Der Fluß von Kurven und Flächen entlang der mittleren Krümmung

WISSENSCHAFTLICHE ARBEIT

von

Dagmar Engelhard

betreut von

Prof.Dr.G.Huisken

an der mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen

Tübingen im April 1999

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Allgemein soll es in dieser Arbeit um den Fluß von Kurven und Flächen entlang der mittleren Krümmung gehen, konkret:
Ist M^n eine n-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand und $F_0 : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte Immersion von M^n als Hyperfläche, so betrachten wir die Familie von glatten Immersionen $F(\,\cdot\,, t)$, die folgender Evolutionsgleichung genügt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F(p,t) = \triangle_t F(p,t), \qquad & p \in M^n,\, t \geq 0, \\ F(\,\cdot\,, 0) = F_0. & \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dabei ist $\triangle_t$ der Laplace-Beltrami Operator auf der Hyperfläche $M_t = F(\,\cdot\,, t)(M^n)$. Nach der Theorie der quasilinearen parabolischen Differentialgleichungen existiert eine Lösung der Gleichung (1.1) auf einem kurzen Zeitintervall. Dabei gilt

$$\triangle_t F(p,t) = -H(p,t) \cdot \nu(p,t),$$

wobei $H(p,t)$ die mittlere Krümmung und $\nu(p,t)$ der äußere Einheitsnormalenvektor am Punkt $F(p,t)$ auf M_t ist. M_t bewegt sich also in Richtung der Normalen mit Geschwindigkeit der mittleren Krümmung. Daher sagen wir, daß M_t eine Lösung des **mittleren Kümmungsflusses** ist.
Das Interesse, den mittleren Krümmungsfluß zu betrachten, kommt daher, daß die Gleichung (1.1) den Gradientenfluß zum Oberflächenfunktional darstellt (die mittlere Krümmung ist der Gradient des Oberflächenfunktionals). Das heißt unter dieser Gleichung wird der Flächeninhalt von M_t am schnellsten minimiert.

Bei unseren Untersuchungen beschränken wir uns auf den Fall nichtnegativer mittlerer Krümmung der Anfangsfläche M_0, d.h. es soll gelten:

$$H(p,0) \geq 0 \qquad \forall\, p \in M^n. \tag{1.2}$$

Wie wir bereits am Ende des zweiten Kapitels sehen werden, bleibt dann die mittlere Krümmung auch für alle Zeiten $t \geq 0$ nichtnegativ und wird sogar für $t > 0$ strikt positiv, wenn nicht $H \equiv 0$ ist. Letzteres aber können wir ausschließen, da M^n nach Voraussetzung kompakt ist.

Im dritten Kapitel werden wir zeigen, daß eine Lösung der Gleichung (1.1) genau bis zu dem Zeitpunkt existiert, an dem das Maximum des Betrags der zweiten Fundamentalform, $\max_{M_t} |A|^2$, divergiert, und daß dies bereits zu einem endlichen Zeitpunkt $T < \infty$ geschieht. Dabei folgen wir dem Beweis in [Hu1], §8.
Unser Ziel ist nun, das Verhalten der Flächen M_t nahe einer solchen Singularität mit Hilfe von gewissen Reskalierungstechniken, die wir in Kapitel 4 vorstellen werden, zu beschreiben. Dazu müssen wir zwei Typen von Singularitäten unterscheiden, und zwar durch die Existenz beziehungsweise die Nichtexistenz einer oberen Schranke der Wachstumsrate von $|A|^2$. Bei ersteren, den „TypI-Singularitäten“, folgert Huisken in [Hu2] aus einer sogenannten Monotonieformel, daß sich die Flächen nach geeigneter Reskalierung nahe der Singularität einer homothetisch-selbstähnlichen Lösung von (1.1) annähern. Das heißt Teilfolgen der reskalierten Flächen $\tilde{M}_s$ konvergieren gegen eine Grenzfläche $\tilde{M}_\infty$, die der Gleichung

$$\tilde{H}_\infty = (\tilde{F}_\infty, \tilde{\nu}_\infty) \tag{1.3}$$

genügt, wobei $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ das innere Produkt im $\mathbb{R}^{n+1}$ und $\tilde{F}_\infty$ der Positionsvektor im $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Betrachten wir diese Grenzfläche als neue Anfangsfläche, so ändert sich ihre geometrische Form unter dem mittleren Krümmungsfluß nicht. In [Hu3] konkretisiert dann Huisken, wie eine Fläche aussieht, die der Gleichung (1.3) genügt und nichtnegative mittlere Krümmung hat. Dies alles - von der Monotonieformel bis zu den möglichen Grenzflächen - werden wir in Kapitel 5 dieser Arbeit nachvollziehen.
In dem darauffolgenden Kapitel werden wir sehen, wie sich bei einer etwas anders gearteten Reskalierung von „TypII-Singularitäten“ translatierende Solitons ergeben - das sind Lösungen des mittleren Krümmungsflusses, die

für alle Zeiten $s \in \mathbb{R}$ existieren und sich durch Translation im $\mathbb{R}^{n+1}$ bewegen. Dabei gehen wir von den beiden Arbeiten [HS1] und [HS2] aus.

In den letzten beiden Kapiteln dieser Arbeit behandeln wir noch zwei Spezialfälle, nämlich zum einen den mittleren Krümmungsfluß von im $\mathbb{R}^2$ eingebetteten *Kurven* und zum anderen den von im $\mathbb{R}^{n+1}$ eingebetteten mehrdimensionalen *konvexen* Flächen.
Im ersten, dem eindimensionalen Fall vereinfacht Huisken in [Hu4] den Beweis von Graysons Theorem [Gr1], daß in der Ebene eingebettete Kurven zu einem „runden" Punkt konvergieren, indem er ausschließt, daß TypII-Singularitäten auftreten können. Darauf werden wir ausführlich in Kapitel 7 eingehen.
In Kapitel 8 werden wir dann anhand von Huiskens Arbeit [Hu1] den konvexen Fall behandeln. Demnach bilden die Flächen M_t des Flusses zu einem endlichen Zeitpunkt T eine TypI-Singularität aus und verschwinden dort in einem „runden" Punkt, das heißt nach geeigneter Reskalierung konvergieren die Flächen gegen eine Sphäre.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Maximumprinzipien

Da in dieser Arbeit immer wieder gewisse Maximumprinzipien verwendet werden, sei an dieser Stelle ein kurzer Überblick über dieselben gegeben. Dabei sei M^n eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand und $[0,T)$ ein endliches Zeitintervall.
Da für die Beweise der Maximumprinzipien das sogenannte Maximumlemma besonders wichtig ist (damit kann man die gegebenen parabolischen Differentialungleichungen auf elliptische zurückführen) und es auch später noch gebraucht wird, sei es hier vorweg beschrieben.

Lemma 2.1 (Maximumlemma) *Sei $f : M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann ist $\max_{M^n} f$ Lipschitz-stetig, und es gilt folgende Ungleichung:*

$$\frac{d}{dt} \max_{M^n} f \leq \sup\{\frac{\partial}{\partial t} f(p,t) : p \textit{ ist Maximalpunkt von } f(\,\cdot\,,t)\}$$

wobei $\frac{d}{dt} g \leq C$ für eine Lipschitz-stetige Funktion g definiert ist durch:

$$\limsup_{h \searrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \leq C.$$

Beweis: siehe [Ha2], Lemma 3.5.

Theorem 2.2 (Striktes Maximumprinzip für parabolische Differentialungleichungen)
Gilt für $f : M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}$ auf ganz $M^n \times [0,T)$

$$\frac{\partial}{\partial t} f \leq \triangle f + b^i \nabla_i f + cf, \qquad f(p,0) \leq 0 \quad \forall\, p \in M^n$$

mit beliebigen Funktionen $b^i, c : M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}$, $\quad c \geq 0$, so gilt

$$f \leq 0 \qquad \text{auf ganz } M^n \times [0,T).$$

Ist dann $f(p,0) < 0$ für ein $p \in M^n$, so gilt für alle $t > 0$

$$f < 0 \qquad \text{auf } M^n \times (0,T).$$

Beweis: siehe [PW], chapter 3, Theorem 13.

Theorem 2.3 *Gilt für $f : M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}$ auf ganz $M^n \times [0,T)$*

$$\frac{\partial}{\partial t} f \leq \triangle f - bf + c$$

für Konstanten $b, c > 0$, so ist f auf ganz $M^n \times [0,T)$ gleichmäßig beschränkt, und zwar durch eine Konstante, die nur von b und c und den Anfangswerten von f abhängt.

Beweis: Die obige parabolische Evolutionsungleichung bringen wir mit Hilfe des Maximumlemmas auf die elliptische Ungleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \max_{M_t} g \leq -b \max_{M_t} g, \qquad \text{mit } g = f - c/b,$$

woraus $max_{M_t}\, g \leq |max_{M_0}\, g|$ folgt, was der Behauptung entspricht. □

Theorem 2.4 (Striktes Maximumprinzip für symmetrische Bilinearformen (Hamilton))
Sei M^i_j eine von der Zeit $t \in [0,T)$ abhängige symmetrische Bilinearform auf TM^n, die der Evolutionsgleichung $\partial M^i_j/\partial t = \triangle M^i_j + \phi(M^i_j)$ genügt. Dabei sei $\phi(M^i_j)$ eine von M^i_j abhängige symmetrische Bilinearform auf TM^n, für die $\phi(M^i_j) \geq 0$ für $M^i_j \geq 0$ gilt. Ist dann $M^i_j \geq 0$ zur Zeit $t = 0$, so bleibt dies so für alle $t \geq 0$. Außerdem ist für alle $t > 0$ der Rang von M^i_j konstant und der Nullraum von M^i_j invariant unter Paralleltransport und invariant in der Zeit.

(*Anmerkung*: Hier und im folgenden bedeutet $M^i_j \geq 0$ für symmetrische 2-Tensoren M^i_j, daß alle Eigenwerte von M^i_j nichtnegativ sind.)

Beweis: siehe [Ha2], Lemma 8.2.

Theorem 2.5 (Striktes Maximumprinzip für elliptische Differentialungleichungen) *Es gelte für $f : M^n \to \mathbb{R}$ auf ganz M^n*

$$-\triangle f + b^i \nabla_i f + cf \le 0,$$

mit Funktionen b^i, $c : M^n \to \mathbb{R}$, $\quad c \ge 0$. Ist dann $f \le 0$, aber $f \not\equiv 0$, so ist $f < 0$ auf ganz M^n.

Beweis: siehe [E], §6.4, Theorem 4.

Aus allen in diesem Abschnitt genannten Sätzen erhalten wir entsprechende Minimumprinzipien beziehungsweise ein Minimumlemma, wenn wir die jeweiligen Ungleichheitszeichen einfach umkehren.

2.2 Bezeichnungen

Im folgenden bezeichnen wir Vektoren auf M^n mit $X = \{X^i\}$, Kovektoren mit $Y = \{Y_i\}$ und gemischte Tensoren mit $T = \{T^i_{jk}\}$. Für die induzierte Metrik und die zweite Fundamentalform auf M^n schreiben wir $g = \{g_{ij}\}$ bzw. $A = \{h_{ij}\}$. Über wiederholte Indizes wird stets von 1 bis n summiert, so daß sich das innere Produkt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ auf M^n schreiben läßt als

$$\langle T^i_{jk}, S^i_{jk} \rangle = g_{ij} g^{kl} g^{mp} T^i_{km} S^j_{lp}, \qquad |T|^2 = \langle T^i_{jk}, T^i_{jk} \rangle.$$

Insbesondere benutzen wir die Notation

$$H = g^{ij} h_{ij} = tr\{h^i_i\}, \qquad |A|^2 = g^{ij} g^{kl} h_{ik} h_{jl}.$$

Ist $F : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine lokale Parametrisierung von M^n, so gilt:

$$g_{ij}(\vec{x}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(\vec{x}), \frac{\partial F}{\partial x_j}(\vec{x}) \right), \qquad h_{ij}(\vec{x}) = -\left(\nu(\vec{x}), \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) \right), \qquad \vec{x} \in U,$$

wobei $(\cdot\,, \cdot)$ das innere Produkt im $\mathbb{R}^{n+1}$ und $\nu(\vec{x})$ die äußere Einheitsnormale von M^n am Punkt $F(\vec{x})$ bezeichnet. Der induzierte Zusammenhang auf M^n ist dann gegeben durch:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} g_{lj} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{lk} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{jk} \right).$$

Damit ist die kovariante Ableitung von einem Vektor bzw. von einem Kovektor auf M^n:

$$\nabla_j X^i = \frac{\partial}{\partial x_j} X^i + \Gamma^i_{jk} X^k, \qquad \nabla_j X_i = \frac{\partial}{\partial x_j} X_i - \Gamma^k_{ij} X_k.$$

Die k-te kovariante Ableitung eines Tensors bezeichnen wir mit $\nabla^k T$.
Der Laplaceoperator auf Tensoren T ist: $\triangle T^i_{jk} = g^{lm} \nabla_l \nabla_m T^i_{jk}$.
Der Riemannsche Krümmungstensor, der Ricci-Tensor und die skalare Krümmung sind gegeben durch die Gauß-Gleichungen:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= h_{ik} h_{jl} - h_{il} h_{jk}, \\ R_{ik} &= g^{jl} R_{ijkl} = H h_{ik} - h_{il} g^{lj} h_{jk}, \\ R &= g^{ik} R_{ik} = H^2 - |A|^2. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$g^{ml} R_{ijkl} = \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma^m_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma^m_{jk} + \Gamma^m_{jl} \Gamma^l_{ik} - \Gamma^m_{il} \Gamma^l_{jk}. \tag{2.1}$$

2.3 Erste grundlegende Ergebnisse

Lemma 2.6 *(i)* $H^2 \leq n|A|^2$.
(ii) $|\nabla^k H|^2 \leq n |\nabla^k A|^2, \quad k \in \mathbb{N}$.

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}^0$ gilt:

$$|\nabla^k H|^2 = |g^{ij} \nabla_{l_1} \ldots \nabla_{l_k} h_{ij}|^2 \leq |g^{ij}|^2 |\nabla_{l_1} \ldots \nabla_{l_k} h_{ij}|^2 = n |\nabla^k A|^2. \qquad \square$$

Lemma 2.7 *Für die äußere Einheitsnormale von M_t gilt $\partial \nu / \partial t = \nabla H$.*

Beweis: Aus $(\nu, \nu) \equiv 1$ folgt $\left(\frac{\partial}{\partial t}\nu, \nu\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\nu, \nu) \equiv 0$. Da an einem Punkt $p \in M^n$ die Tangentialvektoren $\{\partial F / \partial x_j\}_{1 \leq j \leq n}$ zusammen mit dem Normalenvektor ν den ganzen umgebenden Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ aufspannen, folgt hieraus:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nu = \left(\frac{\partial}{\partial t} \nu, \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) g^{ij} \frac{\partial F}{\partial x_j}.$$

Wegen $\left(\nu, \frac{\partial F}{\partial x_i}\right) \equiv 0$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nu, \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \nu, \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) + \left(\nu, \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \equiv 0,$$

so daß mit der Evolutionsgleichung (1.1) von F folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\nu &= -\left(\nu, \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) g^{ij}\frac{\partial F}{\partial x_j} = -\left(\nu, \frac{\partial}{\partial x_i}(-H\nu)\right) g^{ij}\frac{\partial F}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}H \cdot g^{ij}\frac{\partial F}{\partial x_j} = \nabla H.\end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, daß $(\nu, \nu) \equiv 1$ und somit $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\nu, \nu\right) \equiv 0$. □

Hilfssatz 2.8 *Für Vektoren* $\{X^k\}$ *und Kovektoren* $\{X_k\}$ *gilt*
(i) $\nabla_j\nabla_i X^k - \nabla_i\nabla_j X^k = R_{ijml}g^{kl}X^m = (h_{im}h_{jl} - h_{il}h_{jm})g^{kl}X^m.$
(ii) $\nabla_i\nabla_j X_k - \nabla_j\nabla_i X_k = R_{ijkl}g^{lm}X_m = (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk})g^{lm}X_m.$

Beweis: Folgt aus Gleichung (2.1). □

Lemma 2.9 *(i)* $\triangle h_{ij} = \nabla_i\nabla_j H + Hh_{im}g^{mp}h_{pj} - |A|^2 h_{ij}.$
(ii) $\triangle|A|^2 = 2\langle h_{ij}, \nabla_i\nabla_j H\rangle + 2|\nabla A|^2 + 2Htr(A^3) - 2|A|^4,$

Beweis: (i) Aus den Codazzi-Gleichungen $\nabla_l h_{ij} = \nabla_i h_{lj}$ und aus dem dem Hilfssatz 2.8 entsprechenden Satz für symmetrische 2-Tensoren folgt:

$$\begin{aligned}\triangle h_{ij} &= g^{kl}\nabla_k\nabla_l h_{ij} = g^{kl}\nabla_k\nabla_i h_{lj} \\ &= g^{kl}\nabla_i\nabla_k h_{lj} + g^{kl}g^{mp}h_{lp}(h_{kj}h_{im} - h_{km}h_{ij}) \\ &\qquad + g^{kl}g^{mp}h_{pj}(h_{kl}h_{im} - h_{km}h_{il}) \\ &= \nabla_i\nabla_j H + g^{kl}g^{mp}h_{lp}h_{kj}h_{im} - (g^{kl}g^{mp}h_{lp}h_{km})h_{ij} \\ &\qquad + (g^{kl}h_{kl})h_{im}g^{mp}h_{pj} - g^{kl}g^{mp}h_{pj}h_{km}h_{il} \\ &= \nabla_i\nabla_j H + Hh_{im}g^{mp}h_{pj} - |A|^2 h_{ij}.\end{aligned}$$

(ii) Aus $\triangle|A|^2 = 2\langle h_{ij}, \triangle h_{ij}\rangle + 2|\nabla A|^2$ folgt mit (i) die Behauptung (ii). □

Lemma 2.10 *Die induzierte Metrik von* $M_t = F(\,\cdot\,, t)(M^n)$ *genügt der Evolutionsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t}g_{ij} = -2Hh_{ij}. \tag{2.2}$$

Beweis: Wir errechnen aus den Definitionen für die induzierte Metrik und die zweite Fundamentalform und aus der Gleichung (1.1)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right), \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) \right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (-H\nu), \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} (-H\nu) \right) \\
&= -H \left(\frac{\partial \nu}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) - H \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \right) = -2H h_{ij}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Korollar 2.11 *Die Inverse der induzierten Metrik genügt der Evolutionsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = 2H h_{kl} g^{ik} g^{jl}.$$

Beweis: Folgt aus dem vorigen Lemma und der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(g^{ik} g_{kl} \right) = g_{kl} \frac{\partial}{\partial t} g^{ik} + g^{ik} \frac{\partial}{\partial t} g_{kl} \equiv 0. \qquad \square$$

Korollar 2.12 *Für das Maß $d\mu_t$ auf M_t gilt:* $\frac{\partial}{\partial t} d\mu_t = -H^2 d\mu_t$

Beweis: Mit $g = \{g_{ij}\}$ ist $d\mu_t = \sqrt{\det g(x,t)}\, dx$. Nach Sätzen der linearen Algebra gilt $\frac{\partial}{\partial t} \det g = \det g \cdot \left(g^{kl} \frac{\partial}{\partial t} g_{kl} \right)$. Daraus folgt mit Lemma 2.10 die Behauptung. $\square$

Lemma 2.13 *Die zweite Fundamentalform genügt der Evolutionsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t} h_{ij} = \triangle h_{ij} - 2H h_{im} g^{ml} h_{lj} + |A|^2 h_{ij}$$

Beweis: siehe [Hu1], Theorem 3.4.

Korollar 2.14 *(i)* $\frac{\partial}{\partial t} h^i_j = \triangle h^i_j + |A|^2 h^i_j$

$$\text{(ii)} \quad \frac{\partial}{\partial t} H = \triangle H + |A|^2 H \tag{2.3}$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{\partial}{\partial t} |A|^2 = \triangle |A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2|A|^4 \tag{2.4}$$

Beweis: (i) Folgt aus Korollar 2.11 und Lemma 2.13.
(ii) und (iii) folgen aus (i) und den Definitionen von H und $|A|^2$. $\square$

Im folgenden bezeichne $[0,T)$ das maximale Zeitintervall, auf dem eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses existiert.
Nach dem strikten Maximumprinzip 2.2 folgt aus der Vorausssetzung $H(p,0) \geq 0$ für alle $p \in M^n$ und aus der Evolutionsgleichung (2.3) für H, daß entweder $H \equiv 0$ auf $M^n \times [0,T)$ oder $H > 0$ für alle $t > 0$. Da es keine kompakten Minimalflächen ($H \equiv 0$) gibt, aber M^n und somit auch alle M_t nach Voraussetzung kompakt sind, gilt in der ganzen folgenden Arbeit (O.B.d.A. auch für $t = 0$)

$$H(p,t) > 0 \qquad \forall\ (p,t) \in M^n \times [0,T). \tag{2.5}$$

Wegen Lemma 2.6(i) gilt ebenso $|A|^2(p,t) > 0 \quad \forall\ (p,t) \in M^n \times [0,T)$.

Kapitel 3

Singularitäten

3.1 Das maximale Zeitintervall

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß eine Lösung der Gleichung (1.1) genau bis zu dem Zeitpunkt $T < \infty$ existiert, an dem das Maximum der Krümmung divergiert.
Sei im folgenden $[0, T)$ das maximale Zeitintervall, auf dem eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses existiert. Dann gilt

Theorem 3.1 *$T < \infty$.*

Beweis: siehe [Hu1], Lemma 5.8. Hier wird das Maximumprinzip 2.2 auf $f := H - \varphi$ mit $c := \frac{1}{n}((H-\varphi)^2 + 3H\varphi)$ angewendet.

