f})}{1-(\frac{u}{f})^2}\Big)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

und unter der Voraussetzung nichtnegativer Schnittkrümmungen gilt

$$R_{ikjl}(\nabla_k(\frac{u}{f})\nabla_l(\frac{u}{f}))v^iv^j \geq 0 \quad \text{sowie} \quad R_{ikjl}\nabla_k(\log f)\nabla_l(\log f)v^iv^j \geq 0.$$

Wird M zusätzlich Ricci-parallel angenommen, so dass die kovarianten Ableitungen des Ricci-Tensors verschwinden, so folgt aus Lemma 3.49 die Abschätzung

$$\frac{\partial}{\partial t}P_{ij} \geq \Delta P_{ij} + 2\nabla_l(\log f)\nabla_l P_{ij} + 2P_{il}P_{lj} - R_{il}P_{lj} - R_{lj}P_{il} + 2R_{ikjl}P_{kl}.$$

Letztlich wird auch für die Matrix-Harnach-Ungleichung natürlich das entsprechende Maximumprinzip angewandt werden. Es muss also ähnlich wie in Theorem 3.47 von Seite 83 ein Korrekturtensor zu P_{ij} addiert werden, der für kleine Zeiten t die Eigenwerte der Summe sicher positiv werden lässt. In der Spur-Ungleichung war zu diesem Zweck der Term $n/2t$ addiert worden. Hier wird dasselbe Ziel durch den naheliegendsten Tensor mit Spur $n/2t$, also durch $(1/2t)g_{ij}$ erreicht. Man nutzt also die Information des Lemmas wie sie in der letzten Ungleichung kodiert ist, und findet für die Evolution des korrigierten Tensors $P_{ij} + (1/2t)g_{ij}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(P_{ij} + \frac{1}{2t}g_{ij}) \geq -\frac{1}{2t^2}g_{ij} + \Delta P_{ij} + 2\nabla_l(\log f)\nabla_l P_{ij} \\ + 2P_{il}P_{lj} - R_{il}P_{lj} - R_{lj}P_{il} + 2R_{ikjl}P_{kl}. \end{aligned} \tag{3.96}$$

Wo hier kovariante Ableitungen in Raumrichtungen auf P_{ij} angewandt werden, kann sofort P_{ij} gegen $P_{ij} + (1/2t)g_{ij}$ ersetzt werden. Für die anderen Terme der rechten Seite gilt, weil $g_{ij} = \delta_{ij}$

$$2P_{il}P_{lj} - \frac{1}{2t^2}g_{ij} = 2P_{il}P_{lj} + \frac{1}{t}P_{il}g_{lj} - \frac{1}{t}P_{lj}g_{il} - \frac{1}{2t^2}g_{ij} = 2\big(P_{il} - \frac{1}{2t}g_{il}\big)\big(P_{lj} + \frac{1}{2t}g_{lj}\big)$$

und aus demselben Grund

$$-R_{il}P_{lj} - R_{lj}P_{il} = -R_{il}\big(P_{lj} + \frac{1}{2t}g_{lj}\big) - R_{lj}\big(P_{il} + \frac{1}{2t}g_{il}\big) + 2 \cdot \frac{1}{2t}R_{ij}.$$

Den letzten Term in dieser Gleichung kann man benutzen, um

$$2R_{ikjl}P_{kl} \quad \text{zu} \quad 2R_{ikjl}(P_{kl} + \frac{1}{2t}g_{kl})$$

aufzublasen. Durch Eintragen der letzten drei Überlegungen in (3.96) sieht man, dass

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(P_{ij} + \frac{1}{2t}g_{ij}) \geq\ & \Delta(P_{ij} + \frac{1}{2t}g_{ij}) + 2\nabla_l(\log f)\nabla_l(P_{ij} + \frac{1}{2t}g_{ij}) \\ & + 2\big(P_{il} - \frac{1}{2t}g_{il}\big)\big(P_{lj} + \frac{1}{2t}g_{lj}\big) \\ & - R_{il}\big(P_{lj} + \frac{1}{2t}g_{lj}\big) - R_{lj}\big(P_{il} + \frac{1}{2t}g_{il}\big) + 2R_{ikjl}\big(P_{kl} + \frac{1}{2t}g_{kl}\big).\end{aligned}$$