Um nun auch noch beweisen zu können, daß $max_{M_t} |A|^2 \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow T$, benötigen wir noch einige Vorbereitungen.
So bezeichne $S * T$ irgendeine lineare Kombination von Tensoren, die durch Kontraktion von S und T mit der Metrik g entstanden ist.
Mit Lemma 2.10 und Korollar 2.11 folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2} g^{il}(\nabla_j \frac{\partial}{\partial t} g_{kl} + \nabla_k \frac{\partial}{\partial t} g_{jl} - \nabla_l \frac{\partial}{\partial t} g_{jk}) \\ &= -g^{il}(\nabla_j(Hh_{kl}) + \nabla_k(Hh_{jl}) - \nabla_l(Hh_{jk})) = A * \nabla A \end{aligned}$$

Daraus läßt sich mit Hilfe vollständiger Induktion folgendes Lemma beweisen:

Lemma 3.2 *Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt die Gleichung:*

$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla^m A|^2 = \triangle|\nabla^m A|^2 - 2|\nabla^{m+1}A|^2 + \sum_{i+j+k=m} \nabla^i A * \nabla^j A * \nabla^k A * \nabla^m A$$

Beweis: Für $m = 0$ ist das die schon bekannte Evolutionsgleichung (2.4) für $|A|^2$. Weiter genau wie in [Ha1], §13. □

Lemma 3.3 *Gilt $|A|^2 \leq C_0$ auf ganz $M^n \times [0,T)$, so gibt es für alle $m \in \mathbb{N}$ Konstanten $C_m < \infty$, die nur von n, M_0 und C_0 abhängen, so daß*

$$|\nabla^m A|^2 \leq C_m \qquad \text{auf ganz } M^n \times [0,T).$$

Beweis: Nach Lemma 3.2 gibt es eine nur von n und m abhängige Konstante $C(n,m)$, so daß gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla^m A|^2 \leq \triangle|\nabla^m A|^2 - 2|\nabla^{m+1}A|^2 + C(n,m) \sum_{i+j+k=m} |\nabla^i A||\nabla^j A||\nabla^k A||\nabla^m A|$$

Damit können wir vollständige Induktion durchführen:
Für $m = 0$ haben wir vorausgesetzt, daß $|\nabla^m A|^2 = |A|^2 \leq C_0$.
Sei also $m > 0$ und $|\nabla^l A|^2 \leq C_l$ für $0 \leq l \leq m-1$.
Dann gibt es nach obiger Ungleichung Konstanten B_{m-1}, $B_m > 0$, die nur von n, m, M_0 und C_l $(0 \leq l \leq m-1)$ abhängen, so daß gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}|\nabla^{m-1}A|^2 &\leq \triangle|\nabla^{m-1}A|^2 - 2|\nabla^m A|^2 + B_{m-1}, \\ \frac{\partial}{\partial t}|\nabla^m A|^2 &\leq \triangle|\nabla^m A|^2 + B_m(1 + |\nabla^m A|^2). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Multiplizieren wir nun die erste Ungleichung mit B_m und addieren sie zur zweiten, so erhalten wir mit $f = |\nabla^m A|^2 + B_m|\nabla^{m-1}A|^2$

$$\frac{\partial}{\partial t}f \leq \triangle f - B_m|\nabla^m A|^2 + B \leq \triangle f - B_m f + B'$$

wobei $B = B_m(B_{m-1}+1)$ und $B' = B + B_m^2 C_{m-1}$. Daraus folgt mit dem Maximum-Prinzip 2.3, daß auch $|\nabla^m A|^2$ beschränkt ist, und zwar durch eine Konstante C_m, die nur von n, m, M_0 und C_0 abhängig ist, da auch die übrigen Konstanten C_l mit $l < m$ wegen der Induktion nur von eben diesen Konstanten abhängig sind. □

Lemma 3.4 *Sei g_{ij} eine von der Zeit t abhängige Metrik auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M^n mit $0 \leq t < T \leq \infty$, und es gelte*

$$\int_0^T \max_{M^n} \left| \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right| dt \leq C < \infty,$$

wobei $|\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}|^2 = g^{ij} g^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial t} g_{ik}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} g_{jl}\right)$. Dann sind die Metriken $g_{ij}(t)$ für alle Zeiten t äquivalent und konvergieren für $t \to T$ gleichmäßig gegen eine positiv definite Metrik $g_{ij}(T)$, die stetig und ebenso zu allen anderen $g_{ij}(t)$ äquivalent ist.

Beweis: siehe [Ha1], Lemma 14.2

Nun können wir den zweiten Hauptsatz dieses Abschnittes beweisen:

Theorem 3.5 *Für $t \to T$ haben wir $\max_{M_t} |A|^2 \to \infty$.*

Beweis: Wir wollen zeigen, daß sich bei $max_{M_t} |A|^2 \leq C$ für alle $t \in [0, T)$ die Flächen M_t für $t \to T$ einer glatten Hyperfläche M_T annähern. Dann aber können wir nach der Theorie der quasilinearen parabolischen Differentialgleichungen die Lösung von (1.1) auf spätere Zeiten $t > T$ fortsetzen, was ein Widerspruch zur Maximalität von T ist.
Wir nehmen also im folgenden an, daß

$$\max_{M_t} |A|^2 \leq C \qquad \text{für } 0 \leq t < T \tag{3.2}$$

und daß M_t lokal gegeben ist durch $F(\vec{x}, t)$ für $\vec{x} \in U \subset \mathbb{R}^n$ und $0 \leq t < T$.
Dann erhalten wir aus Gleichung (1.1) und Lemma 2.6(i):

$$|F(\vec{x}, \tau) - F(\vec{x}, \sigma)| = \left| \int_\sigma^\tau \frac{\partial}{\partial t} F(\vec{x}, t) dt \right| \leq \int_\sigma^\tau H(\vec{x}, t) dt \leq \sqrt{nC}(T - \sigma).$$

Da $T < \infty$ nach Theorem 3.1, folgt daraus, daß $F(\,\cdot\,, t)$ für $t \to T$ gegen eine eindeutige stetige Funktion $F(\,\cdot\,, T)$ konvergiert.
Nach Lemma 2.10, Lemma 2.6(i), Ungleichung (3.2) und Theorem 3.1 gilt außerdem:

$$\int_0^T \max_{M_t} \left| \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right| dt = \int_0^T \max_{M_t} (2H|A|) \leq 2\sqrt{n} C T < \infty.$$

So folgt aus Lemma 3.4, daß $F(\,\cdot\,,T)$ die Parametrisierung einer Hyperfläche M_T ist. Da nach Voraussetzung $|A|^2 \le C < \infty$ auf ganz $M^n \times [0,T)$, folgt aus Lemma 3.3, daß auch alle Ableitungen von A gleichmäßig beschränkt sind. Daher implizieren die Evolutionsgleichungen (1.1) und (2.2) obere Schranken für alle Ableitungen von F, so daß $M_T = F(\,\cdot\,,T)$ glatt ist. Dies aber ist ein Widerspruch zur Maximalität von T. $\square$

3.2 Die zwei Typen von Singularitäten

Bei jeder Singularität haben wir folgende untere Schranke:

Lemma 3.6 $\max_{M_t} |A|^2 \ge \frac{1}{2(T-t)}$.

Beweis: Sei $B(t) := \max_{M_t} |A|^2$. Dann gilt nach dem Maximum-Lemma 2.1 und der Evolutionsgleichung (2.4) für $|A|^2$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}B &\le \sup\{\frac{\partial}{\partial t}|A|^2(p_t,t) : |A|^2(p_t,t) = \max_{M_t}|A|^2\} \\ &\le \sup\{2|A|^4(p_t,t) : |A|^2(p_t,t) = \max_{M_t}|A|^2\} = 2B^2. \end{aligned}$$

Da $B(t) > 0$ für alle $t \in [0,T)$ (nach Ungleichung (2.5)) und $B(t) \to \infty$ für $t \to T$ (nach Theorem 3.5), folgt daraus:

$$2\int_t^T d\tau \ge \int_t^T \frac{B'(\tau)}{B^2(\tau)} d\tau = \frac{1}{B(t)}.$$

Also ist $B(t) \ge \frac{1}{2(T-t)}$. $\square$

Dies motiviert folgende Definition.

Definition 3.7 *Eine Lösung der Gleichung (1.1) hat zum Zeitpunkt $T < \infty$ eine* **TypI-Singularität***, falls*

$$\max_{M_t} |A|^2 \le \frac{C_0}{2(T-t)} \qquad \textit{für ein } C_0 \in \mathbb{R} \textit{ und alle } t \in [0,T),$$

eine **TypII-Singularität***, falls*

$$2(T-t)\max_{M_t}|A|^2 \to \infty \qquad \textit{für } t \to T.$$

Kapitel 4

Reskalierungstechniken

Um näherungsweise das Verhalten von M_t nahe einer Singularität beschreiben zu können, verwenden wir gewisse Reskalierungstechniken, die je nach Art der Singularität verschieden sind. So multiplizieren wir bei TypI-Singularitäten zu jedem Zeitpunkt t die Parametrisierungen von M_t mit einem gewissen Faktor. Diesen Reskalierungsfaktor müssen wir so geschickt wählen, daß wir eine „vernünftige“ Grenzfläche erhalten, an der wir Aussagen über das asymptotische Verhalten des mittleren Krümmungsflusses nahe der Singularität machen können. Das aber heißt, daß der Reskalierungsfaktor einerseits so groß sein muß, daß die Krümmung der so erhaltenen neuen Hyperflächen gleichmäßig beschränkt ist, daß er aber andererseits auch nicht zu groß sein darf, weil sonst die Krümmung gegen identisch Null geht, die Flächen also zu einer Ebene konvergieren.
Bei TypII-Singularitäten reskalieren wir, grob gesprochen, nicht nur die einzelnen Flächen des mittleren Krümmungsflusses, sondern gleich den ganzen Fluß, so daß wir daraus einen Grenzfluß erhalten, der so spezielle Eigenschaften aufweist, daß wir ihn mit einer Translation einer bestimmten Fläche im $\mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren können.

4.1 Reskalierung der TypI-Singularitäten

Der Fluß M_t habe im folgenden bei T eine TypI-Singularität, das heißt es gelte:

$$\max_{M_t} |A|^2 \leq \frac{C_0}{2(T-t)} \qquad \text{für ein } C_0 \in \mathbb{R} \text{ und alle } t \in [0,T). \tag{4.1}$$

Daraus folgt mit der Ungleichung $H^2 \leq n|A|^2$ (Lemma 2.6(i))

$$|F(p,t) - F(p,s)| \leq \int_s^t |H(p,\tau)| d\tau \leq \sqrt{nC_0} \left((T-s)^{1/2} - (T-t)^{1/2} \right).$$

Also konvergiert $F(\,\cdot\,, t)$ gleichmäßig für $t \to T$. Damit haben wir folgende Definition:

Definition 4.1 *Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ heißt* **Blow-up Punkt**, *wenn es ein $p \in M^n$ gibt, mit $F(p,t) \to x$ und $|A|(p,t) \to \infty$ für $t \to T$.*

Wir nehmen im folgenden O.B.d.A an, daß der Ursprung $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein solcher Blow-up-Punkt ist. Damit definieren wir eine reskalierte Immersion $\tilde{F}(\,\cdot\,, s)$ durch

$$\tilde{F}(p,s) = (2(T-t))^{-1/2} F(p,t), \qquad s(t) = -\frac{1}{2}\ln(T-t).$$

So gilt $ds/dt = (2(T-t))^{-1}$ und

$$\begin{array}{rclrcl} \tilde{g}_{ij}(s) & = & (2(T-t))^{-1} g_{ij}(t), & \tilde{h}_{ij}(s) & = & (2(T-t))^{-1/2} h_{ij}(t), \\ \tilde{H}(s) & = & (2(T-t))^{1/2} H(t), & |\tilde{A}|^2(s) & = & (2(T-t))|A|^2(t). \end{array} \tag{4.2}$$

Außerdem erhalten wir Evolutionsgleichungen für alle reskalierten Krümmungsgrößen. Seien also P und Q Ausdrücke, die nur von g und A abhängen, und seien $\tilde{P}$ und $\tilde{Q}$ die entsprechenden reskalierten Größen. Dann sagen wir, P habe Grad α, wenn $\tilde{P} = (2(T-t))^{-\alpha/2} P$. Damit errechnen wir Folgendes:

Lemma 4.2 *Angenommen es gilt $dP/dt = \triangle\, P + Q$ für die ursprüngliche Evolutionsgleichung (1.1), und P hat Grad α. Dann hat Q Grad (α - 2), und es gilt $d\tilde{P}/ds = \tilde{\triangle}\tilde{P} + \tilde{Q} + \alpha\tilde{P}$.* □

Nach Voraussetzung (4.1) gilt $|\tilde{A}|^2 = 2(T-t)|A|^2 \leq C_0$. Daraus folgt

Lemma 4.3 *Für jedes $m \geq 0$ gibt es eine nur von n, m, C_0 und M_0 abhängige Konstante $C_m < \infty$ mit $|\tilde{\nabla}^m \tilde{A}|^2 \leq C_m$ auf ganz $M^n \times [-\ln T, \infty)$.*

Beweis: Wie aus den Gleichungen (4.2) leicht zu errechnen ist, gilt $|\tilde{\nabla}^m \tilde{A}|^2 = (2(T-t))^{m+1}|\nabla^m A|^2$, das heißt $|\nabla^m A|^2$ hat Grad $-2(m+1)$. So folgt aus dem vorigen Lemma und Lemma 3.2

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}|\tilde{\nabla}^m \tilde{A}|^2 &= \tilde{\triangle}|\tilde{\nabla}^m \tilde{A}|^2 - 2(m+1)|\tilde{\nabla}^m \tilde{A}|^2 - 2|\tilde{\nabla}^{m+1}\tilde{A}|^2 \\
&\quad + \sum_{i+j+k=m} \tilde{\nabla}^i \tilde{A} * \tilde{\nabla}^j \tilde{A} * \tilde{\nabla}^k \tilde{A} * \tilde{\nabla}^m \tilde{A} \\
&\leq \tilde{\triangle}|\tilde{\nabla}^m \tilde{A}|^2 - 2|\tilde{\nabla}^{m+1}\tilde{A}|^2 \\
&\quad + C(n,m) \sum_{i+j+k=m} |\tilde{\nabla}^i \tilde{A}||\tilde{\nabla}^j \tilde{A}||\tilde{\nabla}^k \tilde{A}||\tilde{\nabla}^m \tilde{A}|.
\end{aligned}$$

Da $|\tilde{A}|^2 \leq C_0$, können wir nun wie im Beweis von Lemma 3.3 fortfahren und erhalten die Behauptung. □

Die Krümmung der so reskalierten Hyperflächen $\tilde{M}_s$ ist also samt allen ihren Ableitungen gleichmäßig in Raum und Zeit nach oben beschränkt. Nach Lemma 3.6 haben wir aber auch $max_{\tilde{M}_s} |\tilde{A}|^2 = 2(T-t)\, max_{M_t} |A|^2 \geq 1$, so daß der reskalierte Krümmungsbetrag nie gänzlich verschwinden kann. Damit hat sich die eben beschriebene Reskalierungstechnik für TypI-Singularitäten als sinnvoll erwiesen.

4.2 Reskalierung der TypII-Singularitäten

Handelt es sich bei der zu untersuchenden Singularität um eine vom TypII, das heißt ist $lim_{t\to T}(2(T-t)\, max_{M_t} |A|^2) = \infty$, so reicht die im vorigen Abschnitt beschriebene Reskalierung nicht mehr aus, denn dann gilt immer noch $max_{\tilde{M}_s}|\tilde{A}|^2 = 2(T-t)\, max_{M_t}|A|^2 \to \infty$ für $t \to T$. Wir müssen also anders vorgehen. Dazu ist es zunächst wichtig zu wissen, daß H^2 und $|A|^2$ dieselbe Blow-up Rate haben, das heißt es gilt

$$\lim_{t\to T}(2(T-t)\max_{M_t}|A|^2) = \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{t\to T}(2(T-t)\max_{M_t} H^2) = \infty.$$

Denn es ist nicht nur $H^2 \leq n|A|^2$, sondern auch:

Lemma 4.4 *$|A|^2 \leq c_0 H^2$ für ein $c_0 > 0$.*

Beweis: Aus den Evolutionsgleichungen (2.3) und (2.4) läßt sich errechnen, daß

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|A|^2}{H^2}\right) = \triangle\left(\frac{|A|^2}{H^2}\right) + \frac{2}{H}\langle \nabla_i H, \nabla_i \left(\frac{|A|^2}{H^2}\right)\rangle - \frac{2}{H^4}|H\nabla_i h_{kl} - \nabla_i H \cdot h_{kl}|^2.$$

Daraus folgt mit dem Maximum-Prinzip 2.2

$$\frac{|A|^2}{H^2} \leq \max_{M_0} \frac{|A|^2}{H^2} =: c_0,$$

wobei $c_0 > 0$ wegen Ungleichung (2.5) gilt. □

Wir wählen nun eine Folge $\{(p_k, t_k)\}$ für $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ mit $p_k \in M^n$ und $t_k \in [0, T - 1/k]$, so daß

$$H^2(p_k, t_k) \cdot (T - \frac{1}{k} - t_k) = \max_{\substack{t \leq T-1/k \\ M^n}} \left(H^2(p,t) \cdot (T - \frac{1}{k} - t)\right).$$

Dann setzen wir

$$L_k = H(p_k, t_k), \qquad \alpha_k = -L_k^2 t_k, \qquad \omega_k = L_k^2 \cdot (T - \frac{1}{k} - t_k).$$

Lemma 4.5 *Für TypII-Singularitäten gilt für $k \to \infty$:*

$$t_k \to T, \qquad L_k \to \infty, \qquad \alpha_k \to -\infty, \qquad \omega_k \to \infty$$

Beweis: siehe [HS1], Lemma 4.3.

Nun sei für jedes $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ eine Familie von Hyperflächen $M_{k,s}$ definiert durch

$$F_k(p,s) = L_k \cdot (F(p, L_k^{-2}s + t_k) - F(p_k, t_k)), \qquad s \in [\alpha_k, \omega_k]. \tag{4.3}$$

Wir versehen dann alle Größen auf $M_{k,s}$ mit entsprechendem Index k. Damit haben wir $\nu_k(p,s) = \nu(p, L_k^{-2}s + t_k)$ und mit $g = \{g_{ij}\}$ und $A = \{h_{ij}\}$:

$$g_k(p,s) = L_k^2 \cdot g(p, L_k^{-2}s + t_k), \qquad A_k(p,s) = L_k \cdot A(p, L_k^{-2}s + t_k)$$
$$\Rightarrow H_k(p,s) = L_k^{-1} H(p, L_k^{-2}s + t_k).$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial s} F_k(p,s) = -H_k(p,s) \cdot \nu_k(p,s), \tag{4.4}$$

das heißt F_k ist eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses, die für Zeiten $s \in [\alpha_k, \omega_k]$ existiert.

Lemma 4.6 *Für die wie in (4.3) reskalierten Immersionen $M_{k,s}$ gilt:*
(i) $F_k(p_k, 0) = 0,\ H_k(p_k, 0) = 1$*;*
(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ und alle $\bar{\omega} > 0$ existiert ein solches k_0, daß $\max_{M_{k,s}} H_k \le 1 + \varepsilon$ *für alle $k \ge k_0$ und $s \in [\alpha_{k_0}, \bar{\omega}]$.*

Beweis: siehe [HS1], Lemma 4.4(i) und (iii).

Wie wir in Kapitel 6 noch sehen werden, konvergiert eine Teilfolge von $M_{k,s}$ gegen einen mittleren Krümmungsfluß $\tilde{M}_s$, der für alle $s \in \mathbb{R}$ definiert ist. Aus dem eben genannten Lemma folgt dann sofort, daß auf allen $\tilde{M}_s$ überall $\tilde{H} \le 1$ gilt, also $|\tilde{A}|^2 \le c_0$ nach Lemma 4.4. Nach Lemma 3.3 sind dann auch alle Ableitungen $|\tilde{\nabla}^m \tilde{A}|$ gleichmäßig beschränkt.
Gleichzeitig aber ist $\tilde{H}$ auf $\tilde{M}_0$ nicht identisch Null, da nach dem ersten Teil des obigen Lemmas $0 \in M_{k,0}$ ist und an diesem Punkt $H_k = 1$ für alle k gilt, so daß dasselbe auch für die Grenzfläche $\tilde{M}_0$ gilt.
Wir haben also die Reskalierung gerade so gewählt, daß die Singularität weder „singulär“ bleibt, noch die Flächen zu trivialen Ebenen „abflachen“. An dem so erhaltenen Grenzfluß können wir somit sehr schön sehen, wie sich der mittlere Krümmungsfluß in der Nähe der Singularität verhält. Weiteres dazu dann in Kapitel 6.

4.3 Reskalierung für strikt konvexe Flächen

In Kapitel 8 werden wir den mittleren Krümmungsfluß von *konvexen* Fächen und ihr Verhalten nahe einer Singularität untersuchen. Dazu benutzen wir wieder eine andere Art der Reskalierung. Im Unterschied zu den beiden zuerst beschriebenen Reskalierungstechniken konvergieren bei der im folgenden beschriebenen Methode nicht nur *Teil*folgen der reskalierten Flächen; vielmehr konvergieren diese *komplett* gegen eine Sphäre. Außerdem können wir Aussagen über die Schnelligkeit dieser Konvergenz machen. Hier sei zunächst die Art der Reskalierung beschrieben:
Wie wir in Kapitel 8 noch sehen werden, konvergieren bei konvexer Anfangsfläche M_0 die Flächen M_t des Flusses gegen einen Punkt $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Nehmen

wir O.B.d.A. an, daß $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{n+1}$ der Ursprung im $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, so multiplizieren wir die Parametrisierung von M_t zu jedem Zeitpunkt t mit einem solchen Faktor $\psi(t)$, daß der Flächeninhalt der reskalierten Flächen $\tilde{M}_t$ konstant gleich dem Flächeninhalt der Anfangsfläche M_0 ist, das heißt $\tilde{M}_t$ ist gegeben durch

$$\tilde{F}(p,t) = \psi(t) \cdot F(p,t) \qquad \text{mit } |\tilde{M}_t| = \int_{\tilde{M}_t} d\tilde{\mu} = |M_0|.$$

Außerdem benutzen wir eine andere Zeitvariable, nämlich $s(t) = \int_0^t \psi^2(\tau)d\tau$, also $s \in [0, S)$ mit $S = \int_0^T \psi^2(\tau)d\tau$.
Um nun zu zeigen, daß $\tilde{H}$ für alle Zeiten $s \in [0, S)$ sowohl nach oben als auch nach unten durch Konstanten $C_\alpha, C_\beta > 0$ beschränkt ist, benötigen wir folgende drei Sätze aus Kapitel 8:

1) Die Flächen M_t konvergieren für $t \to T$ gegen einen Punkt $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{n+1}$ (Thm.8.1). O.B.d.A. ist $\mathcal{O}$ der Ursprung vom $\mathbb{R}^{n+1}$.
2) $\tilde{H}_{max}/\tilde{H}_{min} \to 1$ für $s \to S$ (Kor.8.24(ii)).
3) $\tilde{h}_{ij} \geq \varepsilon \tilde{H} \tilde{g}_{ij}$ auf ganz $M^n \times [0, S)$ (Kor.8.24(i)).

Theorem 4.7 *Es gibt Konstanten C_α und C_β, so daß für $0 \leq s < S$ gilt:*

$$0 < C_\alpha \leq \tilde{H}_{min} \leq \tilde{H}_{max} \leq C_\beta < \infty$$

Beweis: Die Fläche $\tilde{M}_s$ umschließt ein Volumen $\tilde{V}_s$, das durch das Divergenztheorem gegeben ist, nämlich

$$\tilde{V}_s = \frac{1}{n+1} \int_{\tilde{M}_s} (\tilde{F}, \nu) d\mu. \tag{4.5}$$

Da nach Ungleichung (2.5) jeder Vektor $-H\nu$ auf M_t nach innen zeigt, ist es offensichtlich, daß für $t_1 > t_2$ die Fläche M_{t_1} in einem Gebiet des $\mathbb{R}^{n+1}$ liegt, das von M_{t_2} umschlossen wird. Somit liegt der Punkt $\mathcal{O}$, gegen den nach Theorem 8.1 die Flächen M_t konvergieren, in jedem der Gebiete, die von den Flächen M_t umschlossen werden. Da wir angenommen haben, daß $\mathcal{O}$ der Ursprung vom $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, liegt er auch in jedem der Gebiete, die von den *reskalierten* Flächen $\tilde{M}_s$ umschlossen werden. Somit ist $(\tilde{F}, \tilde{\nu})$ überall auf $\tilde{M}_s$ positiv.

Mit der isoperimetrischen Ungleichung haben wir

$$\tilde{V}_s \leq c_n |\tilde{M}_s|^{n/(n-1)} = c_n |M_0|^{n/(n-1)}.$$

Damit erhalten wir aus Gleichung (4.5), der Gleichung $div_M\, F = n$ und der ersten Variationsformel $\int_M div_M Y d\mu = \int_M H(Y,\nu) d\mu$

$$\begin{aligned} |M_0| = |\tilde{M}_s| &= \frac{1}{n}\int_{\tilde{M}_s} \tilde{H}(\tilde{F},\tilde{\nu}) d\tilde{\mu} \leq \frac{n+1}{n} \cdot \tilde{H}_{max} \cdot \tilde{V}_s \\ &\leq \frac{n+1}{n} \cdot c_n |M_0|^{n/(n-1)} \cdot \tilde{H}_{max}, \end{aligned}$$

woraus wir wegen $\tilde{H}_{max}/\tilde{H}_{min} \to 1$ (Korollar 8.24(ii)) eine untere Schranke nicht nur für $\tilde{H}_{max}$, sondern auch für $\tilde{H}_{min}$ erhalten.
Nach Korollar 8.24(i) gilt auf ganz $M^n \times [0,S)$: $\tilde{h}_{ij} \geq \varepsilon \tilde{H} \tilde{g}_{ij}$. So kann das eingeschlossene Volumen $\tilde{V}_s$ durch das Volumen einer Kugel vom Radius $(\varepsilon \tilde{H}_{min})^{-1}$ abgeschätzt werden:

$$\tilde{V}_s \leq c_n (\varepsilon \tilde{H}_{min})^{-(n+1)}$$

Aus Gleichung (4.5) und der ersten Variationsformel folgt andererseits

$$\tilde{V}_s \geq \frac{1}{n+1} \tilde{H}_{max}^{-1} \int_{\tilde{M}_s} \tilde{H}(\tilde{F},\tilde{\nu}) d\tilde{\mu} = \frac{n}{n+1} \tilde{H}_{max}^{-1} |M_0|$$

$$\Rightarrow \quad (\tilde{H}_{min})^n \leq c_n \varepsilon^{-(n+1)} \frac{n+1}{n} |M_0|^{-1} \cdot \frac{\tilde{H}_{max}}{\tilde{H}_{min}},$$

wodurch wir wegen $\tilde{H}_{max}/\tilde{H}_{min} \to 1$ eine obere Schranke für $\tilde{H}_{max}$ erhalten.
□

Damit ist auch diese Art von Reskalierung bei konvexen kompakten Anfangsflächen als sinnvoll erwiesen: Die mittlere Krümmung ist sowohl nach oben als auch nach unten durch positive Konstanten gleichmäßig beschränkt.

Kapitel 5

TypI-Singularitäten

In diesem Kapitel wollen wir das Verhalten von Lösungen des mittleren Krümmungsflusses (1.1) untersuchen, die zu einem endlichen Zeitpunkt T eine TypI-Singularität ausbilden, wo also gilt:

$$\max_{M_t} |A|^2 \leq \frac{C_0}{2(T-t)} \qquad \text{für ein } C_0 \in \mathbb{R} \text{ und alle } t \in [0,T). \tag{5.1}$$

Dazu verwenden wir die in Abschnitt 4.1 beschriebene Reskalierungstechnik. Wir nehmen also O.B.d.A den Ursprung $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{n+1}$ als einen Blow-up-Punkt an und haben damit Immersionen $\tilde{F}(\,\cdot\,,\,s) : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ gegeben durch

$$\tilde{F}(p,s) = (2(T-t))^{-1/2} F(p,t), \qquad s(t) = -\frac{1}{2}\ln(T-t).$$

Aus $ds/dt = (2(T-t))^{-1}$ und den Gleichungen (4.2) folgt somit aus Gleichung (1.1) die Evolutionsgleichung für die reskalierten Flächen $\tilde{M}_s = \tilde{F}(\,\cdot\,,\,s)(M^n)$, nämlich

$$\frac{d}{ds}\tilde{F}(p,s) = \tilde{F}(p,s) + \tilde{\mathbf{H}}(p,s), \qquad s \in [-\frac{1}{2}\ln T, \infty); \tag{5.2}$$

dabei ist $\tilde{\mathbf{H}} = -\tilde{H}\nu$ der mittlere Krümmungsvektor von $\tilde{M}_s$.
Außerdem folgt mit Korollar 2.12:

Lemma 5.1 *Für das Maß $d\tilde{\mu}_s$ gilt:* $\frac{\partial}{\partial s} d\tilde{\mu}_s = (n - \tilde{H}^2) d\tilde{\mu}_s$. □

5.1 Die Monotonieformel

In diesem Abschnitt wollen wir die sogenannte Monotonieformel beweisen und mit dieser dann zeigen, daß die TypI-Singularitäten asymptotisch homothetisch-selbstähnlich sind. Sei also auf $\mathbb{R}^{n+1}$ eine Gewichtsfunktion ρ definiert durch

$$\rho(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}|x|^2\right).$$

Damit erhalten wir

Theorem 5.2 (Monotonieformel) *Mit* $\tilde{F}^\perp = (\tilde{F}, \nu)\nu$ *gilt die Formel* ($\tilde{F} = \tilde{F}(p,s)$ *ist der Positionsvektor im* $\mathbb{R}^{n+1}$)*:*

$$\frac{d}{ds}\int_{\tilde{M}_s} \rho \, d\tilde{\mu}_s = -\int_{\tilde{M}_s} \rho |\tilde{\mathbf{H}} + \tilde{F}^\perp|^2 \, d\tilde{\mu}_s. \tag{5.3}$$

Beweis: Aus der Evolutionsgleichung (5.2) von $\tilde{F}$ folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\rho(\tilde{F}(p,s)) &= -\left(\tilde{F}(p,s), \frac{\partial}{\partial s}\tilde{F}(p,s)\right)\rho(\tilde{F}(p,s)) \\
&= -\left(|\tilde{F}(p,s)|^2 + \left(\tilde{F}(p,s), \tilde{\mathbf{H}}(p,s)\right)\right)\rho(\tilde{F}(p,s)).
\end{aligned}$$

Das ergibt mit Lemma 5.1:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\int_{\tilde{M}_s} \rho \, d\tilde{\mu}_s &= -\int_{\tilde{M}_s} \rho \cdot \left(|\tilde{F}|^2 + (\tilde{F}, \tilde{\mathbf{H}})\right) d\tilde{\mu}_s + \int_{\tilde{M}_s} \rho \cdot (n - \tilde{H}^2) d\tilde{\mu}_s \\
&= -\int_{\tilde{M}_s} \rho \cdot |\tilde{\mathbf{H}} + \tilde{F}|^2 d\tilde{\mu}_s + \int_{\tilde{M}_s} \rho \cdot (\tilde{F}, \tilde{\mathbf{H}}) \, d\tilde{\mu}_s + n\int_{\tilde{M}_s} \rho \, d\tilde{\mu}_s.
\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung M^n und somit auch alle Einbettungen $\tilde{M}_s$ kompakt sind, können wir hier die erste Variationsformel $\int_M div_M Y \, d\mu = -\int_M (Y, \mathbf{H}) d\mu$ auf $Y = \rho\tilde{F}$ anwenden. Dazu berechnen wir zunächst $div_{\tilde{M}_s}(\rho\tilde{F})$, indem wir eine Orthonormalbasis $\{e_i\}$ auf $T_p\tilde{M}_s$ wählen, so daß

$$\begin{aligned}
div_{\tilde{M}_s}(\rho\tilde{F}) = \left(\nabla_{e_i}(\rho\tilde{F}), e_i\right) &= \left((\nabla_{e_i}\rho)\tilde{F} + \rho\,\nabla_{e_i}\tilde{F}\,,\, e_i\right) \\
&= \nabla_{e_i}\rho\,(\tilde{F}, e_i) + \rho\,(e_i, e_i),
\end{aligned}$$

wobei $(e_i, e_i) = n$ und $\nabla_{e_i}\rho = -\frac{1}{2}\nabla_{e_i}|\tilde{F}|^2 \cdot \rho = -(\tilde{F}, e_i) \cdot \rho$.
Mit $\tilde{F}^\top = \sum_{i=1}^n (\tilde{F}, e_i) e_i$ haben wir also

$$div_{\tilde{M}_s}(\rho\tilde{F}) = -\rho\,(|\tilde{F}^\top|^2 - n),$$

woraus mit der Variationsformel folgt:

$$\int_{\tilde{M}_s} \rho\,(\tilde{F}, \mathbf{H})\,d\tilde{\mu}_s = \int_{\tilde{M}_s} \rho\,(|\tilde{F}^\top|^2 - n)\,d\tilde{\mu}_s.$$

Somit gilt mit $\tilde{F}^\perp = (\tilde{F}, \nu)\nu$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\int_{\tilde{M}_s} \rho\,d\tilde{\mu}_s &= -\int_{\tilde{M}_s} \rho\,|\tilde{\mathbf{H}} + \tilde{F}|^2 d\tilde{\mu}_s + \int_{\tilde{M}_s} \rho\,|\tilde{F}^\top|^2 d\tilde{\mu}_s \\ &= -\int_{\tilde{M}_s} \rho\,|\tilde{\mathbf{H}} + \tilde{F}^\perp|^2 d\tilde{\mu}_s. \end{aligned}$$

□

Korollar 5.3 *Für $R > 0$ ist der Flächeninhalt von $\tilde{M}_s \cap B_R(0)$ für alle $s \in [-\frac{1}{2}\ln T, \infty)$ gleichmäßig beschränkt, das heißt es gibt ein $C_R > 0$, das nur von R und der Anfangsfläche M_0 abhängt, so daß $|\tilde{M}_s \cap B_R(0)| \le C_R$.*

Beweis: Nach dem vorigen Theorem ist

$$\frac{d}{ds}\int_{\tilde{M}_s} \rho\,d\tilde{\mu}_s = -\int_{\tilde{M}_s} \rho|\tilde{\mathbf{H}} + \tilde{F}^\perp|^2\,d\tilde{\mu}_s \le 0$$

für alle s. Also haben wir

$$\int_{\tilde{M}_s} \rho\,d\tilde{\mu}_s \le \int_{\tilde{M}_0} \rho\,d\tilde{\mu}_0 \le |\tilde{M}_0| = (2T)^{-n/2}|M_0| =: C$$

mit $C < \infty$, weil nach Voraussetzung M^n und somit auch $\tilde{M}_0$ kompakt ist.
Somit gilt wegen $\rho(\tilde{F}) \cdot \exp\left(\frac{R^2}{2}\right) \ge 1$ für $\tilde{F} \in \tilde{M}_s \cap B_R(0)$:

$$\begin{aligned} |\tilde{M}_s \cap B_R(0)| = \int_{\tilde{M}_s \cap B_R(0)} d\tilde{\mu}_s &\le \exp\left(\frac{R^2}{2}\right)\int_{\tilde{M}_s \cap B_R(0)} \rho\,d\tilde{\mu}_s \\ &\le C \cdot \exp\left(\frac{R^2}{2}\right) =: C_R < \infty \end{aligned}$$

für alle $s \in [-\frac{1}{2}\ln T, \infty)$. □

Mit Voraussetzung (5.1) und der Annahme, daß der Ursprung $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein Blow-up-Punkt ist, haben wir folgendes Lemma:

Lemma 5.4 *Es gibt ein $p \in M^n$, so daß $\tilde{F}(p, s)$ für $s \to \infty$ beschränkt bleibt.*

Beweis: Da nach Annahme der Ursprung des $\mathbb{R}^{n+1}$ ein Blow-up-Punkt ist, gibt es ein $p \in M^n$ mit $F(p,t) \to 0$ für $t \to T$. Damit folgt aus (5.1):

$$|F(p,t)| \leq \int_t^T |H(p,\tau)| d\tau \leq \sqrt{nC_0} \int_t^T (2(T-t))^{-1/2} d\tau \leq \sqrt{nC_0}(2(T-t))^{1/2}.$$

Also gilt für alle s: $|\tilde{F}(p,s)| = (2(T-t))^{-1/2}|F(p,t)| \leq \sqrt{nC_0} < \infty$. □

Wir erhalten nun mit Hilfe des Satzes von Bolzano-Weierstraß und des Satzes von Arzela-Ascoli eine nicht triviale Grenzfläche:

Theorem 5.5 *Gilt die Ungleichung (5.1), so gibt es für jede Folge $s_j \to \infty$ eine solche Teilfolge $(s_{jl})_{l\in\mathbb{N}}$, daß die Flächen $\tilde{M}_{s_{jl}}$ gegen eine glatte, nicht leere Grenzfläche $\tilde{M}_\infty$ konvergieren.*

Beweis: Für $q \in \mathbb{R}^{n+1}$ sei $W_r(q)$ der abgeschlossene Würfel im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Seitenlänge $2r$ und Mittelpunkt q. Sei weiterhin $U^s_{r,p}$ für $p \in M^n$ die Komponente von $\tilde{F}^{-1}(\,\cdot\,,s)(W_r(\tilde{F}(p,s)))$, in der auch p liegt. Da $|\tilde{A}|^2$ nach Ungleichung (5.1) in s gleichmäßig beschränkt ist, gibt es eine nur von C_0 abhängige Zahl $r_0 > 0$, so daß sich $\tilde{F}(\,\cdot\,,s)(U^s_{r_0,p})$ für jedes $p \in M^n$ als Graph einer C^∞-Funktion $f_{p,s}$ über dem Kompaktum $K_{r_o}(\tilde{F}(p,s)) := T_{\tilde{F}(p,s)}M_s \cap W_{r_o}(\tilde{F}(p,s))$ schreiben läßt und dabei der Gradient $|\nabla f_{p,s}|$ für alle $(p,s) \in M^n \times [-\frac{1}{2}\ln T, \infty)$ gleichmäßig beschränkt ist. Nach Korollar 5.3 ist für jedes $R > 0$ der Flächeninhalt von $\tilde{M}_s \cap B_R(0)$ gleichmäßig in s durch eine Konstante C_R beschränkt, so daß sich jede Fläche $\tilde{M}_s \cap B_R(0)$ als Graph über eine von s unabhängige Anzahl $N = N(r_0, C_R)$ von Kompakta $K_{r_o}(q^k_s) \subset T_{q^k_s}(\tilde{M}_s \cap B_R(0))$, $1 \leq k \leq N$ schreiben läßt.

Da die Menge der Punkte q^k_s wegen $\tilde{M}_s \cap B_R(0) \subset B_R(0)$ im $\mathbb{R}^{n+1}$ beschränkt ist und die Menge der möglichen Richtungen $\vec{v}^k_s \in \mathbb{R}^{n+1}$ der Tangentialräume $T_{q^k_s}(\tilde{M}_s \cap B_R(0))$ im $\mathbb{R}^{n+1}$ der Sphäre, also einem kompakten topologischen Raum, entspricht, gibt es nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß für jede Folge $s_j \to \infty$ eine Teilfolge $(s_{jl})_{l\in\mathbb{N}} \subset (s_j)_{j\in\mathbb{N}}$, so daß für jedes $1 \leq k \leq N$ die Tangentialräume $T_{q^k_{s_{jl}}}(\tilde{M}_{s_{jl}} \cap B_R(0))$ für $l \to \infty$ konvergieren.

(*Anmerkung*: Um eine solche Teilfolge zu finden, nehmen wir eine Teilfolge von (s_j), für die q^1_s konvergiert, hiervon eine Teilfolge, für die q^2_s konvergiert usw., so daß wir eine Teilfolge erhalten, für die alle q^k_s konvergieren. Davon nehmen wir wieder eine Teilfolge, für die $\vec{v}^1_s$ konvergiert, hiervon eine Teilfolge, für die $\vec{v}^2_s$ konvergiert usw. Schließlich haben wir die gesuchte Teilfolge, für die sowohl alle q^k_s als auch alle $\vec{v}^k_s$ konvergieren.)

Mithilfe des Satzes von Arzela-Ascoli finden wir nun weiter heraus, daß für jedes $1 \leq k \leq N$ auch jede Folge der Funktionen f_s^k, die auf den jeweiligen Kompakta $K_{r_0}(q_s^k)$ leben und $\tilde{M}_s \cap B_R(0)$ beschreiben, eine sogar gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt. Denn da nach Konstruktion von r_0 sowohl $|\nabla f_s^k|$ als auch $|f_s^k|$ für alle $1 \leq k \leq N$ und alle $s \in [-\frac{1}{2}\ln T, \infty)$ gleichmäßig beschränkt sind, ist zum einen $\mathcal{F} = \{f_s^k \mid 1 \leq k \leq N,\ s \in [-\frac{1}{2}\ln T, \infty)\} \subset C^\infty(K_{r_o}(0), \mathbb{R})$ gleichgradig stetig und zum andern $\mathcal{F}\ (x) = \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\ \} \subset \mathbb{R}$ für alle $x \in K_{r_0}(0)$ relativkompakt in $\mathbb{R}$ $\quad(K_{r_o}(0)$ ist das abgeschlossene Quadrat im $\mathbb{R}^n$ mit Seitenlänge $2r_0$ und Mittelpunkt 0; dieses ist isomorph zu den oben beschriebenen Kompakta $K_{r_o}(q_s^k))$.
Somit sind die Voraussetzungen für den Satz von Arzela-Ascoli erfüllt. Demnach ist die Funktionenmenge $\mathcal{F}$ bezüglich der Supremums-Metrik $D(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|,\ x \in K_{r_o}(0)\}$ relativkompakt in $C^\infty(K_{r_o}(0), \mathbb{R})$, so daß es wieder nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine solche Teilfolge $(s_{jl})_{l\in\mathbb{N}} \subset (s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ gibt, daß nicht nur $T_{q^k_{s_{jl}}}(\tilde{M}_s \cap B_R(0))$, sondern auch $f^k_{s_{jl}} \in \mathcal{F}$ für $l \to \infty$ konvergiert. Da es sich um Konvergenz bezüglich der Supremums-Metrik handelt, ist sie sogar gleichmäßig, so daß die Grenzfunktion $f^k_\infty := \lim_{l\to\infty} f^k_{s_{jl}}$ wieder stetig ist.
Da nach Lemma 4.3 auch die Ableitungen von $\tilde{A}$ gleichmäßig beschränkt sind, läßt sich ganz analog beweisen, daß es für jedes $m > 0$ solche Teilfolgen von $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ gibt, daß auch die m-ten Ableitungen der Funktionen f_s^k konvergieren. Für eine Diagonalfolge $(s_{jl})_{l\in\mathbb{N}}$ konvergieren dann *alle* Ableitungen, so daß die Flächen $\tilde{M}_{s_{jl}} \cap B_R(0)$ gegen eine glatte Grenzfläche $\tilde{M}_{R,\infty} \subset \overline{B_R(0)}$ konvergieren. Wegen des vorigen Lemmas ist diese Grenzfläche nicht leer, wenn wir R groß genug wählen. Da wir mit jedem $R > 0$ so verfahren können, finden wir eine Diagonalfolge $(s_{jl})_{l\in\mathbb{N}}$, für die die Flächen $\tilde{M}_{s_{jl}}$ gegen eine glatte, nicht leere Grenzfläche $\tilde{M}_\infty \subset \mathbb{R}^{n+1}$ konvergieren, das heißt $(s_{jl})_{l\in\mathbb{N}}$ ist die gesuchte Teilfolge von $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$. $\square$

Die Monotonieformel ergibt nun eine Charakterisierung der Grenzfläche.

Theorem 5.6 *Jede Grenzfläche $\tilde{M}_\infty$, die wir wie im obigen Theorem erhalten, genügt der Gleichung*

$$\tilde{H}_\infty = (\tilde{F}_\infty, \tilde{\nu}_\infty), \tag{5.4}$$

wobei $\tilde{F}_\infty$ der Positionsvektor, $\tilde{H}_\infty$ die mittlere Krümmung und $\tilde{\nu}_\infty$ der Normalenvektor der Grenzfläche ist.

Beweis: Sei $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge, für welche die Flächen $\tilde{M}_{s_j}$ gegen die Grenzfläche $\tilde{M}_\infty$ konvergieren. Dann erhalten wir aus der Monotonieformel (5.3)

$$\lim_{j\to\infty}\int_0^{s_j}\int_{\tilde{M}_s}\rho|\tilde{\mathbf{H}}+\tilde{F}^\perp|^2\,d\tilde{\mu}_s\,ds=\int_{\tilde{M}_0}\rho\,d\tilde{\mu}_0-\lim_{j\to\infty}\int_{\tilde{M}_{s_j}}\rho\,d\tilde{\mu}_{s_j}<\infty.$$

Also ist

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\tilde{M}_{s_j}}\rho\,|\tilde{\mathbf{H}}+\tilde{F}^\perp|^2\,d\tilde{\mu}_{s_j}=\int_{\tilde{M}_\infty}\rho\,|\tilde{\mathbf{H}}+\tilde{F}^\perp|^2\,d\tilde{\mu}_\infty=0.$$

Da der Flächeninhalt von $\tilde{M}_\infty$ wegen der Abschätzungen in Lemma 4.3 nicht verschwinden kann und überall $\rho>0$ ist, gilt auf ganz $\tilde{M}_\infty$:

$$|\tilde{\mathbf{H}}+\tilde{F}^\perp|\equiv 0\quad\Rightarrow\quad\tilde{H}=|\tilde{F}^\perp|=(\tilde{F},\tilde{\nu}).\qquad\square$$

Was bedeutet nun diese Gleichung? Um dies zu klären, nehmen wir an, daß die Anfangsfläche $\tilde{M}_0$ der Gleichung $\tilde{H}_0=(\tilde{F}_0,\tilde{\nu}_0)$ genügt. Für

$$F(p,t):=(2(T-t))^{1/2}\tilde{F}_0(p),$$

ist $\nu=\tilde{\nu}$ konstant in t und $H(t)=(2(T-t))^{-1/2}\tilde{H}_0$, und somit wegen $\tilde{H}_0=(\tilde{F}_0,\tilde{\nu}_0)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}F(p,t)\right)^\perp=-(2(T-t))^{-1/2}\tilde{H}_0\tilde{\nu}_0=-H\nu.$$

Bis auf tangentiale Deformation ist also der mittlere Krümmungsfluß für diese Anfangsflächen durch Homothetien gegeben. Bildlich sieht dies genau wie eine homothetische Schrumpfung der Fläche aus: „tangentiale Deformation" bedeutet lediglich, daß M_t zu jedem Zeitpunkt t umparametrisiert wird.
Wir können somit die Grenzflächen $\tilde{M}_\infty$ als neue Anfangsflächen betrachten, die Reskalierung rückgängig machen und sehen, daß M_t nahe der Singularität homothetisch-selbstähnlich schrumpft.
Noch offene Fragestellungen betreffen die Eindeutigkeit der Grenzfläche in Theorem 5.5 und die Zahl der Lösungen der Gleichung (5.4). Im nächsten Abschnitt werden wir den Fall betrachten, in dem die Fläche, für die (5.4) gilt, nichtnegative mittlere Krümmung hat.