(Der letzte Summand fehlt übrigens in der Originalarbeit) Die jetzt vorliegende Evolutionsabschätzung erüllt die Form, die das Korollar 3.31 von Seite 63 fordert. Ohne diesmal so detailliert zu argumentieren, wie bei dem ganz analogen Vorgehen am Ende des Beweises von Theorem 3.47 prüft man also die Null-Bedingung für Eigenwerte für die Abbildung

$$A_{ij} \longrightarrow 2\big(P_{il} - \frac{1}{2t}g_{il}\big)A_{lj} - R_{il}A_{lj} - R_{lj}A_{il} + 2R_{ikjl}A_{kl}.$$

Multipliziert man in Gedanken die Zeile mit $v^i v^j$, wo $v, |v| = 1$ Null-Eigenvektor der symmetrischen Matrix A_{ij} ist, so verschwinden wiederum alle Terme bis auf den letzten. Für den letzten Term führt das bereits bekannte Argument auch zum Ziel: OBdA liegt A_{ij} in Diagonalform vor, dann haben wir also eine Basis aus Eigenvektoren von A, einer davon, oBdA der i-te, ist das verwendete v, und der letzte Term nimmt die Form (nur über k summiert) $2R_{ikik}A_{kk} \geq 2\mathrm{tr}(A) \cdot 0 = 0$ an. Damit ist die Null-Bedingung erfüllt und das abschließende Theorem bewiesen.

Theorem 3.50 (Chow, Hamilton [CH97], S.218) *Sei M eine Ricci-parallele Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Schnittkrümmungen nichtnegativ sind. Seien weiterhin $u, f : M \times (0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ (T nicht notwendig endlich) zwei Lösungen der Wärmeleitungsgleichung auf M. Gelte ausserdem $|u| < f$. Dann gilt die Matrix-Harnack-Ungleichung*

$$\frac{\nabla_i\nabla_j f}{f} - \frac{|\nabla f|^2}{f^2} + \frac{1}{2t}g_{ij} = \nabla_i\nabla_j(\log f) + \frac{1}{2t}g_{ij} > \frac{\nabla_i(\frac{u}{f})\nabla_j(\frac{u}{f})}{1 - (\frac{u}{f})^2}$$

Notationsverzeichnis

Größen Riemannscher Geometrie

M	Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n
(M,g)	S.o. jedoch mit Metrik g
TM	Tangentialbündel der Riemannschen Mannigfaltigkeit M
T_pM	Tangentialraum an M in p
T_OM	S.o. jedoch in $O \in M$
$C_i, C(a)$	Positive Konstanten (die nur von "a" abhängen)
g_{ij}	Koeffizienten der Riemannschen Metrik in Basisdarstellung
g^{ij}	Koeffizienten der Inversen der Metrik
$\delta^i_j, \delta^{ij}, \delta^{ij}$	Kronecker-Delta
$\lvert d\xi\rvert^2$	Euklidisches Längenelement
g	Gramsche Determinante oder Funktion
$\sqrt{\mathsf{g}}$	Wurzel der Gramschen Determinante für geodätische Polarkoord.
x	Element von M oder lokale Karte um einen Punkt in M
e_α	Vektorfelder eines an ∂M adaptierten ONBs. (siehe Indizes)
Γ^k_{ij}	Christoffelsymbole der Metrik g
h_{ij}	Zweite Fundamentalform in Kodimension 1 - Untermannigfaltigkeiten
Riem,R_{ikjl}	Riemannscher Krümmungstensor bzw. seine Koeffizienten
Ric, R_{ik}	Ricci-Tensor bzw. seine Koeffizienten
K	Meistens eine Schranke für Schnittkrümmungen von M
γ, σ	Geodätische in M
$\mathcal{L}(\gamma)$	Länge der Kurve γ
$\mathrm{dist}(x,y)$	Geodätischer Abstand der Punkte x, y
$\rho(x), \rho_y(x)$	Geodätischer Abstand von einem feste Bezugspunkt (y) aus
$\exp, \exp_p$	Riemannsche Exponentialfunktion auf TM bzw. T_pM
$\lvert\cdot\rvert$	Norm der Riemannschen Metrik g, falls nicht anders spezifiziert
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	Skalarprodukt der Riemannschen Metrik g
$\langle\cdot,\cdot\rangle_{Lo}$	Lorentzmetrik auf einem $\mathbb{R}^{n+1}$
$\langle\cdot,\cdot\rangle_H$	Skalarprodukt der Metrik von H
X', X''	Ableitung des Vektorfeldes X entlang einer Geodätischen γ in Richtung dieser Geodätischen