5.2 Homothetische Lösungen

Sei wieder $\tilde{M}_\infty$ eine wie in Theorem 5.5 gefundene Grenzfläche des mittleren Krümmungsflusses. Für diese gilt dann die Homothetienbedingung (5.4). Da nach Ungleichung (2.5) die mittlere Krümmung auf allen Flächen M_t positiv ist, ist sie auch auf allen reskalierten Flächen $\tilde{M}_s$ positiv und somit auf $\tilde{M}_\infty$ wenigstens nicht negativ. Nach Korollar 5.3 ist der Flächeninhalt von $\tilde{M}_\infty$ in jedem Kompaktum des $\mathbb{R}^{n+1}$ beschränkt. Damit haben wir folgendes Theorem:

Theorem 5.7 *Eine wie in Theorem 5.5 erhaltene Grenzfläche $\tilde{M}_\infty$ ist eine der folgenden Flächen:*
(i) S^n,
(ii) $S^{n-m} \times \mathbb{R}^m$,
(iii) $\Gamma \times \mathbb{R}^{n-1}$,
wobei Γ eine der homothetisch schrumpfenden „Abresch-Langer-Kurven“ ist, die im Theorem 7.4 dieser Arbeit präzisiert werden.

Der Einfachheit halber lassen wir im ganzen folgenden Beweis bei allen möglichen Bezeichnungen die Tilde und den Index ∞ weg, also $\tilde{M}_\infty = M$, $\tilde{H}_\infty = H$, $\tilde{A}_\infty = A$ usw..
Wir zeigen zunächst folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 5.8 *M ist analytisch.*

Beweis: Sei $u : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lokale Graphdarstellung von $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist

$$H = -D_i \left(\frac{D_i u}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right)$$

und somit wegen $H = (F, \nu) = ((x, u(x)), \nu)$ mit $\nu = \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}(-Du, 1)$

$$-D_i \left(\frac{D_i u}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|^2}}(-(Du, x)_{\mathbb{R}^n} + u). \tag{5.5}$$

Daraus folgt nach der Theorie der quasilinearen partiellen Differentialgleichungen, daß u und somit auch M analytisch ist. Literatur?? □

Beweis des Theorems 5.7: Sei $e_1, ..., e_n$ ein angepaßtes orthonormales n-Bein. Durch zweimaliges Differenzieren der Gleichung $H = (F, \nu)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \triangle H &= H - |A|^2 H + (F, e_l)\nabla^l H, & (5.6) \\ \langle h_{ij}, \nabla_i \nabla_j H\rangle &= |A|^2 - H tr(A^3) + \frac{1}{2}(F, e_l)\nabla^l |A|^2, & (5.7) \end{aligned}$$

wobei $tr(A^3) = h_l^k h_k^j h_j^l$. Dabei haben wir benutzt, daß $\nabla_i \nu = h_i^l \nabla_l F$, $\nabla_i \nabla_j F = -h_{ij}\nu$, $(F, \nu) = H$ und $\nabla_i h_j^l = \nabla^l h_{ij}$ (Codazzi).
Da nach unseren Überlegungen zu Beginn dieses Abschnittes die mittlere Krümmung überall nichtnegativ ist, gilt nach Gleichung (5.6)

$$-\triangle H + (F, e_l)\nabla^l H + H = |A|^2 H \geq 0,$$

so daß entweder $H \equiv 0$ ist, und somit $M = \mathbb{R}^n$ wegen $H = (F, \nu)$ (dies entspricht dem zweiten Fall des Theorems mit $m = n$), oder mit dem strikten Maximum-Prinzip 2.5 folgt, daß überall

$$H > 0$$

ist, was wir im folgenden voraussetzen wollen.
Mit Lemma 2.9(ii) erhalten wir aus der Gleichung (5.7):

$$\triangle |A|^2 = 2|A|^2 + (F, e_l)\nabla^l |A|^2 + 2|\nabla A|^2 - 2|A|^4.$$

Da außerdem

$$|h_{ij}\nabla_l H - H\nabla_l h_{ij}|^2 = |A|^2|\nabla H|^2 + H^2|\nabla A|^2 - H\langle \nabla_i |A|^2, \nabla_i H\rangle \qquad (5.8)$$

und

$$\nabla_i \left(\frac{|A|^2}{H^2}\right) = \frac{1}{H^2}\nabla_i |A|^2 - 2\frac{|A|^2}{H^3}\nabla_i H, \qquad (5.9)$$

folgt mit Gleichung 5.6

$$\begin{aligned} \triangle \left(\frac{|A|^2}{H^2}\right) &= \frac{2}{H^4}|h_{ij}\nabla_l H - H\nabla_l h_{ij}|^2 - \frac{2}{H}\left\langle \nabla_i H, \nabla_i \left(\frac{|A|^2}{H^2}\right)\right\rangle \\ &\quad + (F, e_l)\nabla^l \left(\frac{|A|^2}{H^2}\right). \end{aligned}$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit $|A|^2\rho$, wobei wieder wie im vorigen Abschnitt $\rho(x) = exp\left(-\frac{1}{2}|x|^2\right)$. Benutzen wir dann $\nabla_i \rho = -(F, e_i)\rho$ und die Gleichung (5.9) und führen partielle Integration durch, so erhalten wir

$$\int_M H^2 \left|\nabla \left(\frac{|A|^2}{H^2}\right)\right|^2 \rho \, d\mu + 2\int_M \frac{|A|^2}{H^4}|h_{ij}\nabla_l H - H\nabla_l h_{ij}|^2 \rho \, d\mu = 0.$$

Wegen $H > 0$ ist somit

$$A|^2/H^2 \equiv \alpha > 0 \tag{5.10}$$

und

$$|h_{ij}\nabla_l H - H\nabla_l h_{ij}| \equiv 0. \tag{5.11}$$

Daraus folgt mit den Codazzi-Gleichungen

$$h_{ij}\nabla_l H = H\nabla_l h_{ij} = H\nabla_j h_{il} = h_{il}\nabla_j H \quad \Rightarrow \quad |h_{ij}\nabla_l H - h_{il}\nabla_j H|^2 \equiv 0.$$

Wählen wir dann an einem gegebenen Punkt $p \in M$ das Koordinatensystem so, daß $e_1 = \nabla H/|\nabla H|$ und somit in diesen Koordinaten $\nabla_l H = |\nabla H| \cdot \delta_{1l}$ ist, so folgt daraus

$$|\nabla H|^2 \left(|A|^2 - \sum_{k=1}^{n} h_{1k}^2 \right) \equiv 0,$$

und somit $|\nabla H| = 0$ oder $|A|^2 = \sum_{k=1}^{n} h_{1k}^2$ an diesem Punkt. In dem Fall, daß *überall* $|\nabla H| = 0$ gilt, folgt aus $H > 0$ und Gleichung (5.11), daß $|\nabla A|^2 \equiv 0$. Das aber ist gleichbedeutend damit, daß M entweder eine Sphäre S^n oder ein Zylinder $S^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ ist, was den ersten beiden Fällen des Theorems 5.7 entspricht.

Gibt es dagegen einen Punkt $p_0 \in M$, wo $|\nabla H| \neq 0$, so gilt dort

$$\sum_{k=1}^{n} h_{1k}^2 = |A|^2 = h_{11}^2 + 2\sum_{k=2}^{n} h_{1k}^2 + \sum_{i,j=2}^{n} h_{ij}^2,$$

und somit

$$|A|^2 = h_{11}^2 = H^2. \tag{5.12}$$

Aus (5.10) folgt, daß diese Gleichung sogar überall auf M gilt. Damit wollen wir nun zeigen, daß M eine der Flächen $\Gamma \times \mathbb{R}^{n-1}$ darstellt. Da M nach Hilfssatz 5.8 analytisch ist, reicht es, eine kleine Umgebung V von p_0 in M zu betrachten.
Damit seien zwei Distributionen definiert durch

$$\begin{aligned} D_1 &= \{X \in T_pV \,|\, p \in V,\ AX = HX\}, \\ D_2 &= \{X \in T_pV \,|\, p \in V,\ AX = 0\}. \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, daß D_1 und D_2 involutiv sind, daß also für $X, Y \in D_i$ auch die Lieklammer $[X, Y]$ in D_i ist, um hinterher den Satz von Frobenius

anwenden zu können.
Sei also $Y \in D_1$, so gilt $HY^k = h^k_j Y^j$ und somit

$$H\nabla_i HX^i Y^k = h^k_j \nabla_i HX^i Y^j,$$

woraus mit Gleichung (5.11) folgt:

$$\nabla_X H(Y) = \nabla_X A(Y). \tag{5.13}$$

Mit $HY = AY$ haben wir aber auch $\nabla_X(HY) = \nabla_X(AY)$, was äquivalent ist zu

$$\nabla_X H(Y) + H(\nabla_X Y) = \nabla_X A(Y) + A(\nabla_X Y).$$

Daraus folgt mit (5.13), daß $H(\nabla_X Y) = A(\nabla_X Y)$, also $\nabla_X Y \in D_1$.
Hier haben wir nur vorausgesetzt, daß Y in D_1 liegt, X ist dagegen zunächst beliebig. Ist aber auch $X \in D_1$, so ist nach eben Bewiesenem $\nabla_Y X \in D_1$ und somit auch $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \in D_1$. Analog können wir beweisen, daß für $X, Y \in D_2$ auch $[X, Y]$ in D_2 liegt.

Damit ist die Voraussetzung für den Satz von Frobenius erfüllt. Demnach gibt es durch jeden Punkt $p \in V$ lokale Integralmannigfaltigkeiten $I(p)$ von D_1 und $J(p)$ von D_2. Da deren Tangentialräume komplementär sind, also zusammengesetzt den jeweiligen Tangentialraum von V ergeben, gibt es für V ein lokales Koordinatensystem $U = \{(x, y_1, ..., y_{n-1})\}$, so daß p_0 dem Ursprung entspricht und

$$\begin{aligned} I((\bar{x}, \bar{y}_1, ..., \bar{y}_{n-1})) &= \{(x, \bar{y}_1, ..., \bar{y}_{n-1}) \in U\}, \\ J((\bar{x}, \bar{y}_1, ..., \bar{y}_{n-1})) &= \{(\bar{x}, y_1, ..., y_{n-1}) \in U\} \end{aligned}$$

die Integralkurven von D_1 beziehungsweise die $(n-1)$-dimensionalen Integralblätter von D_2 sind.

Wir können nun weiterhin zeigen, daß die Tangentialraumzerlegung $D_1 \cap T_pV \times D_2 \cap T_pV = T_pV$ invariant unter Paralleltransport ist, daß also für $X(0) \in D_i$ auch alle parallelverschobenen Vektoren $X(t)$ in D_i sind:

Um dies zu beweisen, sei zunächst $X = X_1 \oplus X_2 \in D_1 \oplus D_2$, wobei $X(0) \in D_1$. Dann gilt für jede Kurve γ in M:

$$0 = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} X(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} X_1(t) + \nabla_{\dot{\gamma}(t)} X_2(t),$$

woraus folgt:

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} X_2(t) = -\nabla_{\dot{\gamma}(t)} X_1(t) \in D_1;$$

letzteres gilt, weil $X_1(t) \in D_1$, und somit wie oben bewiesen $\nabla_{\dot\gamma(t)} X_1(t) \in D_1$. Damit aber gilt

$$\frac{d}{dt}|X_2(t)|^2 = 2\langle \nabla_{\dot\gamma(t)} X_2(t), X_2(t)\rangle = 0,$$

da $D_1 \perp D_2$. Also ist $X_2(t) \equiv X_2(0) = 0$ und somit $X(t) \in D_1$.
Ganz analog läßt sich beweisen, daß für $X(0) \in D_2$ auch alle parallelverschobenen Vektoren $X(t)$ in D_2 sind.

Da die Parallelverschiebung eine Isometrie ist, bedeutet das, daß alle $I(\bar y) \times J(\bar y)$ isometrisch zu $I(0) \times J(0)$ sind, das heißt M ist nahe p_0 isometrisch zu $I(0) \times J(0)$. Da auf $J(0)$ die zweite Fundamentalform verschwindet, ist $J(0)$ ein Stück einer $(n-1)$-dimensionalen Ebene. Auf $I(0)$ gilt dagegen

$$\nabla_{e_1} e_1 = -h_{11}\nu = -H\nu, \qquad \nabla_{e_1}\nu = h_1^l e_l = He_1.$$

Also ist $I(0)$ ein Stück einer Kurve Γ in einer zweidimensionalen Ebene E. In dieser Ebene genügt die Kurve der Gleichung $H = (F,\nu) = (F^E,\nu)$ (F^E ist der Positionsvektor in der Ebene E), so daß eine lokale Graphdarstellung von ihr die Differentialgleichung (5.5) erfüllt. Aus dieser folgt, daß die ganze Kurve geschlossen sein muß, weil es sonst ein Kompaktum im $\mathbb{R}^{n+1}$ gibt, in dem die Mannigfaltigkeit $M = \Gamma \times \mathbb{R}^{n-1}$ einen unendlich großen Flächeninhalt hat, was ein Widerspruch zu Korollar 5.3 ist. Also ist Γ eine der von Mullin, Abresch und Langer gefundenen Kurven (vgl. Theorem 7.4) und $M = \Gamma \times \mathbb{R}^{n-1}$, womit Theorem 5.7 bewiesen ist. $\square$

Anmerkung: In den ersten beiden Fällen des eben bewiesenen Theorems läßt sich aus der Gleichung $H = (F,\nu)$ ganz leicht der Radius r der Sphäre bzw. des Zylinders berechnen, denn es ist $H = n/r$ bzw. $H = (n-m)/r$ und $(F,\nu) = r$, also $r = \sqrt{n}$ bzw. $r = \sqrt{n-m}$.

Kapitel 6

TypII-Singularitäten

In Abschnitt 4.2 haben wir gesehen, daß die bei TypI-Singularitäten übliche Reskalierung für TypII-Singularitäten nicht ausreicht, und haben ein andere Art der Reskalierung kennengelernt, durch die wir für jedes $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ einen mittleren Krümmungsfluß $M_{k,s}$ erhalten. Die Krümmungsschranke in Lemma 4.6 impliziert nach Lemma 4.4 und 3.3 entsprechende Schranken für die zweite Fundamentalform und alle ihre Ableitungen. Da diese gleichermaßen für fast alle k und alle in einem bestimmten Intervall liegende s überall auf $M_{k,s}$ gelten, finden wir mit der gleichen Methode wie in Theorem 5.5 eine Art Grenzfluß:

Theorem 6.1 *Für jede Folge $k_j \to \infty$ gibt es eine Teilfolge $(k_{jl})_{l\in\mathbb{N}}$, für welche die $M_{k_{jl},s}$ auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen einen glatten Grenzfluß $\tilde{M}_s$ konvergieren, der für alle $s \in \mathbb{R}$ definiert ist.*

Beweis: Anders als in Theorem 5.5 haben wir hier keine Folge von Flächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ gegeben, sondern eine Folge von *Flüssen* $M_{k,s}$, deren Verhalten untersucht werden soll - das heißt es kommt noch ein weiterer Parameter, nämlich s, hinzu. Wir können aber diese Flüsse als im $\mathbb{R}^{n+2}$ eingebettete (n+1)-dimensionale Mannigfaltigkeiten verstehen, die durch

$$\begin{array}{rcccc} F_k^* & : & M^n \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^{n+2}, \\ & & (p,s) & \to & (F_k(p,s),s) \end{array}$$

gegeben sind. Damit läßt sich aus den Evolutionsgleichungen (4.4) und (2.3) von F_k und der mittleren Krümmung errechnen, daß $|A_k^*|$ nur von $|A_k|$, H_k, $|\nabla H_k|$ und $\triangle H_k$ abhängig ist, und zwar so, daß aus deren Beschränktheit, die Beschränktheit von $|A_k^*|$ folgt. Analog findet man auch

Schranken für alle Ableitungen von A_k^*. Diese gelten nach Lemma 4.6 gleichermaßen für alle $k \geq k_0$ und alle $s \in [\alpha_{k_0}, \bar{\omega}]$ überall auf $M_{k,s}$. So können wir nun tatsächlich genau wie im Beweis von Theorem 5.5 argumentieren und erhalten für jede Folge $k_j \to \infty$ eine Teilfolge $(k_{jl})_{l\in\mathbb{N}}$, für die $M_{k_{jl}}^*$ gegen eine glatte (n+1)-dimensionale Grenzfläche $\tilde{M}^*$ konvergieren. Diese ist durch eine neue Parametrisierung

$$\begin{array}{rcccc} F^* & : & M^n \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^{n+2} \\ & & (p,s) & \to & (\tilde{F}(p,s), s) \end{array}$$

gegeben. Fassen wir deren letzten Parameter wieder als Zeit auf, so ist dieses der behauptete Grenzfluß $\tilde{M}_s$. Da $k_{jl} \to \infty$, können wir k_0 und $\bar{\omega}$ beliebig groß wählen, so daß $\alpha_{k_0} \to -\infty$ nach Lemma 4.5 und $\bar{\omega} \to \infty$ und somit $\tilde{M}_s$ für alle $s \in \mathbb{R}$ definiert ist. □

Die mittlere Krümmung dieses Grenzflusses erfüllt nun $\tilde{H} \leq 1$ wegen Lemma 4.6. Nach Ungleichung (2.5) gilt überall und zu jeder Zeit $H > 0$, also auch $H_k > 0$ und somit $\tilde{H} \geq 0$. Wie gegen Ende von Abschnitt 4.2 schon begründet, folgt aus Lemma 4.6(i), daß $\tilde{H}$ auf $\tilde{M}_0$ nicht identisch Null ist, so daß nach dem strikten Maximum-Prinzip 2.2 und der Evolutionsgleichung (2.3) für die mittlere Krümmung überall $\tilde{H} > 0$ gilt.

Im folgenden wollen wir zeigen, daß jede reskalierte Fläche $\tilde{M}_s$ konvex ist, das heißt daß jeder Eigenwert κ_i der reskalierten zweiten Fundamentalform $\tilde{A}$ nichtnegativ ist. Dazu seien symmetrische Funktionen definiert durch

$$S_m(\kappa) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n} \kappa_{i_1} \kappa_{i_2} \cdots \kappa_{i_m}.$$

Damit gilt:

Theorem 6.2 *Für jedes m mit $2 \leq m \leq n$ und jedes $\eta > 0$ gibt es eine Konstante $C_{\eta,m}$, die nur von n, m, η und M_0 abhängt, so daß wir überall auf $M^n \times [0,T)$ die Abschätzung haben*

$$S_m \geq -\eta H^m - C_{\eta,m}.$$

Beweis: siehe [HS2], Theorem 1.1.

Korollar 6.3 *Jede reskalierte Fläche $\tilde{M}_s$ ist konvex.*

Beweis: Nach Definition (4.3) von F_k ist $\kappa_{i,k}(x,s) = L_k^{-1}\kappa_i(x, L_k^{-2}s + t_k)$, und somit $S_{m,k} = L_k^{-m}S_m$ (mit entsprechenden Argumenten). Also haben wir nach dem obigen Theorem

$$S_{m,k} \geq -\eta L_k^{-m} H^m - L_k^{-m} C_{\eta,m}.$$

Da $L_k^{-m}H^m \to \tilde{H}^m$ und $L_k \to \infty$ für $k \to \infty$ nach Lemma 4.5, folgt daraus $\tilde{S}_m \geq -\eta \tilde{H}^m$ und somit $\tilde{S}_m \geq 0$, da $\eta > 0$ beliebig ist.
Daraus folgt wiederum, daß alle κ_i nichtnegativ sind; denn sei

$$\tilde{S}_{m,p} := \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n \\ i_q \neq p \ \forall q \in \{1,\ldots,m\}}} \kappa_{i_1}\kappa_{i_2}\cdots\kappa_{i_m}$$

für $m = 1, \ldots, n-1, \quad p = 1, \ldots, n.$ Dann gilt für jedes p

$$\tilde{S}_m = \tilde{S}_{m,p} + \kappa_p \tilde{S}_{m-1,p}$$

für $m = 2, \ldots, n-1$. Definieren wir dann $\tilde{S}_{n,p} := 0$, $\tilde{S}_{0,p} := 1$, so gilt diese Gleichung auch für $m = 1$ und $m = n$. Da ja, wie oben festgestellt, alle $\tilde{S}_m \geq 0$, folgt aus ihr

$$\tilde{S}_{m,p} \geq -\kappa_p \tilde{S}_{m-1,p},$$

speziell $\tilde{S}_{1,p} \geq -\kappa_p$ und $\kappa_p \tilde{S}_{n-1,p} \geq 0$, was für $\kappa_p < 0$ zu einem Widerspruch führt. Somit ist jedes $\kappa_p \geq 0$, und damit die reskalierte Fläche $\tilde{M}_s$ konvex.$\square$

Im folgenden heißt eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses, die für alle Zeiten existiert und sich durch Translation im $\mathbb{R}^{n+1}$ bewegt, ein „translatierender Soliton“. Damit haben wir

Theorem 6.4 *Jeder Grenzfluß $\tilde{M}_s$ ist entweder selber ein strikt konvexer Soliton, oder es ist (bis auf starre Bewegungen) $\tilde{M}_s = \Sigma_s^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, wobei Σ_s^k ein k-dimensionaler strikt konvexer translatierender Solition ist.*

Beweis: Die schwache Konvexität des Grenzflusses wurde bereits im obigen Korollar bewiesen. Für die weitere Behauptung wenden wir das strikte Maximum-Prinzip 2.4 für symmetrische Bilinearformen auf die nichtnegative zweite Fundamentalform an, für die nach Korollar 2.14(i) auf $\tilde{M}_s$, $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial s}\tilde{h}^i_j = \triangle \tilde{h}^i_j + |\tilde{A}|^2 \tilde{h}^i_j.$$

Demnach ist der Rang von $\tilde{A}$ konstant und der Nullraum von $\tilde{A}$ invariant unter Paralleltransport und invariant in der Zeit.
Ähnlich wie im Beweis des Theorems 5.7 definieren wir für $s \in \mathbb{R}$ zwei Distributionen durch

$$\begin{aligned} D_1 &:= \{X \in T_p\tilde{M}_s \,|\, p \in \tilde{M}_s,\ \tilde{A}X \neq 0\}, \\ D_2 &:= \{X \in T_p\tilde{M}_s \,|\, p \in \tilde{M}_s,\ \tilde{A}X = 0\}. \end{aligned}$$

Daß der Nullraum von $\tilde{A}$ invariant unter Paralleltransport ist, bedeutet dann, daß für $X(0) \in D_2$ auch jeder auf $\tilde{M}_s$ parallelverschobene Vektor $X(t)$ in D_2 liegt. Somit liegt für $X \in D_2$ auch jede kovariante Ableitung $\nabla_Y X$ in D_2, also

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \in D_2 \qquad \text{für } X, Y \in D_2.$$

Da der Rang von $\tilde{A}$ konstant ist, ist auch D_1 invariant unter Paralleltransport. Somit gilt ebenfalls

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \in D_1 \qquad \text{für } X, Y \in D_1.$$

Damit ist nun wieder die Voraussetzung für den Satz von Frobenius erfüllt. Demnach spaltet sich jedes $\tilde{M}_s$ in ein isometrisches Produkt $\Sigma_s^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, wobei Σ_s^k Integralmannigfaltigkeit von D_1 und $\mathbb{R}^{n-k}$ Integralmannigfaltigkeit von D_2 ist (ist $D_2 = \{0\}$, so ist $k = n$, also $\tilde{M}_s = \Sigma_s^n$). Da D_1 und D_2 auch invariant in der Zeit sind, ist k unabhängig von s. Da überall auf Σ_s^k alle Eigenwerte der zweiten Fundamentalform strikt positiv sind, während sie auf $\mathbb{R}^{n-k}$ verschwinden, ist Σ_s^k eine *strikt konvexe Lösung* des mittleren Krümmungsflusses.
Schließlich erreicht die mittlere Krümmung H^* von Σ_s^k an einem Punkt in der „Raumzeit“ ihr absolutes Maximum, da zum einen $H^* = \tilde{H}$, zum anderen nach obigen Überlegungen $\tilde{H} \leq 1$ gilt, es aber einen Punkt $p \in M^n$ gibt, wo $\tilde{H}(p, 0) = 1$ ist (folgt direkt aus Lemma 4.6(i)). Daher ist nach Hamiltons Charakterisierung von konvexen, „ewigen“ Lösungen des mittleren Krümmungsflusses (siehe [Ha3], Theorem 1.3) Σ_s^k ein *translatierender Soliton*. □

Anmerkung: Im Fall $k = 1$ ist der einzige translatierende Soliton die „grim reaper“ Kurve mit der Gleichung $y = ln\ (cos\ x) + s$ (siehe [A]). In höheren Dimensionen kennt man rotationssymmetrische translatierende Solitons (Literatur ??). Nicht bekannt ist, ob es noch weitere translatierende Solitons gibt, die konvex oder von positiver mittlerer Krümmung sind.