Funktionen und -Räume

f, u, h	Reellwertige Funktionen, für gewöhnlich definiert auf Teilmengen von M oder $M \times [0, \infty)$
$p(x, y, t)$	Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung auf M
$\mathfrak{P}_t$	Integraloperator des Wärmeleitungskerns H
$C^0(\Omega)$	Vektorraum der stetigen Funktionen $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$C^0(\overline{\Omega})$	S.o. jedoch auf dem Abschluss definiert
$C^k(\Omega)$	Vektorraum der k mal stetig differenzierbaren Fkt. $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$C^k(I)$	Entsprechend, aber auf einem Intervall definiert und mit Bildern in $\mathbb{R}$ oder M
$C^\infty(\Omega)$	Glatte Funktionen
$C^\infty(\overline{\Omega})$	$C^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$
S_ϕ	Menge der Subfunktionen relativ zu einer Funktion ϕ
$L^p(M)$	Raum der in p-ter Potenz integrierbaren Funktionen auf M
$L^1_{loc}(M)$	Raum der lokal absolutintegrierbaren Funktion auf M
$\lVert \cdot \rVert_p$	L^p-Norm.
$(\cdot, \cdot)_{L^2}$	Übliches Skalarprodukt des L^2.

Allgemeine Mathematik

$\mathbb{R}^n$	n-dimensionaler flacher Raum
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Hier: Raum der Koeffizientenmatrizen linearer Abbildungen zwischen Räumen der Dimension n
A^T, A^{-1}	Transponierte bzw. Inverse einer Matrix
Ω	Gebiet (offen und einfach zsh.)
$\overline{\Omega}$	Abschluss von Ω
$\partial\Omega$	Rand von Ω
$B_x(r)$	Volle offene Kugel um x mit geodätischem Radius r
$B(r)$	Wie letzte Zeile, falls das Zentrum bekannt oder egal ist
$B_r(x)$	S.o. falls der Mittelpunkt der Kugel gerade interessanter ist als ihr Radius
$\mathsf{B}_x(r)$	Volle offene Kugel um x mit Radius r im Tangentialraum T_xM
$\mathsf{S}_x(r)$	Sphäre um x mit Radius r im Tangentialraum T_xM
n	Dimension
t	Zeitvariable
θ	Winkel
ϵ, δ	Kleine reelle Zahlen
e	Eulersche Zahl
$\log$	Logarithmus zur Basis e
$\cap, \cup, \subseteq$	Durchschnitt bzw. Vereinigung zweier Mengen, Teilmenge
$\subset\subset$	Präkompakte Teilmenge (kompakter Abschluss)

Differentialausdrücke und Verwandtes

$\partial_i, \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^i}$	Partielle Ableitungen in Koordinatenrichtungen des $\mathbb{R}^n$ oder Basisderivationen in einem T_pM
$\frac{\partial}{\partial t}$	Partielle Ableitung nach dem Parameter t (es liegt kein Fluss vor)
$\frac{\partial}{\partial \nu}$	Partielle Ableitung in eine (nicht notwendig normale) auswärtsweisende Richtung einer berandeten Geometrie
∇f	Gradientenvektorfeld der Funktion f
∇_i, ∇^i	Kovariante Richtungsableitungen
$Df(x)$	Volles Differential einer Funktion f an der Stelle x
div	Divergenzoperator
Δf	Laplace-Operator auf Funktionen, falls $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, Laplace-Beltrami-Operator, falls $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$
L	Linearer partieller Differentialoperator zweiter Ordnung, je nach Kontext gleichmäßig elliptisch oder glm. parabolisch
tr	Spuroperator
$\lambda_{\min}$	Kleinster Eigenwert eines Operators oder einer Matrix, (Elliptizitätskonstante)

Größen aus der Kählergeometrie

$<,>$	Die standard euklidische Struktur auf dem $\mathbb{R}^n$
ω_0	Die standard symplektische Struktur auf dem $\mathbb{R}^{2n}$
J_0	Die standard komplexe Struktur auf dem R^{2n}
$O_n(\mathbb{R})$	Die orthogonale Gruppe von $\mathbb{R}^n$ bez. $<,>$, dim $1/2n(n+1)$
$Sp_{2n}(\mathbb{R})$	Die symplektische Gruppe von $\mathbb{R}^{2n}$ bez. ω_0, dim $2n^2+n$
$GL_n(\mathbb{C})$	Die allgemeine komplexe Gruppe von $\mathbb{R}^{2n}$ bez. J_0, dim $2n^2$
$sv_n(\mathbb{R})$	
$sp_{2n}(\mathbb{R})$	ihre jeweiligen Lie-Gruppen
$gl_{2n}(\mathbb{C})$	

Literaturverzeichnis

[Ber68] M. Berger, *Le spectre des varietes riemanniennes*, Revue Roumaine de Mathematiques pures et applices **XIII** (1968), no. 7, S.: 915–931.

[BGM71] Marcel Berger, Paul Gauduchon, and Edmond Mazet, *Le spectre d'une variete riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics, no. 194, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

[CH97] Bennet Chow and Richard S. Hamilton, *Constrained and linear harnack inequalities for parabolic equations*, Inventiones Mathematicae (1997), no. 129, S.:213–238.

[Cha84] Isaac Chavel, *Eigenvalues in riemannian geometry*, Pure and Applied Mathematics, Harcourt Brace Jovanovich, Orlando, San Diego, New York, London et al., 1984, With a chapter by Burton Randol and an Appendix by Josef Dodziuk.

[Cha95] Isaac Chavel, *Riemannian geometry - a modern introduction*, first paperback ed., Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 108, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, 1995.

[Fis89] Gerd Fischer, *Lineare algebra*, 9. aufl. ed., Viehweg Studium - Grundkurs Mathematik, Viehweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1989, Unter Mitarbeit von Richard Schimpl.

[GHL90] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine, *Riemannian geometry*, second ed., Universitext, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg et al., 1987, 1990, With 95 Figures.

[GT83] David Gilbarg and Neil S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, second ed., Grundlehren der mathematischen Wissenschaften - A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, vol. 224, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

[Ham82] Richard S. Hamilton, *Three-manifolds with positive ricci curvature*, Journal of Differential Geometry (1982), no. 17, S.: 255–306.

[Ham86] Richard S. Hamilton, *Four-manifolds with positive curvature operator*, Journal of Differential Geometry (1986), no. 24, S.:153–179.

[Ham93] Richard S. Hamilton, *A matrix harnack estimate for the heat equation*, communications in Analysis and Geometry **1** (1993), no. 1, S.:113–126.

[Hui95] Gerhard Huisken, *Differentialgeometrie 1*, Vorlesung am Mathematischen Institut der Universität Tübingen, SS 1995.

[Hui96] Gerhard Huisken, *Partielle Differentialgleichungen 1*, Vorlesung am Mathematischen Institut der Universität Tübingen, SS 1996.

[Hui96] Gerhard Huisken, *Differentialgeometrie 2*, Vorlesung am Mathematischen Institut der Universität Tübingen, WS 1995/96.

[Kau96] Helmut Kaul, *Mathematische Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie*, Vorlesung am Mathematischen Institut der Universität Tübingen, SS 1996.

[LS84] Peter Li and Richard S. Schoen, *Lp and mean value properties of subharmonic functions on riemannian manifolds*, Acta Mathematica (1984), no. 153, S.:279–301.

[LY86] Peter Li and Shing Tung Yau, *On the parabolic kernel of the schrödinger operator*, Acta mathematica (1986), no. 156, S.:153–200, (Reprint).

[Min53] S. Minakshisundaram, *Eigenfunctions on riemannian manifolds*, Journal of the Indian Mathematical Society (1953), no. 17, S.: 158–165.

[MP49] S. Minakshisundaram and A. Pleijel, *Some properties of the eigenfunctions of the laplace operator on riemannian manifolds*, Canadian Journal of Mathematics (1949), no. 1, S.: 242–256.

[MS67] H. P. McKean and I. M. Singer, *Curvature and the eigenvalues of the laplacian*, Jounal of Differential Geometry (1967), no. 1, S.: 43–69.

[PW76] Protter and Weinberger, *Maximum principles for partial differential equations*, messed-up 'n hard-read ed., who knows, congrats, you have found the prank!, 1776.

[Sak71] Takashi Sakai, *On eigenvalues of laplacian and curvature of riemannian manifold*, Tohoku Mathematical Journal (1971), no. 23, S.: 589–603.

[SY94] Richard Schoen and Shing Tung Yau, *Lectures on differential geometry*, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, vol. I, International Press (IP), Boston, Cambridge, 1994.

[Yau75] Shing Tung Yau, *Harmonic functions on complete riemannian manifolds*, Communications on Pure and Applied Mathematics (1975), no. 28, 201–228.