Kapitel 7

Der eindimensionale Fall

In diesem Kapitel wollen wir den eindimensionalen Fall des mittleren Krümmungsflusses betrachten, und zwar insbesondere den von *eingebetteten*, geschlossenen kompakten Anfangskurven. Für den Fall, daß sich die Anfangskurve überschneidet, der mittlere Krümmungsfluß aber nahe der Singularität eine homothetische Lösung ausbildet, sind die Ergebnisse von Mullin, Abresch und Langer, im Theorem 7.4 zusammengefaßt, für dessen Beweis auf entsprechende Literatur verwiesen wird.

7.1 Der Fluß von eingebetteten Kurven

Wir betrachten die Familie von glatten Einbettungen von geschlossenen Kurven

$$F : S^1 \times [0, T) \to \mathbb{R}^2,$$

die Lösung des Gradientenflusses zum Längenfunktional („curve shortening flow") ist, welcher dem mittleren Krümmungsfluß im Höherdimensionalen entspricht. Ist $s = s_t$ die Bogenlänge auf $F(\,\cdot\,, t)$, so folgt aus $|(d/ds)F| \equiv 1$, daß $(d^2/ds^2)F \perp (d/ds)F$, also $(d^2/ds^2)F = -\kappa\nu$ für ein $\kappa \in \mathbb{R}$. Dann ist $\kappa = -(\nu, (d^2/ds^2)F)$ die (mittlere) Krümmung und somit der (mittlere) Krümmungsfluß gegeben durch

$$\frac{d}{dt}F(p,t) = \vec{\kappa}(p,t), \qquad p \in S^1,\ t \in [0,T), \tag{7.1}$$

wobei $\vec{\kappa} = -\kappa\nu$ der Krümmungsvektor ist.
Für Existenz, Regularität und Langzeit-Verhalten gilt zunächst einmal dasselbe wie im mehrdimensionalen Fall: Eine glatte Lösung existiert auf einem

endlichen maximalen Zeitintervall $[0, T)$, wobei die mittlere Krümmung für $t \to T$ beliebig groß wird (vgl.[Gr1] und [Gr2]). Wir können nun aber mit Hilfe eines Vergleichs des Verhaltens von extrinsischer und intrinsischer Abstandsfunktion zeigen, daß sich bei eingebetteten geschlossenen Anfangskurven nur TypI-Singularitäten ausbilden können. Mehr noch: Die Kurven $\Gamma_t : S^1 \to F(S^1 \times \{t\})$ konvergieren für $t \to T$ gegen einen „runden“ Punkt, das heißt bei einer Reskalierung, wie sie in Abschnitt 4.1 beschrieben wurde, konvergieren Teilfolgen der reskalierten Kurven zu einem Kreis.

Wir definieren also

$$d,\ l : S^1 \times S^1 \times [0, T) \to \mathbb{R}$$

durch

$$\begin{aligned} d(p,q,t) &:= |F(p,t) - F(q,t)|_{\mathbb{R}^2}, \\ l(p,q,t) &:= \int_q^p ds_t. \end{aligned}$$

Erstere Funktion gibt den extrinsische Abstand von $F(p,t)$ und $F(q,t)$ an, das heißt den Abstand zwischen diesen beiden Punkten im umliegenden Raum; letztere ist der intrinsische Abstand, nämlich die Länge der Kurve zwischen $F(p,t)$ und $F(q,t)$. Da auf geschlossenen Kurven l nur für $0 \le l \le L/2$ glatt definiert ist (L ist die Gesamtlänge der Kurve), benutzen wir stattdessen die glatte Funktion $\psi : S^1 \times S^1 \times [0, T) \to \mathbb{R}$,

$$\psi := \frac{L}{\pi} \sin\left(\frac{l\pi}{L}\right).$$

Auf diese Weise ist es egal, welchen der beiden Kurventeile zwischen $F(p,t)$ und $F(q,t)$ wir zur Messung des intrinsischen Abstandes l benutzen.
Der Quotient d/ψ kann als eine Art Maß für die Ähnlichkeit von Γ_t mit einem Kreis angesehen werden, da auf einem solchen $d/\psi \equiv 1$. Außerdem gilt:

Hilfssatz 7.1 *Ist eine geschlossene Kurve Γ_t kein Kreis, so ist $\min_{\Gamma_t}(d/\psi) < 1$.*

Beweis: Da Γ_t kein Kreis ist, gibt es wenigstens ein Paar von Punkten $(p, q) \in S^1 \times S^1$, wo einerseits

$$l(p,q,t) = \frac{1}{2} L(t)$$

gilt, andererseits der extrinsische Abstand $d(p,q,t)$ strikt kleiner als der Durchmesser des Kreises vom Umfang $L(t)$ ist, also

$$d(p,q,t) < \frac{1}{\pi} L(t).$$

Aus beidem folgt dann

$$\psi(p,q,t) = \frac{1}{\pi} L(t) > d(p,q,t),$$

also $min_{\Gamma_t}(d/\psi) \leq (d/\psi)(p,q,t) < 1$. □

Damit können wir nun zeigen, daß das jeweilige Minimum $min_{\Gamma_t}(d/\psi)$ mit der Zeit t monoton wächst:

Theorem 7.2 *Der Quotient d/ψ nehme zur Zeit $t_0 \in [0,T)$ sein Minimum bei (p,q) in $S^1 \times S^1$ an. Dann gilt*

$$\frac{d}{dt}(d/\psi)(p,q,t_0) \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn Γ_{t_0} ein Kreis ist.

Beweis: Ist Γ_{t_0} ein Kreis, so sind wegen der Eindeutigkeit des mittleren Krümmungsflusses auch alle folgenden Kurven Γ_t mit $t \geq t_0$ Kreise, also $(d/\psi) \equiv 1$ auf $S^1 \times S^1 \times [t_0, T)$; darum gilt

$$\frac{d}{dt}(d/\psi)(p,q,t_0) = 0.$$

Ist dagegen Γ_{t_0} kein Kreis, so können wir nach obigem Hilfssatz voraussetzen, daß $(d/\psi)(p,q,t_0) < 1$ ist. Und da wir den Quotienten d/ψ auf der Diagonalen von $S^1 \times S^1$ stetig fortsetzen können, indem wir ihn dort gleich 1 setzen, ist $l(p,q,t_0) \neq 0$, und somit O.B.d.A. $0 < l(p,q,t_0) \leq \frac{1}{2} L(t_0)$.
Da d/ψ zur Zeit t_0 bei (p,q) sein Minimum annimmt, haben wir

$$\delta(\xi)(d/\psi)(p,q,t_0) = 0, \qquad \delta^2(\xi)(d/\psi)(p,q,t_0) \geq 0, \tag{7.2}$$

wobei $\delta(\xi)$ und $\delta^2(\xi)$ die erste und zweite Variation bezüglich eines Variationsvektors $\xi \in T_p\Gamma_{t_0} \oplus T_q\Gamma_{t_0}$ bezeichnen. Um dies auszuwerten, definieren wir für $s = s_{t_0}$ (Bogenlängenparameter)

$$e_1 := \frac{d}{ds} F(p,t_0), \quad e_2 := \frac{d}{ds} F(q,t_0), \quad \omega := -d^{-1}(p,q,t_0)(F(p,t_0) - F(q,t_0)).$$

Mit $\delta_1 := \delta(e_1 \oplus 0)$ ist $\delta_1(F(p,t_0) - F(q,t_0)) = \frac{d}{ds} F(p,t_0) = e_1$, somit

$$\begin{aligned}
\delta_1(d)(p,q,t_0) &= \frac{(\delta_1(F(p,t_0)-F(q,t_0)),F(p,t_0)-F(q,t_0))}{d(p,q,t_0)} \\
&= \frac{(e_1,-d(p,q,t_0)\cdot\omega)}{d(p,q,t_0)} \;=\; -(e_1,\omega); && (7.3)\\
\delta_1(l)(p,q,t_0) &= \delta_1(s_{t_0}(q)-s_{t_0}(p)) \;=\; -1; \\
\delta_1(\psi)(p,q,t_0) &= \cos\left(\frac{l\pi}{L}\right)\cdot\delta_1(l)(p,q,t_0) = -\cos\left(\frac{l\pi}{L}\right). && (7.4)
\end{aligned}$$

Entsprechend läßt sich errechnen, daß mit $\delta_2 := \delta(0\oplus e_2)$

$$\delta_2(d) = +(e_2,\omega), \qquad \delta_2(l) = +1, \qquad \delta_2(\psi) = +\cos\left(\frac{l\pi}{L}\right) \tag{7.5}$$

an der Stelle (p,q,t_0) gilt. Daraus folgt mit der Quotientenregel

$$\begin{aligned}
\delta_1(d/\psi) &= -\frac{1}{\psi}(e_1,\omega)+\frac{d}{\psi^2}\cos\left(\frac{l\pi}{L}\right), \\
\delta_2(d/\psi) &= \frac{1}{\psi}(e_2,\omega)-\frac{d}{\psi^2}\cos\left(\frac{l\pi}{L}\right),
\end{aligned}$$

so daß wir mit $\xi = e_1\oplus 0$ beziehungsweise $\xi = 0\oplus e_2$ aus (7.2) erhalten:

$$(e_1,\omega) = (e_2,\omega) = \frac{d}{\psi}\cos\left(\frac{l\pi}{L}\right). \tag{7.6}$$

Im Blick auf diese Gleichung müssen wir nun zwei Fälle unterscheiden: Wegen $(e_1,\omega)=(e_2,\omega)$ ist entweder $\angle(e_1,\omega)=\angle(e_2,\omega)$ oder $\angle(e_1,\omega)=-\angle(e_2,\omega)$. Im ersten Fall ist $e_1=e_2$, im zweiten ist e_1+e_2 parallel zu ω (folgt aus einfacher zeichnerischer Überlegung).

Fall 1: Ist $e_1=e_2$, so erhalten wir mit $\delta_{1,2} := \delta(e_1\oplus e_2)$

$$\delta_{1,2}(l) = \delta_1(l)+\delta_2(l) = 0, \qquad \delta^2_{1,2}(l) = \delta^2(e_1\oplus e_2)(l) = 0,$$

so daß $\delta_{1,2}(\psi)=0$ und $\delta^2_{1,2}(\psi)=0$ und somit

$$\delta^2_{1,2}(d/\psi) = \frac{1}{\psi}\delta^2_{1,2}(d),$$

wobei nach den Gleichungen (7.3) und (7.5)

$$\begin{aligned}
\delta^2_{1,2}(d) &= \delta_1(\delta_1(d))+\delta_1(\delta_2(d))+\delta_2(\delta_1(d))+\delta_2(\delta_2(d)) \\
&= -(\delta_1 e_1,\omega)-(e_1,\delta_1\omega)+(e_2,\delta_1\omega)-(e_1,\delta_2\omega)+(\delta_2 e_2,\omega)+(e_2,\delta_2\omega).
\end{aligned}$$

Wegen $e_1 = e_2, \quad \delta_1(e_1) = \vec{\kappa}(p, t_0)$ und $\delta_2(e_2) = \vec{\kappa}(q, t_0)$ gilt also

$$\delta^2_{1,2}(d) = -(\delta_1 e_1, \omega) + (\delta_2 e_2, \omega) = (\vec{\kappa}(q, t_0) - \vec{\kappa}(p, t_0), \omega).$$

Setzen wir dann $\xi = e_1 \oplus e_2$ in (7.2), so erhalten wir daraus:

$$0 \leq \delta^2_{1,2}(d/\psi) = \frac{1}{\psi}(\vec{\kappa}(q, t_0) - \vec{\kappa}(p, t_0), \omega). \tag{7.7}$$

Fall 2: Ist $(e_1 + e_2) \parallel \omega$, so setzen wir $\xi = e_1 \ominus e_2$ in (7.2) und erhalten

$$0 \leq \delta^2(e_1 \ominus e_2)(d/\psi) = \frac{1}{\psi}(\vec{\kappa}(q, t_0) - \vec{\kappa}(p, t_0), \omega) + \frac{4\pi^2}{L^2}\frac{d}{\psi}. \tag{7.8}$$

Dabei haben wir mit $\delta_{1,2} := \delta(e_1 \ominus e_2)$ folgende leicht nachzurechnende Gleichungen benutzt:

$$\begin{aligned}
\delta_{1,2}(d) &= \delta_1(d) - \delta_2(d) = -(e_1 + e_2, \omega), \\
\delta_{1,2}(\psi) &= \delta_1(\psi) - \delta_2(\psi) = -2\cos\left(\frac{l\pi}{L}\right), \\
\delta^2_{1,2}(\psi) &= \delta_1(\delta_{1,2}(\psi)) - \delta_2(\delta_{1,2}(\psi)) = -\frac{4\pi^2}{L^2}\psi, \\
\delta_{1,2}(\omega) &= \frac{1}{d}(e_1 + e_2, \omega)\cdot\omega - \frac{1}{d}(e_1 + e_2), \\
\delta_{1,2}(e_1 + e_2) &= \delta_1(e_1) - \delta_2(e_2) = \vec{\kappa}(p, t_0) - \vec{\kappa}(q, t_0), \\
|e_1 + e_2| &= (e_1 + e_2, \omega) = \frac{2d}{\psi}\cos\left(\frac{l\pi}{L}\right),
\end{aligned}$$

wobei letztere Gleichung aus (7.6) und der Voraussetzung folgt, daß $(e_1 + e_2)$ parallel zu ω ist und $|\omega| = 1$.

Sei nun s der Bogenlängenparameter zur Zeit t; so folgt aus $L(t) = \int_{S^1} ds$ und $(d/dt)(ds) = -\kappa^2(ds)$ (vgl. Kor.2.12), daß $\frac{dL}{dt} = -\int_{S^1}\kappa^2 ds$, entsprechend $\frac{dl}{dt} = -\int_q^p \kappa^2 ds$. Daraus folgt mit ganz normalen Rechenregeln

$$\frac{d}{dt}\psi = -\frac{\psi}{L}\int_{S^1}\kappa^2 ds - \cos\left(\frac{l\pi}{L}\right)\int_q^p \kappa^2 ds + \frac{l}{L}\cos\left(\frac{l\pi}{L}\right)\int_{S^1}\kappa^2 ds;$$

außerdem erhalten wir aus der Evolutionsgleichung (7.1)

$$\frac{d}{dt}(d)(p, q, t_0) = (\vec{\kappa}(q, t_0) - \vec{\kappa}(p, t_0), \omega),$$

so daß mit $\alpha := l\pi/L$, also $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, folgt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(d/\psi) &= \frac{1}{\psi}(\vec{\kappa}(q,t_0) - \vec{\kappa}(p,t_0), \omega) + \frac{d}{\psi L}\left(1 - \frac{l}{\psi}\cos\alpha\right)\int_{S^1} \kappa^2 ds \\ &\quad + \frac{d}{\psi^2}\cos\alpha \int_q^p \kappa^2 ds.\end{aligned} \tag{7.9}$$

Damit greifen wir nun die obige Fallunterscheidung wieder auf:

Fall 1: $e_1 = e_2$. Aus der Abschätzung (7.7) folgt mit (7.9)

$$\frac{d}{dt}(d/\psi) \geq \frac{d}{\psi L}\left(1 - \frac{l}{\psi}\cos\alpha\right)\int_{S^1} \kappa^2 ds + \frac{d}{\psi^2}\cos\alpha \int_q^p \kappa^2 ds.$$

Da $\frac{l}{\psi}\cos\alpha = \alpha(\tan\alpha)^{-1} < 1$ wegen $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, folgt hieraus wie erwartet

$$\frac{d}{dt}(d/\psi)(p,q,t_0) > 0.$$

Fall 2: $(e_1 + e_2) \parallel \omega$. Aus der Abschätzung (7.8) folgt mit (7.9)

$$\frac{d}{dt}(d/\psi) \geq -\frac{4\pi^2}{L^2}\frac{d}{\psi} + \frac{d}{\psi L}\left(1 - \frac{l}{\psi}\cos\alpha\right)\int_{S^1} \kappa^2 ds + \frac{d}{\psi^2}\cos\alpha \int_q^p \kappa^2 ds.$$

Wegen $\int_{S^1} \kappa ds = 2\pi$ und der Hölder-Ungleichung gilt

$$\int_{S^1} \kappa^2 ds \geq \frac{1}{L}\left(\int_{S^1} \kappa\, ds\right)^2 = \frac{4\pi^2}{L},$$

und da wie oben $(1 - \frac{l}{\psi}\cos\alpha) > 0$, haben wir damit

$$\frac{d}{dt}(d/\psi) \geq \frac{d}{\psi^2 l}\cos\alpha\left(-\frac{4\pi^2 l^2}{L^2} + l\int_q^p \kappa^2 ds\right). \tag{7.10}$$

Wiederum nach der Hölder-Ungleichung ist

$$l\int_q^p \kappa^2 ds \geq \left(\int_q^p \kappa\, ds\right)^2 = \beta^2,$$

wobei $0 < \beta \leq \pi$ der Winkel zwischen e_1 und e_2 ist; da $(e_1 + e_2)$ parallel zu ω ist, folgt mit Gleichung (7.6):

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = (e_1, \omega) = (e_2, \omega) = \frac{d}{\psi}\cos\alpha;$$

und da nach Voraussetzung $(d/\psi)(p, q, t_0) < 1$, ist $\cos(\beta/2) < \cos\alpha$, also $\alpha < \beta/2$ und somit

$$l\int_q^p \kappa^2 ds \geq \beta^2 > 4\alpha^2 = \frac{4\pi^2 l^2}{L^2}.$$

So folgt aus (7.10), daß

$$\frac{d}{dt}(d/\psi)(p, q, t_0) > 0,$$

womit das Theorem bewiesen ist. □

Mit dem Maximum-Lemma 2.1 folgt aus dem eben Bewiesenen, daß das Minimum von (d/ψ) auf $S^1 \times S^1$ mit der Zeit monoton wächst. Haben wir also zu Beginn des Flusses eine kompakte Kurve Γ_0 gegeben, die sich nirgendwo selber schneidet (die also im $\mathbb{R}^2$ eingebettet ist), so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß nicht nur zur Zeit $t = 0$

$$\min(d/\psi) \geq \varepsilon \tag{7.11}$$

gilt, sondern, da $min\,(d/\psi)$ monoton wächst, auch für alle Zeiten $t > 0$. Einerseits folgt daraus, daß die Kurve unter dem mittleren Krümmungsfluß eingebettet bleibt, andererseits haben wir damit auch folgendes Theorem:

Theorem 7.3 *Ist die Anfangskurve $F_0 : S^1 \to \mathbb{R}^2$ des mittleren Krümmungsflusses kompakt, geschlossen und eingebettet, dann bildet die Lösung von (7.1) zu einem endlichen Zeitpunkt T eine TypI-Singularität aus und konvergiert glatt gegen einen „runden“ Punkt.*

Beweis: Nach den Ausführungen im Kapitel 3 bildet die Lösung des mittleren Krümmungsflusses zu einem endlichen Zeitpunkt T entweder eine TypI- oder eine TypII-Singularität aus. Im letzteren Fall können nach dem vorigen Kapitel die Kurven Γ_t so reskaliert werden, daß sie gegen einen translatierenden Soliton - hier, im $\mathbb{R}^2$, die „grim reaper“ Kurve - konvergieren. Dann aber

wird das Minimum des Quotienten d/ψ, der bei der Reskalierung erhalten bleibt, beliebig klein, was ein Widerspruch zu (7.11) ist.
Also ist die Singularität vom TypI, so daß wir nach dem vorletzten Kapitel Γ_t so reskalieren können, daß es zu jeder Folge $t_j \to \infty$ eine Teilfolge $t_{j_l} \to \infty$ gibt, für welche $\tilde{\Gamma}_{t_{j_l}}$ zu einer homothetisch-selbstähnlichen Lösung des mittleren Krümmungsflusses konvergiert; dies kann nach Abresch-Langer im eindimensionalen, eingebetteten Fall nur das Schrumpfen eines Kreises sein (siehe Abschnitt 7.2). Man sagt, Γ_t konvergiert glatt gegen einen „runden" Punkt. $\square$

7.2 Homothetische Lösungen

Ist die Anfangskurve des mittleren Krümmungsflusses nicht eingebettet, so können wir bei unseren Untersuchungen des mittleren Krümmungsflusses wieder nur wie in den letzten beiden Kapiteln nach der Art der Singularität unterscheiden: Wir können jeweils so reskalieren, daß die Kurven bei einer TypI-Singularität gegen eine homothetisch-selbstähnliche Lösung von (7.1) konvergieren, bei einer TypII-Singularität gegen einen translatierenden Soliton. Im ersten Fall hat bereits Mullin [Mu] alle möglichen konvexen homothetischen Lösungen des mittleren Krümmungsflusses gefunden, während Abresch und Langer [AL] bewiesen haben, daß diese tatsächlich die *einzigen* sind. Demnach gilt:

Theorem 7.4 *Eine geschlossene, kompakte, in Bogenlänge parametrisierte Kurve $F : S^1 \to \mathbb{R}^2$ erfülle die Homothetienbedingung $\kappa = (F, \nu)$. Dann ist F entweder ein m-fach überdeckter Kreis oder gehört einer Familie von Kurven $\{F_{m,n}\}$ an, die wir wie folgt beschreiben können:*
Sind m und n positive ganze Zahlen mit $1/2 < m/n < \sqrt{2}/2$, so gibt es (bis auf Kongruenz) genau eine in Bogenlänge parametrisierte Kurve $F_{m,n} : S^1 \to \mathbb{R}^2$ mit Rotationsindex m, die sich nach genau n Perioden der Krümmungsfunktion $\kappa > 0$ wieder schließt. Dabei ist κ eine Lösung der Gleichungen

$$B'' + 2\lambda^2(e^B - 1) = 0, \qquad B = 2\ln(\kappa/\lambda)$$

für eine Konstante λ.

Für geeignete Polar-Koordinaten (r, θ) gilt zwischen κ und r die Beziehung $\kappa = C\exp(\frac{1}{2}\lambda^2 r^2)$ für eine Konstante C.

Beweis: siehe [AL] Theorem A.

Kapitel 8

Konvexe Flächen

In diesem Kapitel werden wir uns mit dem mittleren Krümmungsfluß von konvexen mehrdimensionalen Anfangsflächen M_0 befassen, die glatt im $\mathbb{R}^{n+1}$ eingebettet sind, sich also nirgendwo selber schneiden. Als erstes wollen wir mit Hilfe von Integralabschätzungen nachweisen, daß die Flächen M_t des Flusses zu einem endlichen Zeitpunkt T gegen einen einzigen Punkt $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{n+1}$ konvergieren. Dazu haben wir bereits in Abschnitt 3.1 bewiesen, daß eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses (1.1) genau bis zu dem Zeitpunkt $T < \infty$ existiert, an dem das Maximum des Krümmungsbetrages divergiert. Wir untersuchen also im folgenden wieder das Verhalten des mittleren Krümmungsflusses nahe diesem Zeitpunkt T.
In Abschnitt 4.3 haben wir eine Reskalierungstechnik für konvexe Flächen kennengelernt, nach der wir eine obere und eine untere gleichmäßige Schranke für die mittlere Krümmung der reskalierten Flächen $\tilde{M}_s$ erhalten (Thm.4.7). Damit werden wir in Abschnitt 8.2 beweisen, daß $\tilde{M}_s$ gegen eine Sphäre konvergiert. Außerdem werden wir Aussagen über die Schnelligkeit der Konvergenz machen.
Da wir den eindimensionalen Fall bereits im vorigen Kapitel behandelt haben, gehen wir hier von einer *mehr*dimensionalen kompakten Mannigfaltigkeit M^n $(n \geq 2)$ aus, die den Einbettungen $F(\,\cdot\,,t) : M^n \to M_t \subset \mathbb{R}^{n+1}$ zugrunde liegt. Daß die Anfangsfläche konvex ist, bedeutet, daß zu Beginn des Flusses alle Eigenwerte der zweiten Fundamentalform nichtnegativ sind, also $h^i_j(0) \geq 0$. Aus der Evolutionsgleichung für h^i_j (Kor.2.14(i)) und dem Maximumprinzip für symmetrische Bilinearformen (Thm.2.4) folgt dann, daß $h^i_j \geq 0$ auch für $t \geq 0$. Außerdem folgt wie in Kapitel 6, daß $M_t = \Sigma^k_t \times \mathbb{R}^{n-k}$ für $t > 0$, wobei Σ^k_t strikt konvex ist. Da nach Voraussetzung M^n kompakt

ist, ist $k = n$ und somit M_t für $t > 0$ strikt konvex. Also sind alle Eigenwerte der zweiten Fundamentalform überall und zu jeder Zeit (O.B.d.A. auch für $t = 0$) strikt positiv, kurz:

$$h^i_j > 0. \tag{8.1}$$

Damit folgt aus der Definition von H und $|A|^2$, daß

$$|A|^2 \leq H^2. \tag{8.2}$$

8.1 Der nicht reskalierte Fluß

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst den nicht reskalierten Fluß untersuchen. Genauer gesagt wollen wir folgendes Theorem beweisen:

Theorem 8.1 *Sei der mittlere Krümmungsfluß wie in (1.1) mit $n \geq 2$ und konvexer Anfangsfläche M_0 gegeben, und sei $[0, T)$ das maximale Zeitintervall, auf dem eine Lösung von (1.1) existiert. Dann konvergieren für $t \to T$ die Flächen M_t des Flusses gegen einen einzigen „runden“ Punkt $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{n+1}$.*

Der Beweis hierzu erstreckt sich über die folgenden 4 Unterabschnitte.

8.1.1 Grundlagen

Wir wollen zunächst einige grundlegende Abschätzungen von Größen, die durch die Metrik g und die zweite Fundamentalform A gebildet sind, festhalten. Für die jeweiligen Beweise wird auf entsprechende Stellen in G.Huiskens Arbeit [Hu1] verwiesen.
Als erstes verbessern wir die Ungleichung $|\nabla H|^2 \leq n|\nabla A|^2$ aus Lemma 2.6:

Lemma 8.2 (i) $|\nabla A|^2 \geq \frac{3}{n+2}|\nabla H|^2$.
(ii) $|\nabla A|^2 - \frac{1}{n}|\nabla H|^2 \geq \frac{2(n-1)}{3n}|\nabla A|^2$.

Beweis: siehe [Hu1], Lemma 2.2.

Für symmetrische 2-Tensoren M_{ij}, N_{ij} sagen wir, daß $M_{ij} \geq N_{ij}$, wenn $M_{ij} - N_{ij} \geq 0$, das heißt wenn die Eigenwerte von $M_{ij} - N_{ij}$ nichtnegativ sind (entsprechendes gilt für die strikte Ungleichung). Damit folgt aus (8.1) und der Kompaktheit von M_0, daß es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß zur Zeit $t = 0$ gilt:

$$h_{ij} \geq \varepsilon H g_{ij}. \tag{8.3}$$

Mit dem Maximumprinzip für Tensoren folgt, daß dies auch für alle Zeiten $t \geq 0$ gilt:

Lemma 8.3 *Gilt zu Beginn des Flusses* $\varepsilon H g_{ij} \leq h_{ij} \leq \beta H g_{ij}$ *mit* $H > 0$ *und Konstanten* $0 < \varepsilon \leq 1/n < \beta < 1$*, so bleibt dies so für alle Zeiten* $t \in [0, T)$.

Beweis: siehe [Hu1], Theorem 4.3.

Damit haben wir für alle Zeiten $t \geq 0$ folgende Abschätzungen:

Lemma 8.4 *Mit* $C = tr(A^3) = g^{ij} g^{kl} g^{mp} h_{ik} h_{lm} h_{jp}$ *gilt:*

(i) $HC - |A|^4 \geq n\varepsilon^2 H^2 (|A|^2 - \frac{1}{n} H^2)$;

(ii) $|H \nabla_i h_{jk} - \nabla_i H \cdot h_{jk}|^2 \geq \frac{1}{2} \varepsilon^2 H^2 |\nabla H|^2$.

Beweis: siehe [Hu1], Lemma 2.3.

Nun sei noch eine grundlegende Evolutionsgleichung genannt, die wir für den übernächsten Abschnitt brauchen.

Lemma 8.5 *Es gilt die Gleichung*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(|A|^2 - \frac{1}{n} H^2 \right) &= \triangle \left(|A|^2 - \frac{1}{n} H^2 \right) - 2 \left(|\nabla A|^2 - \frac{1}{n} |\nabla H|^2 \right) \\ &\quad + 2 |A|^2 \left(|A|^2 - \frac{1}{n} H^2 \right). \end{aligned}$$

Beweis: Folgt direkt aus den Evolutionsgleichungen (2.3) und (2.4) und der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} H^2 = 2H(\triangle H + |A|^2 H) = \triangle H^2 - 2|\nabla H|^2 + 2|A|^2 H^2. \qquad \square$$

8.1.2 Die Eigenwerte von A

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß sich die Eigenwerte der zweiten Fundamentalform für $t \to T$ zumindest an solchen Punkten, wo die mittlere Krümmung gegen Unendlich geht, einander annähern. Dazu betrachten wir den Term

$$|A|^2 - \frac{1}{n} H^2 = \frac{1}{n} \sum_{i<j}^{n} (\kappa_i - \kappa_j)^2,$$

der offensichtlich mißt, wie weit die Eigenwerte κ_i von A voneinander entfernt sind. Wir können zeigen, daß der Term $|A|^2 - H^2/n$ relativ zu H^2 klein wird. Genauer:

Theorem 8.6 *Es gibt allein von M_0 abhängige Konstanten $\delta > 0$ und $C_0 < \infty$, so daß*

$$|A|^2 - \frac{1}{n}H^2 \leq C_0 H^{2-\delta}$$

für alle Zeiten $t \in [0, T)$.

Um dies zu beweisen, betrachten wir die Funktion

$$f_\sigma = \frac{(|A|^2 - H^2/n)}{H^{2-\sigma}},$$

für die wir für genügend kleine $\sigma > 0$ eine obere Schranke finden wollen. Dazu brauchen wir die Evolutionsgleichung für f_σ und einige Integralabschätzungen.

Lemma 8.7 *Für jedes $\sigma \geq 0$ gilt*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_\sigma &= \triangle f_\sigma + \frac{2(1-\sigma)}{H}\langle \nabla_i H, \nabla_i f_\sigma \rangle - \frac{2}{H^{4-\sigma}} |H \nabla_i h_{jk} - \nabla_i H \cdot h_{jk}|^2 \\ &\quad - \frac{\sigma(1-\sigma)}{H^2} |\nabla H|^2 f_\sigma \; + \; \sigma |A|^2 f_\sigma \end{aligned}$$

Beweis: siehe [Hu1], Lemma 5.2.

Wäre der letzte Term dieser Evolutionsgleichung, $\sigma|A|^2 f_\sigma$, nicht positiv, so könnten wir hier das Maximumprinzip 2.2 auf $f_\sigma - \max_{M_0} f_\sigma$ anwenden. So aber erhalten wir lediglich mit Lemma 8.4(ii):

Korollar 8.8 *Für jedes $\sigma \geq 0$ gilt*

$$\frac{\partial}{\partial t} f_\sigma \leq \triangle f_\sigma + \frac{2(1-\sigma)}{H}\langle \nabla_i H, \nabla_i f_\sigma \rangle - \frac{\varepsilon^2}{H^{2-\sigma}} |\nabla H|^2 + \sigma |A|^2 f_\sigma$$

Den negativen Term $-\varepsilon^2 |\nabla H|^2 / H^{2-\sigma}$ können wir mit Hilfe des Divergenz-Theorems verwerten durch

Lemma 8.9 *Sei $p \geq 2$. Dann haben wir mit dem ε aus Ungleichung (8.3) für jedes $\eta > 0$ und jedes $0 \leq \sigma \leq 1$ die Ungleichung*

$$\begin{aligned} n\varepsilon^2 \int f_\sigma^p H^2 d\mu &\leq (2\eta p + 5) \int \frac{f_\sigma^{p-1}}{H^{2-\sigma}} |\nabla H|^2 d\mu \\ &\quad + \eta^{-1}(p-1) \int f_\sigma^{p-2} |\nabla f_\sigma|^2 d\mu. \end{aligned}$$

Beweis: Wir haben

$$\begin{aligned} \triangle f_\sigma &= \frac{H \triangle |A|^2 - (2-\sigma)|A|^2 \triangle H}{H^{3-\sigma}} - \frac{\sigma}{nH^{1-\sigma}} \triangle H \\ &\quad - \frac{2(2-\sigma)}{H^{3-\sigma}} \langle \nabla_i H, \nabla_i |A|^2 \rangle + \frac{(2-\sigma)(3-\sigma)}{H^{4-\sigma}} |A|^2 |\nabla H|^2 \\ &\quad + \frac{1}{n} \frac{\sigma(1-\sigma)}{H^{2-\sigma}} |\nabla H|^2 \end{aligned} \tag{8.4}$$

(vgl. [Hu1], Gleichung (5)). Diese Gleichung wollen wir im folgenden neu formulieren. Dazu bezeichnen wir mit h_{ij}^0 den spurlosen Anteil der zweiten Fundamentalform, also

$$h_{ij}^0 = h_{ij} - \frac{H}{n} g_{ij}.$$

Dann ist nach Lemma 2.9(ii)

$$\triangle |A|^2 = 2\langle h_{ij}^0, \nabla_i \nabla_j H \rangle + \frac{2}{n} H \triangle H + 2|\nabla A|^2 + 2(HC - |A|^4)$$

wobei wieder $C = tr(A^3)$. Damit haben wir

$$\begin{aligned} &\frac{H \triangle |A|^2 - (2-\sigma)|A|^2 \triangle H}{H^{3-\sigma}} - \frac{\sigma}{nH^{1-\sigma}} \triangle H \\ &\quad = \frac{2}{H^{2-\sigma}} \langle h_{ij}^0, \nabla_i \nabla_j H \rangle - \frac{2-\sigma}{H} f_\sigma \triangle H + \frac{2}{H^{2-\sigma}} (HC - |A|^4) + \frac{2}{H^{2-\sigma}} |\nabla A|^2. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\langle \nabla_i H, \nabla_i f_\sigma \rangle = -\frac{2-\sigma}{H} f_\sigma |\nabla H|^2 + \frac{1}{H^{2-\sigma}} \langle \nabla_i H, \nabla_i |A|^2 \rangle - \frac{2}{nH^{1-\sigma}} |\nabla H|^2,$$

woraus mit Gleichung (5.8) folgt:

$$-\frac{2(2-\sigma)}{H^{3-\sigma}}\langle\nabla_i H, \nabla_i |A|^2\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2}{H^{3-\sigma}}\langle\nabla_i H, \nabla_i |A|^2\rangle - \frac{2(1-\sigma)}{H^{3-\sigma}}\langle\nabla_i H, \nabla_i |A|^2\rangle \\
&= \frac{2}{H^{4-\sigma}}\left(|H\nabla_i h_{jk} - \nabla_i H \cdot h_{jk}|^2 - H^2|\nabla A|^2 - |A|^2|\nabla H|^2 \right) \\
&\quad -\frac{2(1-\sigma)}{H}\langle\nabla_i H, \nabla_i f_\sigma\rangle - \frac{2(1-\sigma)(2-\sigma)}{H^2} f_\sigma|\nabla H|^2 - \frac{4(1-\sigma)}{nH^{2-\sigma}}|\nabla H|^2.
\end{aligned}$$

Also ist

$$-\frac{2(2-\sigma)}{H^{3-\sigma}}\langle\nabla_i H, \nabla_i |A|^2\rangle + \frac{(2-\sigma)(3-\sigma)}{H^{4-\sigma}}|A|^2|\nabla H|^2 + \frac{\sigma(1-\sigma)}{nH^{2-\sigma}}|\nabla H|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{H^{4-\sigma}}|H\nabla_i h_{jk} - \nabla_i H \cdot h_{jk}|^2 - \frac{2}{H^{2-\sigma}}|\nabla A|^2 \\
&\quad -\frac{2(1-\sigma)}{H}\langle\nabla_i H, \nabla_i f_\sigma\rangle + \frac{\sigma(1-\sigma)}{H^2} f_\sigma|\nabla H|^2,
\end{aligned}$$

so daß schließlich aus der Gleichung (8.4) folgt

$$\begin{aligned}
\triangle f_\sigma &= \frac{2}{H^{2-\sigma}}\langle h^0_{ij}, \nabla_i\nabla_j H\rangle - \frac{2-\sigma}{H} f_\sigma \triangle H + \frac{2}{H^{2-\sigma}}(HC - |A|^4) \\
&\quad + \frac{2}{H^{4-\sigma}}|H\nabla_i h_{jk} - \nabla_i H \cdot h_{jk}|^2 - \frac{2(1-\sigma)}{H}\langle\nabla_i H, \nabla_i f_\sigma\rangle \\
&\quad + \frac{\sigma(1-\sigma)}{H^2} f_\sigma|\nabla H|^2.
\end{aligned}$$

Damit haben wir für $0 \leq \sigma \leq 1$

$$\begin{aligned}
\triangle f_\sigma &\geq \frac{2}{H^{2-\sigma}}\langle h^0_{ij}, \nabla_i\nabla_j H\rangle - \frac{2-\sigma}{H} f_\sigma \triangle H + \frac{2}{H^{2-\sigma}}(HC - |A|^4) \\
&\quad - \frac{2(1-\sigma)}{H}\langle\nabla_i H, \nabla_i f_\sigma\rangle.
\end{aligned} \tag{8.5}$$

Diese Ungleichung multiplizieren wir für $p \geq 2$ mit f_σ^{p-1} und integrieren über M^n. Dabei erhalten wir durch partielle Integration folgende Gleichungen:

$$\int f_\sigma^{p-1} \triangle f_\sigma d\mu = -(p-1)\int f_\sigma^{p-2}|\nabla f_\sigma|^2 d\mu;$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{H^{2-\sigma}} f_\sigma^{p-1} \langle h_{ij}^0, \nabla_i \nabla_j H \rangle \, d\mu &= -\int g^{ij} g^{kl} \nabla_j \left(\frac{2}{H^{2-\sigma}} f_\sigma^{p-1} h_{ik}^0 \right) \nabla_l H \, d\mu \\
&= 2(2-\sigma) \int \frac{f_\sigma^{p-1}}{H^{3-\sigma}} \langle h_{ij}^0, \nabla_i H \nabla_j H \rangle \, d\mu \\
&\quad -2(p-1) \int \frac{f_\sigma^{p-2}}{H^{2-\sigma}} \langle h_{ij}^0, \nabla_i f_\sigma \nabla_j H \rangle \, d\mu \\
&\quad -2(1-\frac{1}{n}) \int \frac{f_\sigma^{p-1}}{H^{2-\sigma}} |\nabla H|^2 \, d\mu; \\
-\int \frac{2-\sigma}{H} f_\sigma^p \triangle H \, d\mu &= (2-\sigma) \int g^{ij} \nabla_i \left(\frac{f_\sigma^p}{H} \right) \nabla_j H \, d\mu \\
&= (2-\sigma) p \int \frac{f_\sigma^{p-1}}{H} \langle \nabla_i H, \nabla_i f_\sigma \rangle \, d\mu \\
&\quad -(2-\sigma) \int \frac{f_\sigma^p}{H^2} |\nabla H|^2 \, d\mu.
\end{aligned}$$

Bei der zweiten Gleichung haben wir zuletzt die Codazzi-Gleichungen benutzt. Daraus folgt nun mit (8.5)

$$\begin{aligned}
0 \ \geq\ & (p-1) \int f_\sigma^{p-2} |\nabla f_\sigma|^2 d\mu + 2(2-\sigma) \int \frac{f_\sigma^{p-1}}{H^{3-\sigma}} \langle h_{ij}^0, \nabla_i H \nabla_j H \rangle \, d\mu \\
& -2(p-1) \int \frac{f_\sigma^{p-2}}{H^{2-\sigma}} \langle h_{ij}^0, \nabla_i f_\sigma \nabla_j H \rangle \, d\mu - 2(1-\frac{1}{n}) \int \frac{f_\sigma^{p-1}}{H^{2-\sigma}} |\nabla H|^2 \, d\mu \\
& +(2-\sigma) p \int \frac{f_\sigma^{p-1}}{H} \langle \nabla_i H, \nabla_i f_\sigma \rangle \, d\mu - (2-\sigma) \int \frac{f_\sigma^p}{H^2} |\nabla H|^2 \, d\mu \\
& +2 \int \frac{f_\sigma^{p-1}}{H^{2-\sigma}} (HC - |A|^4) \, d\mu - 2(1-\sigma) \int \frac{f_\sigma^{p-1}}{H} \langle \nabla_i H, \nabla_i f_\sigma \rangle \, d\mu. \qquad (8.6)
\end{aligned}$$

Allgemein gilt

$$ab \leq \frac{\eta}{2} a^2 + \frac{1}{2\eta} b^2 \qquad \text{für jedes } \eta > 0, \text{ somit auch}$$

$$\langle a_i, b_i \rangle \leq \frac{\eta}{2} |a_i|^2 + \frac{1}{2\eta} |b_i|^2 \quad \text{und} \quad \langle a_{ij}, b_{ij} \rangle \leq \frac{\eta}{2} |a_{ij}|^2 + \frac{1}{2\eta} |b_{ij}|^2; \qquad (8.7)$$

$$|h_{ij}^0|^2 = \left(|A|^2 - \frac{1}{n} H^2 \right) = f_\sigma H^{2-\sigma}, \qquad f_\sigma \leq H^\sigma;$$

letztere Abschätzung kommt von Ungleichung (8.2). Damit haben wir

$$
\begin{aligned}
\frac{f_\sigma^{p-1}}{H^{3-\sigma}}\langle -h^0_{ij}, \nabla_i H \nabla_j H\rangle &\leq \frac{f_\sigma^{p-1}}{H^{3-\sigma}}\left(\frac{\eta_1}{2}|h^0_{ij}|^2 + \frac{1}{2\eta_1}|\nabla H|^4\right)\\
&= \frac{\eta_1}{2}\frac{f_\sigma^p}{H} + \frac{1}{2\eta_1}\frac{f_\sigma^{p-1}}{H^{3-\sigma}}|\nabla H|^4,\\
\frac{f_\sigma^{p-2}}{H^{2-\sigma}}\langle h^0_{ij}, \nabla_i f_\sigma \nabla_j H\rangle &\leq \frac{f_\sigma^{p-2}}{H^{2-\sigma}}\left(\frac{\eta_2}{2}|h^0_{ij}|^2 + \frac{1}{2\eta_2}|\nabla H|^2|\nabla f_\sigma|^2\right)\\
&= \frac{\eta_2}{2}f_\sigma^{p-1} + \frac{1}{2\eta_2}\frac{f_\sigma^{p-2}}{H^{2-\sigma}}|\nabla H|^2|\nabla f_\sigma|^2,\\
\frac{f_\sigma^{p-1}}{H}\langle -\nabla_i H, \nabla_i f_\sigma\rangle &\leq \frac{f_\sigma^{p-1}}{H}\left(\frac{\eta_3}{2}|\nabla f_\sigma|^2 + \frac{1}{2\eta_3}|\nabla H|^2)\right),
\end{aligned}
$$

woraus mit Ungleichung (8.6) folgt, daß

$$
\begin{aligned}
\int \frac{f_\sigma^{p-1}}{H^{2-\sigma}}(HC - |A|^4)d\mu \leq\ & (2-\sigma)\int\left(\frac{\eta_1}{2}\frac{f_\sigma^p}{H} + \frac{1}{2\eta_1}\frac{f_\sigma^{p-1}}{H^{3-\sigma}}|\nabla H|^4\right)d\mu\\
&+(p-1)\int\left(\frac{\eta_2}{2}f_\sigma^{p-1} + \frac{1}{2\eta_2}\frac{f_\sigma^{p-2}}{H^{2-\sigma}}|\nabla H|^2|\nabla f_\sigma|^2\right)d\mu\\
&+2\int\frac{f_\sigma^{p-1}}{H^{2-\sigma}}|\nabla H|^2\,d\mu\\
&+(p-1)\int\frac{f_\sigma^{p-1}}{H}\left(\frac{\eta_3}{2}|\nabla f_\sigma|^2 + \frac{1}{2\eta_3}|\nabla H|^2)\right)d\mu;
\end{aligned}
$$

beim vorletzten Term haben wir die Ungleichung $f_\sigma/H^\sigma \leq 1$ aus (8.7) verwendet, beim letzten Term die Abschätzung $\frac{1}{2}((2-\sigma)p - 2(1-\sigma)) \leq p-1$ für $p \geq 2$. Setzen wir nun für $\eta > 0$

$$
\eta_1 := \frac{2|\nabla H|^2}{H}, \qquad \eta_2 := \frac{|\nabla f_\sigma|^2}{2\eta f_\sigma}, \qquad \eta_3 := \frac{H^{1-\sigma}}{2\eta},
$$

so folgt

$$
\begin{aligned}
\int \frac{f_\sigma^{p-1}}{H^{2-\sigma}}(HC - |A|^4)d\mu \leq\ & \left(\frac{5}{4}(2-\sigma) + 2(p-1)\eta + 2\right)\int\frac{f_\sigma^{p-1}}{H^{2-\sigma}}|\nabla H|^2 d\mu\\
&+\frac{p-1}{2\eta}\int f_\sigma^{p-2}|\nabla f_\sigma|^2 d\mu,
\end{aligned}
$$

wobei wir wieder benutzt haben, daß nach (8.7)

$$
\frac{f_\sigma}{H^\sigma} \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{f_\sigma^p}{H^2} \leq \frac{f_\sigma^{p-1}}{H^{2-\sigma}}, \qquad \frac{f_\sigma^{p-1}}{H^\sigma} \leq f_\sigma^{p-2}. \tag{8.8}
$$

Nach Lemma 8.4(i) gilt $n\varepsilon^2 H^{4-\sigma} f_\sigma \leq HC - |A|^4$ für ε aus (8.3). Daraus erhalten wir die Behauptung, wenn wir die obige Ungleichung noch ein wenig aufrunden und bedenken, daß $\sigma \geq 0$. □

Damit können wir nun zeigen, daß hohe L^p-Normen von f_σ für genügend kleine σ beschränkt sind.

Lemma 8.10 *Es gibt eine Konstante $C_1 < \infty$, die nur von M_0 abhängt, so daß für alle*

$$p \geq 100\varepsilon^{-2}, \qquad \sigma \leq \frac{n}{8}\varepsilon^3 p^{-1/2}$$

die Ungleichung

$$\left(\int_{M_t} f_\sigma^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq C_1$$

auf $[0,T)$ anhält. (Dabei genüge ε wieder der Ungleichung (8.3) und sei gleichzeitig so klein, daß $p \geq 2$ und $\sigma \leq 1$)

Beweis: Gilt

$$C_1 := (|M_0| + 1) \sup_{\sigma \in [0,1]} \left(\sup_{M_0} f_\sigma\right),$$

so ist $C_1 < \infty$, da M_0 und $[0,1]$ kompakt sind und f_σ für alle $\sigma \in [0,1]$ auf M_0 stetig ist. Da $|M_0| + 1 \geq |M_0|^{1/p}$ für alle $p \geq 2$ gilt mit diesem von p unabhängigem C_1 die oben behauptete Ungleichung für $t = 0$. Also genügt es zu zeigen, daß

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{M_t} f_\sigma^p \, d\mu \leq 0 \qquad \text{für } 0 \leq t < T. \tag{8.9}$$

Um dies zu erreichen, multiplizieren wir die Ungleichung in Korollar 8.8 mit $p f_\sigma^{p-1}$ und erhalten

$$\frac{\partial}{\partial t}\int f_\sigma^p d\mu + \int f_\sigma^p H^2 d\mu + p(p-1)\int f_\sigma^{p-2}|\nabla f_\sigma|^2 d\mu + \varepsilon^2 p \int \frac{f_\sigma^{p-1}}{H^{2-\sigma}}|\nabla H|^2 d\mu$$
$$\leq 2(1-\sigma)p \int \frac{f_\sigma^{p-1}}{H}|\nabla H||\nabla f_\sigma| \, d\mu + \sigma p \int f_\sigma^p |A|^2 \, d\mu. \tag{8.10}$$

Dabei haben wir benutzt, daß nach Korollar 2.12

$$\frac{\partial}{\partial t}\int f_\sigma^p \, d\mu = \int \frac{\partial}{\partial t} f_\sigma^p \, d\mu - \int f_\sigma^p H^2 \, d\mu,$$

und nach partieller Integration (wie oben schon einmal errechnet)

$$\int p f_\sigma^{p-1} \triangle f_\sigma \, d\mu = -p(p-1) \int f_\sigma^{p-2} |\nabla f_\sigma|^2 \, d\mu;$$

auch die Schwarzsche Ungleichung $\langle \nabla_i H, \nabla_i f_\sigma \rangle \leq |\nabla H||\nabla f_\sigma|$ haben wir verwendet.
Da $ab \leq \frac{\eta}{2} a^2 + \frac{1}{2\eta} b^2$ nach (8.7) können wir mit $a := f_\sigma |\nabla H|/H,\ b := |\nabla f_\sigma|$, und $\eta := 2/(p-1)$ abschätzen, daß für $\sigma \geq 0$

$$\begin{aligned} 2(1-\sigma)p \int \frac{f_\sigma^{p-1}}{H} |\nabla H||\nabla f_\sigma| \, d\mu & \\ \leq \frac{2p}{p-1} \int \frac{f_\sigma^{p-1}}{H^{2-\sigma}} |\nabla H|^2 \, d\mu &+ \frac{1}{2} p(p-1) \int f_\sigma^{p-2} |\nabla f_\sigma|^2 \, d\mu, \end{aligned}$$

wobei wir beim ersten Term der rechten Seite wieder benutzt haben, daß $f_\sigma^p / H^2 \leq f_\sigma^{p-1}/H^{2-\sigma}$ (vgl.(8.8)). Da nun O.B.d.A. $p-1 \geq 100\varepsilon^{-2} - 1 \geq 4\varepsilon^{-2}$ (dann ist $(2p)/(p-1) \leq \frac{1}{2}\varepsilon^2 p$) und $|A|^2 \leq H^2$ nach (8.2, folgt mit Ungleichung (8.10)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int f_\sigma^p d\mu + \frac{1}{2}\varepsilon^2 p \int \frac{f_\sigma^{p-1}}{H^{2-\sigma}} |\nabla H|^2 d\mu + \frac{1}{2} p(p-1) \int f_\sigma^{p-2} |\nabla f_\sigma|^2 d\mu & \\ \leq (\sigma p - 1) \int f_\sigma^p H^2 \, d\mu. & \end{aligned} \tag{8.11}$$

Da nach Voraussetzung $\sigma \leq \frac{\eta}{8} \varepsilon^3 p^{-1/2}$, folgt daraus mit Lemma 8.9

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int f_\sigma^p d\mu + \frac{1}{2}\varepsilon^2 p \int \frac{f_\sigma^{p-1}}{H^{2-\sigma}} |\nabla H|^2 d\mu + \frac{1}{2} p(p-1) \int f_\sigma^{p-2} |\nabla f_\sigma|^2 d\mu & \\ \leq \frac{\varepsilon}{8} p^{1/2} (2\eta p + 5) \int \frac{f_\sigma^{p-1}}{H^{2-\sigma}} |\nabla H|^2 d\mu & \\ \frac{\varepsilon}{8} p^{1/2} \eta^{-1} (p-1) \int f_\sigma^{p-2} |\nabla f_\sigma|^2 d\mu. & \end{aligned}$$

Wählen wir hier $\eta = \varepsilon p^{-1/2}$, so erhalten wir

$$\frac{\varepsilon}{8} p^{1/2} (2\eta p + 5) \leq \frac{1}{2} \varepsilon^2 p \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon}{8} p^{1/2} \eta^{-1} (p-1) \leq \frac{1}{2} p(p-1),$$

wobei wir bei ersterer Ungleichung die Voraussetzung $\varepsilon^2 p \geq 100$ verwendet haben. So folgt schließlich die gewünschte Ungleichung (8.9) und damit die Behauptung. □

Korollar 8.11 *Setzen wir voraus, daß*

$$p \geq \left(\frac{m}{n}\right)^2 2^8 \varepsilon^{-6}, \qquad \sigma \leq \frac{n}{16}\varepsilon^3 p^{-1/2}$$

für ein $m \in \mathbb{N}$, *so gilt auf* $[0,T)$

$$\left(\int_{M_t} H^m f_\sigma^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq C_1.$$

Beweis: Dies folgt sofort aus dem vorigen Lemma, da

$$\left(\int_{M_t} H^m f_\sigma^p \, d\mu\right)^{1/p} = \left(\int_{M_t} f_{\sigma'}^p \, d\mu\right)^{1/p},$$

für

$$\sigma' = \sigma + \frac{m}{p} \leq \frac{n}{16}\varepsilon^3 p^{-1/2} + mp^{-1/2}\frac{n}{m}\frac{\varepsilon^3}{16} = \frac{n}{8}\varepsilon^3 p^{-1/2}.$$

(Auch die Voraussetzung $p \geq 100\varepsilon^{-2}$ des vorigen Lemmas ist für genügend kleine ε erfüllt.)

Mit Hilfe der folgenden Sobolev-Ungleichung können wir nun Theorem 8.6 beweisen.

Lemma 8.12 *Für alle Lipschitz-stetigen Funktionen* v *auf* M^n *gilt*

$$\left(\int_{M^n} |v|^{n/(n-1)} \, d\mu\right)^{(n-1)/n} \leq c_n \left(\int_{M^n} |\nabla v| \, d\mu + \int_{M^n} H|v| \, d\mu\right),$$

mit einer nur von n *abhängigen Konstanten* $c_n > 0$.

Beweis: siehe [MS], Theorem 2.1.

Beweis des Theorems 8.6: Wir definieren für $k \geq k_0 := \sup_{M_0} f_\sigma$

$$f_{\sigma,k} := \max(f_\sigma - k, 0) \quad \text{und} \quad A_t(k) := \{\mathbf{x} \in M_t \mid f_\sigma(\mathbf{x}) \geq k\}$$

und multiplizieren die Ungleichung aus Korollar 8.8 mit $pf_{\sigma,k}^{p-1}$ und erhalten wie im Beweis des Lemmas 8.10 (vgl.Gl.(8.11))

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{A_t(k)} f_{\sigma,k}^p d\mu + \frac{1}{2}p(p-1)\int_{A_t(k)} f_{\sigma,k}^{p-2}|\nabla f_\sigma|^2 d\mu \;\leq\; \sigma p \int_{A_t(k)} f_{\sigma,k}^{p-1} f_\sigma H^2 \, d\mu.$$

Dabei gilt für $p \geq 2$

$$\frac{1}{2}p(p-1)f_{\sigma,k}^{p-2}|\nabla f_\sigma|^2 \geq \frac{p^2}{4}f_{\sigma,k}^{p-2}|\nabla f_\sigma|^2 = |\nabla f_{\sigma,k}^{p/2}|^2,$$

so daß für $v = f_{\sigma,k}^{p/2}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{A_t(k)} v^2\, d\mu + \int_{A_t(k)} |\nabla v|^2\, d\mu \leq \sigma p \int_{A_t(k)} H^2 f_\sigma^p\, d\mu.$$

Da nach Voraussetzung $k \geq k_0 = \sup_{M_0} f_\sigma$ und somit $v \equiv 0$ auf M_0, folgt daraus durch Integration über die Zeit, daß einerseits

$$\sup_{[0,T)}\int_{A_t(k)} v^2 d\mu \leq \sigma p \int_0^T \int_{A_t(k)} H^2 f_\sigma^p\, d\mu \tag{8.12}$$

und andererseits

$$\int_0^T \int_{A_t(k)} |\nabla v|^2 \leq \sigma p \int_0^T \int_{A_t(k)} H^2 f_\sigma^p\, d\mu. \tag{8.13}$$

Da $supp\, v \subseteq A_t(k)$, folgt aus Lemma 8.12 und der Hölder-Ungleichung

$$\left(\int_{A_t(k)} v^{2q}\, d\mu\right)^{1/q} \leq c_n \int_{A_t(k)} |\nabla v|^2\, d\mu + c_n \left(\int_{A_t(k)} H^n\, d\mu\right)^{2/n} \left(\int_{A_t(k)} v^{2q}\, d\mu\right)^{1/q}$$

für

$$q = \begin{cases} n/(n-2), & n > 2, \\ \infty, & n = 2. \end{cases}$$

Nach Korollar 8.11 haben wir für ein $p' \geq 2^8\varepsilon^{-6}$ und $\sigma \leq \frac{n}{16}\varepsilon^3 p'^{-1/2}$

$$\left(\int_{A_t(k)} H^n\, d\mu\right)^{2/n} \leq k^{-2p'/n}\left(\int_{A_t(k)} H^n f_\sigma^{p'}\, d\mu\right)^{2/n} \leq k^{-2p'/n} C_1^{2p'/n},$$

also $c_n \left(\int_{A_t(k)} H^n\, d\mu\right)^{2/n} \leq 1/2$ für $k \geq k_1 = k_1(k_0, C_1, n)$. Damit ist

$$\left(\int_{A_t(k)} v^{2q}\, d\mu\right)^{1/q} \leq 2c_n \int_{A_t(k)} |\nabla v|^2\, d\mu. \tag{8.14}$$

Und da nach der Hölder-Ungleichung für $q_0 = 2 - (1/q)$

$$\int_{A_t(k)} v^{2q_0}\, d\mu \leq \left(\int_{A_t(k)} v^{2q}\, d\mu\right)^{1/q} \left(\int_{A_t(k)} v^2\, d\mu\right)^{1-1/q},$$

folgt daraus mit den Ungleichungen (8.12) und (8.13):

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^T \int_{A_t(k)} v^{2q_0} d\mu\, dt\right)^{1/q_0} &\leq \left(\int_0^T \left(\int_{A_t(k)} v^{2q} d\mu\right)^{1/q} \left(\int_{A_t(k)} v^2 d\mu\right)^{1-1/q} dt\right)^{1/q_0} \\
&\leq \left(\sup_{[0,T)} \int_{A_t(k)} v^2\, d\mu\right)^{1-1/q_0} \left(\int_0^T \left(\int_{A_t(k)} v^{2q} d\mu\right)^{1/q} dt\right)^{1/q_0} \\
&\leq c_n' \sigma p \int_0^T \int_{A_t(k)} H^2 f_\sigma^p d\mu\, dt
\end{aligned}$$

mit $c_n' = (2c_n)^{1/q_0}$. Also gilt mit

$$\|A(k)\| := \int_0^T \int_{A_t(k)} d\mu\, dt$$

nach der Hölder-Ungleichung für $r > 1$

$$\left(\int_0^T \int_{A_t(k)} v^{2q_0} d\mu\, dt\right)^{1/q_0} \leq c_n' \sigma p \|A(k)\|^{1-1/r} \left(\int_0^T \int_{A_t(k)} H^{2r} f_\sigma^{pr} d\mu\, dt\right)^{1/r}.$$

Damit gilt andererseits (wiederum nach der Hölder-Ungleichung)

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{A_t(k)} v^2 d\mu\, dt &\leq \|A(k)\|^{1-1/q_0} \left(\int_0^T \int_{A_t(k)} v^{2q_0} d\mu\, dt\right)^{1/q_0} \\
&\leq c_n' \sigma p \|A(k)\|^{2-1/q_0-1/r} \left(\int_0^T \int_{A_t(k)} H^{2r} f_\sigma^{pr} d\mu\, dt\right)^{1/r} \quad (8.15)
\end{aligned}$$

Ist nun $h > k$, so ist $f_{\sigma,k} \geq f_{\sigma,h}$ und $A_t(h) \subseteq A_t(k)$, somit

$$|h-k|^p \|A(h)\| = \int_0^T \int_{A_t(h)} (f_{\sigma,k} - f_{\sigma,h})^p d\mu\, dt \leq \int_0^T \int_{A_t(k)} f_{\sigma,k}^p d\mu\, dt.$$

Setzen wir dann voraus, daß

$$pr \geq \left(\frac{2r}{n}\right)^2 2^8 \varepsilon^{-6}, \qquad \sigma \leq \frac{n}{16}\varepsilon^3 (pr)^{-1/2},$$

so folgt mit Ungleichung (8.15) und Korollar 8.11 für $h > k \geq k_1$

$$|h-k|^p \|A(h)\| \leq C_2 \|A(k)\|^\gamma$$

mit $C_2 = c_n' \sigma p \cdot C_1^p T^{1/r} < \infty$ und $\gamma = 2 - 1/q_0 - 1/r$. Ist dann $\|A(h)\| \neq 0$, so gilt nach dieser Ungleichung mit $k = k_1$ und $d = 2\, C_2^{1/p} \|A(k_1)\|^{(\gamma-1)/p}$ für genügend große p:

$$|h - k_1| \leq \frac{1}{2}\, d \cdot \left(\frac{\|A(k_1)\|}{\|A(h)\|}\right)^{1/p} \; < \; d,$$

da $0 < \|A(h)\| \leq \|A(k_1)\| < \infty$. Daher ist $\|A(h)\| = 0$ für $h \geq k_1 + d$ und somit $\mu(A_t(k_2)) = 0$ für $k_2 = k_1 + d$ und alle $t \in [0,T]$, das heißt es gilt

$$f_\sigma \leq k_2 \qquad \text{auf ganz } M^n \times [0,T).$$

Damit ist das große Theorem dieses Abschnittes (Thm 8.6) bewiesen. □

8.1.3 Eine obere Schranke für $|\nabla H|$

Zwar können wir nicht sagen, daß der Gradient der mittleren Krümmung beim mittleren Krümmungsfluß allgemein beschränkt bleibt, wohl aber können wir $|\nabla H|$ durch H selber nach oben abschätzen und zwar wie folgt:

Theorem 8.13 *Für jedes $\eta > 0$ gibt es eine Konstante $C(\eta, M_0, n)$, so daß*

$$|\nabla H|^2 \leq \eta H^4 + C(\eta, M_0, n).$$

Für den Beweis brauchen wir die im folgenden genannten Lemmas.

Lemma 8.14 *Wir haben die Evolutionsgleichung*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}|\nabla H|^2 &= \triangle |\nabla H|^2 - 2|\nabla^2 H|^2 + 2|A|^2 |\nabla H|^2 \\ &\quad + 2\langle \nabla_i H \cdot h_{jk}, \nabla_j H \cdot h_{ik}\rangle + 2H\langle \nabla_i H, \nabla_i |A|^2\rangle. \end{aligned}$$

Beweis: siehe [Hu1], Lemma 6.2.

Korollar 8.15 *Aus dem vorigen Lemma folgt sofort:*

$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla H|^2 \leq \triangle|\nabla H|^2 - 2|\nabla^2 H|^2 + 4|A|^2|\nabla H|^2 + 2H\langle\nabla_i H, \nabla_i |A|^2\rangle.$$

Lemma 8.16 *Es gilt die Ungleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\nabla H|^2}{H}\right) \leq \triangle\left(\frac{|\nabla H|^2}{H}\right) + 3|A|^2\left(\frac{|\nabla H|^2}{H}\right) + 2\langle\nabla_i H, \nabla_i |A|^2\rangle.$$

Beweis: Mit dem obigen Korollar und der Evolutionsgleichung (2.3) können wir errechnen, daß

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\nabla H|^2}{H}\right) &\leq \frac{H\triangle|\nabla H|^2 - |\nabla H|^2\triangle H}{H^2} - \frac{2}{H}|\nabla^2 H|^2 \\ &\quad +3|A|^2\left(\frac{|\nabla H|^2}{H}\right) + 2\langle\nabla_i H, \nabla_i |A|^2\rangle.\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}\triangle\left(\frac{|\nabla H|^2}{H}\right) &= \frac{H\triangle|\nabla H|^2 - |\nabla H|^2\triangle H}{H^2} + \frac{2}{H^3}|\nabla H|^4 \\ &\quad -\frac{4}{H^2}\langle\nabla_i\nabla_j H, \nabla_i H\nabla_j H\rangle.\end{aligned}$$

Da $2(|\nabla H|^2 - H|\nabla^2 H|)^2/H^3 \geq 0$, folgt mit der Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\frac{2}{H^3}|\nabla H|^4 - \frac{4}{H^2}\langle\nabla_i\nabla_j H, \nabla_i H\nabla_j H\rangle, &\geq \frac{2}{H^3}|\nabla H|^4 - \frac{4}{H^2}|\nabla^2 H||\nabla H|^2 \\ &\geq -\frac{2}{H}|\nabla^2 H|^2,\end{aligned}$$

so daß

$$\triangle\left(\frac{|\nabla H|^2}{H}\right) \geq \frac{H\triangle|\nabla H|^2 - |\nabla H|^2\triangle H}{H^2} - \frac{2}{H}|\nabla^2 H|^2,$$

woraus schließlich die Behauptung folgt. $\square$

Lemma 8.17 *Wir haben die Evolutionsgleichungen*

(i) $\frac{\partial}{\partial t} H^3 = \triangle H^3 - 6H|\nabla H|^2 + 3|A|^2 H^3$

(ii) $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(|A|^2 - \frac{1}{n}H^2\right)H\right) \leq \triangle\left(\left(|A|^2 - \frac{1}{n}H^2\right)H\right) - \frac{2(n-1)}{3n}H|\nabla A|^2 + C_3|\nabla A|^2 + 3|A|^2 H\left(|A|^2 - \frac{1}{n}H^2\right),$$

mit einer Konstanten C_3, die nur von n, C_0 und δ, also letzten Endes nur von M_0 abhängt.

Beweis: Die Gleichung (i) folgt sofort aus der Evolutionsgleichung (2.3). Für die Ungleichung (ii) folgt aus dem Lemma 8.5

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(|A|^2 - \frac{1}{n}H^2\right)H\right) = \triangle\left(\left(|A|^2 - \frac{1}{n}H^2\right)H\right) - 2\left\langle \nabla_i\left(|A|^2 - \frac{1}{n}H^2\right), \nabla_i H\right\rangle - 2H\left(|\nabla A|^2 - \frac{1}{n}|\nabla H|^2\right) + 3|A|^2 H\left(|A|^2 - \frac{1}{n}H^2\right).$$

Nach Theorem 8.6 gilt für $h^0_{ij} = h_{ij} - \frac{H}{n}g_{ij}$

$$|h^0_{ij}|^2 = |A|^2 - \frac{1}{n}H^2 \leq C_0 H^{2-\delta},$$

so daß mit $0 \leq |\nabla_k h^0_{ij}|^2 = |\nabla A|^2 - \frac{1}{n}|\nabla H|^2 \leq |\nabla A|^2$ folgt

$$\begin{aligned} 2\left|\left\langle \nabla_i\left(|A|^2 - \frac{1}{n}H^2\right), \nabla_i H\right\rangle\right| &= 4|\langle h^0_{ij}\nabla_k H, \nabla_k h^0_{ij}\rangle| \\ &\leq 4|h^0_{ij}||\nabla H||\nabla A| \\ &\leq 4\sqrt{nC_0}H^{1-\delta/2}|\nabla A|^2. \end{aligned} \tag{8.16}$$

Den letzten Term können wir nun weiter abschätzen. Dazu betrachten wir für ein $a > 0$ die Funktion $f(s) = a - a^{1-s} + s,\ s \in \mathbb{R}$. Durch Kurvendiskussion finden wir heraus, daß $f \geq 0$ auf $[0, 1]$. Da nach Voraussetzung überall $H > 0$, folgt daraus, daß $\eta H - (\eta H)^{1-\delta/2} + \delta/2 \geq 0$ für jedes $\eta > 0$ und $0 \leq \delta \leq 2$; dies ist äquivalent zu

$$H^{1-\delta/2} \leq \eta^{\delta/2} H + \eta^{\delta/2-1}\,\delta/2. \tag{8.17}$$

Wählen wir dann η so, daß $4\sqrt{nC_0}\eta^{\delta/2} = 2(n-1)/(3n)$, so folgt aus (8.16)

$$2\left|\left\langle\nabla_i\left(|A|^2-\frac{1}{n}H^2\right),\nabla_i H\right\rangle\right| \leq \frac{2(n-1)}{3n}H|\nabla A|^2 + C(n,C_0,\delta)|\nabla A|^2$$

mit einer nur von n, C_0 und δ abhängigen Konstanten $C(n,C_0,\delta)\geq 0$. Da nach Lemma 8.2

$$-2H\left(|\nabla A|^2-\frac{1}{n}|\nabla H|^2\right)\leq -\frac{4(n-1)}{3n}H|\nabla A|^2,$$

folgt daraus mit obiger Evolutionsgleichung für $C_3 = C(n,C_0,\delta)$ die behauptete Ungleichung. $\square$

Beweis des Theorems 8.13: Um nun das Haupttheorem dieses Abschnittes zu beweisen, versuchen wir zunächst für die Funktion

$$f=\frac{|\nabla H|^2}{H}+N\left(|A|^2-\frac{1}{n}H^2\right)H+NC_3|A|^2-\eta H^3,$$

für ein genügend großes N, das nur von n und η abhängt, eine obere Schranke zu finden. Aus Lemma 8.16 und 8.17 und der Evolutionsgleichung für $|A|^2$ (2.4) erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} \leq\ & \triangle f+3|A|^2\left(\frac{|\nabla H|^2}{H}\right)+2\langle\nabla_i H,\nabla_i|A|^2\rangle \\ & -N\frac{2(n-1)}{3n}H|\nabla A|^2-NC_3|\nabla A|^2+3N|A|^2H\left(|A|^2-\frac{1}{n}H^2\right) \\ & +2NC_3|A|^4+6\eta H|\nabla H|^2-3\eta|A|^2H^3.\end{aligned}$$

Da $\langle\nabla_i H,\nabla_i|A|^2\rangle = 2\langle h_{ij}\nabla_k H,\nabla_k h_{ij}\rangle \leq 2|A||\nabla H||\nabla A|$ und $|A|^2\leq H^2$, $|\nabla H|^2\leq n|\nabla A|^2$ können wir eine Teilsumme nach oben hin abschätzen, und zwar gilt für eine nur von n und η abhängige Konstante $C(n,\eta)$

$$3|A|^2\left(\frac{|\nabla H|^2}{H}\right)+2\langle\nabla_i H,\nabla_i|A|^2\rangle+6\eta H|\nabla H|^2\leq C(n,\eta)H|\nabla A|^2.$$

Da nach Voraussetzung $n\geq 2$, können wir N so groß wählen, daß

$$\frac{\partial f}{\partial t}\leq\triangle f+3NH^3\left(|A|^2-\frac{1}{n}H^2\right)+2NC_3H^4-\frac{3}{n}\eta H^5, \tag{8.18}$$

wobei wir die Ungleichung $(1/n)H^2 \leq |A|^2 \leq H^2$ verwendet haben.
Aus Theorem 8.6 folgt

$$3NH^3\left(|A|^2 - \frac{1}{n}H^2\right) + 2NC_3H^4 \leq 3N\cdot\max\{C_0, C_3\}\cdot(H^{5-\delta} + H^4).$$

Ganz ähnlich wie wir oben Ungleichung (8.17) bewiesen haben, können wir zeigen, daß

$$H^{5-\delta} \leq \eta'^{\delta}H^5 + \eta'^{\delta-5}\delta$$

für alle $\eta' > 0$ und $0 \leq \delta \leq 5$. Damit erhalten wir wegen $H^4 \leq H^{5-\delta} + 1$ für $0 \leq \delta \leq 1$:

$$H^{5-\delta} + H^4 \leq 2\eta'^{\delta}H^5 + 2\eta'^{\delta-5}\delta + 1.$$

Wählen wir $\eta' > 0$ so, daß

$$\frac{3}{n}\eta = 3N\cdot\max\{C_0, C_3\}\cdot 2\eta'^{\delta},$$

so hängt η' nur von η, δ, n, C_0 und C_3 ab, also im Grunde nur von η und M_0, so daß

$$3NH^3\left(|A|^2 - \frac{1}{n}H^2\right) + 2NC_3H^4 \;\leq\; \frac{3}{n}\eta H^5 + C(\eta, M_0)$$

und aus der Ungleichung (8.18) folgt, daß

$$\partial f/\partial t \leq \triangle f + C(\eta, M_0).$$

So gilt nach dem Maximumlemma 2.1:

$$\frac{\partial}{\partial t}\max_{M_t} f \leq C(\eta, M_0) \qquad \Rightarrow \qquad \max_{M_t} f \;\leq\; \max_{M_0} f \;+\; C(\eta, M_0)\cdot t.$$

Also ist $f \leq max_{M_0} f + C(\eta, M_0)T =: C'(\eta, M_0)$. Da für jede Konstante $C \geq 0$ die Ungleichung $H^4 + CH \leq 2H^4 + C + C^2$ gilt, folgt schließlich aus der Definition von f:

$$|\nabla H|^2 \leq \eta H^4 + C'(\eta, M_0)H \leq 2\eta H^4 + C''(\eta, M_0).$$

Da $\eta > 0$ beliebig ist, entspricht dies der Behauptung in Theorem 8.13. □

8.1.4 Konvergenz zu einem Punkt

In diesem Abschnitt wollen wir nun endgültig die Konvergenz von M_t zu einem Punkt $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{n+1}$ beweisen. Dazu brauchen wir folgendes Theorem:

Theorem 8.18 *Für $t \to T$ haben wir $H_{max}/H_{min} \to 1$.*

Um dies zu beweisen, sei zunächst Myers Theorem zitiert.

Theorem 8.19 (Myers) *Gilt entlang einer Geodäte von mindestens $\pi K^{-1/2}$ Länge die Ungleichung $R_{ij} \geq (n-1)Kg_{ij}$, so hat die Geodäte konjugierte Punkte; eine minimierende Geodäte, auf der diese Ungleichung gilt, ist also höchstens $\pi K^{-1/2}$ lang.*

Beweis: siehe [P], Theorem 1.2, §9.1.

Außerdem brauchen wir

Lemma 8.20 *Mit ε aus Ungleichung (8.3) gilt auf ganz $M^n \times [0, T)$*

$$R_{ij} \geq (n-1)\,\varepsilon^2 H^2 g_{ij}.$$

Beweis: Wir können an jedem Punkt $p \in M^n$ eine solche Koordinatentransformation durchführen, daß $g_{ij} = \delta_{ij}$ und zugleich $h_{ij} = \delta_{ij}\kappa_i$. Dann gilt $\kappa_p \geq \varepsilon H$ für jedes $1 \leq p \leq n$ (Lemma 8.3) und somit wegen $H = \sum_{p=1}^n \kappa_p$

$$R_{ij} = Hh_{ij} - h_{ik}g^{kl}h_{lj} = (H-\kappa_i)\kappa_i\delta_{ij} \geq (n-1)\varepsilon^2 H^2 g_{ij}. \qquad \square$$

Beweis des Theorems 8.18: Nach Theorem 8.13 gibt es zu jedem $\eta > 0$ eine Konstante $C(\eta)$ mit $|\nabla H| \leq \frac{1}{2}\eta^2 H^2 + C(\eta)$ auf $M^n \times [0, T)$. Da $H_{\max}(t) \to \infty$ für $t \to T$ (Theorem 3.5), gibt es ein $\theta \in [0, T)$ mit $C(\eta) \leq \frac{1}{8}\eta^2 H^2_{\max}(\theta)$. Dann ist

$$\max_{M_\theta} |\nabla H| \leq \eta^2 H^2_{\max}(\theta). \tag{8.19}$$

Sei nun $\mathbf{x}$ ein Punkt auf M_θ, wo H sein Maximum annimmt. Aufgrund der Beschränkung des Gradienten von H haben wir entlang einer Geodäte auf M_θ, die von $\mathbf{x}$ ausgeht und höchstens $\eta^{-1}H_{\max}(\theta)^{-1}$ lang ist, die Abschätzung

$H \geq (1-\eta)H_{\max}(\theta)$. Nach Lemma 8.20 können wir Myer's Theorem 8.19 anwenden, indem wir $K := \varepsilon^2(1-\eta)^2 H_{\max}^2(\theta)$ setzen. Demnach ist eine minimierende Geodäte, die von $\mathbf{x}$ ausgeht und an einem Punkt $\mathbf{y} \in M_\theta$ endet, wo H sein Minimum annimmt, nicht länger als $\pi K^{-1/2}$, also für genügend kleine η auch nicht länger als $\eta^{-1}H_{\max}^{-1}(\theta)$, so daß

$$H_{\min}(\theta) \geq (1-\eta)H_{\max}(\theta). \tag{8.20}$$

Da θ von η abhängt, können wir hier nicht einfach η gegen Null gehen lassen. Wir brauchen noch eine Zusatz-Überlegung:
Nach der Evolutionsgleichung (2.3) und dem Maximumlemma 2.1 gilt auf ganz $[0, T)$

$$\frac{\partial}{\partial t} H_{\min} \geq \min_{M_t}(|A|^2 H) \geq 0,$$

das heißt $H_{\min}(t)$ ist mit der Zeit t monoton wachsend. Somit folgt mit der Ungleichung (8.20) für $\eta \leq \frac{1}{2}$

$$H_{\max}(t) \geq H_{\min}(t) \geq H_{\min}(\theta) \geq \frac{1}{2} H_{\max}(\theta)$$

für alle $t \in [\theta, T)$. Daher ist mit demselben η wie oben $C(\eta) \leq \frac{1}{2}\eta^2 H_{\max}^2(t)$, so daß die Ungleichung (8.19) auch für alle $t \in [\theta, T)$ gilt. Daraus folgt, daß auch die zweite Ungleichung (8.20) für alle $t \in [\theta, T)$ gilt. Nun können wir η gegen Null gehen lassen, womit Theorem 8.18 bewiesen ist. □

Korollar 8.21 *Für $t \to T$ haben wir $|A|^2/H^2 \to 1/n$.*

Beweis: Da nach Theorem 8.18 auch $H_{\min}(t) \to \infty$ und somit überall $H \to \infty$ für $t \to T$, folgt dies sofort aus Theorem 8.6. □

Für eine weitere Folgerung aus Theorem 8.18, die wir im nächsten Abschnitt anwenden werden, brauchen wir

Lemma 8.22 *Es gilt $\int_0^T H_{\max}^2(\tau) d\tau = \infty$.*

Beweis: Da $H_{\max}^2$ stetig in t ist, haben wir eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{\partial g}{\partial t} = H_{\max}^2 g, \qquad g(0) = H_{\max}(0).$$

Weiterhin haben wir nach der Evolutionsgleichung (2.14) wegen $|A|^2 \leq H^2$

$$\frac{\partial}{\partial t} H \leq \triangle H + H_{\max}^2 H,$$

und daher

$$\frac{\partial}{\partial t}(H-g) \leq \triangle(H-g) + H_{\max}^2(H-g).$$

So erhalten wir mit dem Maximumprinzip 2.2, daß $H \leq g$ und somit $g \to \infty$ für $t \to T$. Damit aber haben wir

$$\int_0^t H_{\max}^2(\tau)d\tau = \ln\left(\frac{g(t)}{g(0)}\right) \to \infty \qquad \text{für } t \to T,$$

womit das Lemma bewiesen ist. □

Korollar 8.23 *Mit* $h(t) = \int_{M_t} H^2\, d\mu \Big/ \int_{M_t} d\mu$ *gilt*

$$\int_0^T h(\tau)d\tau = \infty.$$

Beweis: Nach Theorem 8.18 gibt es ein $t_0 \in [0, T)$, so daß $H_{\max}/H_{\min} \leq 2$ für alle $t \in [t_0, T)$. Also folgt mit dem vorigen Lemma

$$\int_0^T H_{\min}^2(\tau)d\tau \geq \int_{t_0}^T H_{\min}^2(\tau)d\tau \geq \frac{1}{4}\int_{t_0}^T H_{\max}^2(\tau)d\tau = \infty.$$

Wegen $h \geq H_{\min}^2$ folgt daraus die Behauptung. □

Beweis des Theorems 8.1: Da nach Ungleichung (2.5) die mittlere Krümmung überall und zu jeder Zeit strikt positiv ist, zeigen alle mittlere Krümmungsvektoren $-H\nu$ auf M_t nach innen, so daß für $t_2 > t_1$ offensichtlich die Fläche M_{t_2} in einem Gebiet des $\mathbb{R}^{n+1}$ liegt, das von M_{t_1} umschlossen wird. Nach Korollar 8.21 nähern sich die Flächen M_t für $t \to T$ einer Sphäre an, deren Durchmesser aber wegen $H \to \infty$ verschwindet. Damit ist das erste Theorem dieses Kapitels bewiesen. □

8.2 Der reskalierte Fluß

In Abschnitt 4.3 haben wir bereits die Reskalierungstechnik vorgestellt, die wir im Fall konvexer Anfangsflächen verwenden wollen. Demnach multiplizieren wir die Parametrisierung einer jeden Fläche M_t mit einem solchen Faktor ψ(t), daß der Flächeninhalt einer jeden reskalierten Fläche $\tilde{M}_t$ konstant gleich dem Flächeninhalt von M_0 ist. Dabei nehmen wir O.B.d.A. an, daß der Punkt $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{n+1}$, zu dem die nicht reskalierten Flächen M_t konvergieren, der Ursprung ist (ansonsten betrachten wir statt M_t die Fläche, die durch die Parametrisierung $F(\,\cdot\,,t) - \mathcal{O}$ gegeben ist) – diese Voraussetzung brauchten wir für den Beweis des Theorems 4.7, den wir in Abschnitt 4.3 bereits vorweggenommen haben. Wir haben also $\tilde{M}_t$ gegeben durch

$$\tilde{F}(\,\cdot\,,t) = \psi(t) \cdot F(\,\cdot\,,t)$$

mit

$$\int_{\tilde{M}_t} d\tilde{\mu} = |M_0| \qquad \text{für } 0 \leq t < T. \tag{8.21}$$

Damit gelten die Gleichungen

$$\begin{array}{rclrclrcl} \tilde{g}_{ij} &=& \psi^2 g_{ij}, & \tilde{h}_{ij} &=& \psi h_{ij}, & \tilde{H} &=& \psi^{-1} H, \\ |\tilde{A}|^2 &=& \psi^{-2}|A|^2, & d\tilde{\mu}_t &=& \psi^n d\mu_t, & \tilde{h} &=& \psi^{-2} h, \end{array} \tag{8.22}$$

wobei h wie in Korollar 8.23 definiert ist, entsprechend $\tilde{h} = \int \tilde{H}^2 d\tilde{\mu} \,/ \int d\tilde{\mu}$. Daraus folgen mit der neuen Zeitvariablen

$$s(t) = \int_0^t \psi^2(\tau) d\tau$$

sofort die dem Lemma 8.3, dem Theorem 8.18 und dem Korollar 8.21 entsprechenden Sätze:

Korollar 8.24 *Für den reskalierten Fluß haben wir mit* $S = \int_0^T \psi^2(\tau) d\tau$

(*i*) $\tilde{h}_{ij} \geq \varepsilon \tilde{H} \tilde{g}_{ij}\,;$

(*ii*) $\tilde{H}_{max}/\tilde{H}_{min} \to 1 \qquad$ *für* $s \to S\,;$

(*iii*) $\dfrac{|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^2} \to \dfrac{1}{n} \qquad$ *für* $s \to S\,.$ □

Damit sind alle Voraussetzungen für den in Abschnitt 4.3 vorweggenommenen Beweis des Theorems 4.7 erfüllt, so daß dieser endlich vollständig ist.

Um nun eine Evolutionsgleichung für $\tilde{F}$ zu finden, leiten wir zuerst Gleichung (8.21) nach der Zeit ab und erhalten mit (8.22) und Korollar 2.12

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tilde{M}_t} d\tilde{\mu} = \left(\frac{\partial \psi^n}{\partial t} \right) \int_{M_t} d\mu - \psi^n \int_{M_t} H^2 \, d\mu,$$

somit

$$\psi^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{n} \frac{\int_{M_t} H^2 \, d\mu}{\int_{M_t} d\mu} = \frac{1}{n} h. \tag{8.23}$$

Für die wie oben definierte neue Zeitvariable s gilt $ds/dt = \psi^2$, woraus wir zusammen mit (8.22) und (8.23) die Evolutionsgleichung des reskalierten Flusses auf einem Zeitintervall $[0, S)$ mit $S = \int_0^T \psi^2(\tau) d\tau$ erhalten, nämlich

$$\frac{\partial}{\partial s} \tilde{F} = -\tilde{H} \tilde{\nu} + \frac{1}{n} \tilde{h} \tilde{F}. \tag{8.24}$$

Damit geht es in diesem Abschnitt vor allem um den Beweis des folgenden Theorems:

Theorem 8.25 *Die reskalierte Gleichung (8.24) hat eine glatte Lösung $\tilde{M}_s$ für alle Zeiten $0 \leq s < \infty$. Für $s \to \infty$ konvergieren die Flächen $\tilde{M}_s$ in der C^∞-Topologie gegen eine Sphäre mit Flächeninhalt $|M_0|$.*

Für den ersten Teil des Theorems müssen wir nur zeigen, daß

Lemma 8.26 $S = \infty$.

Beweis: Aus $ds/dt = \psi^2$, $\tilde{H}^2 = \psi^{-2} H^2$, $\tilde{h} = \psi^{-2} h$ und dem Korollar 8.23 folgt mit der Transformationsformel

$$\int_0^S \tilde{h}(\sigma) d\sigma = \int_0^T h(\tau) d\tau = \infty.$$

Da aber nach Theorem 4.7 $\tilde{h} \leq \tilde{H}^2_{\max} \leq C^2_\beta < \infty$ auf $[0, S)$, ist $S = \infty$. □

Es bleibt uns noch, den zweiten Teil des obigen Theorems zu beweisen. Zunächst einmal: Nach Theorem 4.7 ist die mittlere Krümmung von

$\tilde{M}_s$ nach unten hin gleichmäßig beschränkt; das impliziert eine obere Schranke des inneren Durchmessers aller $\tilde{M}_s$, denn nach Korollar 8.24(i) gilt $\tilde{R}_{ij} \geq (n-1)\varepsilon^2 \tilde{H}^2 \tilde{g}_{ij}$, so daß mit Myer's Theorem 8.19 folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}_{\tilde{M}_s} &= \sup\{L(\gamma) \,|\, \gamma \text{ ist minimierende Geodäte auf } \tilde{M}_s\} \\ &\leq \frac{\pi}{\varepsilon \tilde{H}_{\min}(s)} \leq \frac{\pi}{\varepsilon C_\alpha}. \end{aligned} \tag{8.25}$$

Also liegen alle $\tilde{M}_s$ in einem begrenzten Gebiet um $\mathcal{O}$. Weiterhin können wir sie nach Korollar 8.24 zwischen zwei beliebig dicht beieinander liegenden Sphären, einer inneren und einer äußeren, zwängen, wenn s groß genug ist. Damit haben wir schon in schwacher Weise die Konvergenz zu einer Sphäre bewiesen. Es bleibt noch zu zeigen, daß auch die Metriken glatt gegen die Metrik einer Sphäre konvergieren, das heißt, daß die „Grenzfläche" tatsächlich eine glatte Mannigfaltigkeit darstellt. Dazu zeigen wir, daß die Konvergenz von $\tilde{M}_s$ in gewisser Weise exponentiell ist. Und zwar haben wir zunächst

Lemma 8.27 *Es gibt Konstanten $\delta > 0$ und $C < \infty$, so daß*

$$\int_{\tilde{M}_s} \left(|\tilde{A}|^2 - \frac{1}{n}\tilde{H}^2 \right) d\tilde{\mu} \leq C e^{-\delta s}.$$

Beweis: Sei $\tilde{f} := |\tilde{A}|^2/\tilde{H}^2 - 1/n$. Diese Funktion entspricht der in Abschnitt 8.1.2 definierten Funktion f_σ für $\sigma = 0$. Wie im Beweis von Lemma 8.10 erhalten wir für $p \geq 100\varepsilon^{-2} \geq 2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \int \tilde{f}^p d\tilde{\mu} \leq\ & -\frac{1}{2}\varepsilon^2 p \int \frac{\tilde{f}^{p-1}}{\tilde{H}^2} |\nabla \tilde{H}|^2 d\tilde{\mu} - \frac{1}{2} p(p-1) \int \tilde{f}^{p-2} |\nabla \tilde{f}|^2 d\tilde{\mu} \\ & + \int \tilde{f}^p (\tilde{h} - \tilde{H}^2) d\tilde{\mu}; \end{aligned}$$

letzterer Term kommt von $\frac{\partial}{\partial s} d\tilde{\mu} = (\tilde{h} - \tilde{H}^2) d\tilde{\mu}$, was sich mit (8.22) und (8.23) leicht nachrechnen läßt. Mit $\eta = 2/p$ gilt $-\frac{1}{2}p(p-1) = -\eta^{-1}(p-1)$ und $-\frac{1}{2}\varepsilon^2 p \leq -50 \leq -(2\eta p + 5)$. Daher folgt aus dem Lemma 8.9, das ganz entsprechend auch für die reskalierten Größen $\tilde{f}$, $\tilde{H}$, $d\tilde{\mu}$ gilt, daß

$$\frac{\partial}{\partial s} \int \tilde{f}^p d\tilde{\mu} \leq -n\varepsilon^2 \int \tilde{f}^p \tilde{H}^2 d\tilde{\mu} + \int \tilde{f}^p (\tilde{h} - \tilde{H}^2) d\tilde{\mu}.$$

Da $\tilde{H}^2_{\min} \leq \tilde{h} \leq \tilde{H}^2_{\max}$ folgt aus Korollar 8.24(ii), daß $\tilde{h} - \tilde{H}^2 \to 0$ für $s \to \infty$; nach Theorem 4.7 ist $-\tilde{H}^2 \leq -C^2_\alpha < 0$. So gibt es für alle s, die größer als ein bestimmtes $s_0 \geq 0$ sind, ein $\delta > 0$ mit

$$\frac{\partial}{\partial s} \int \tilde{f}^p d\tilde{\mu} \leq -\delta \int \tilde{f}^p d\tilde{\mu},$$

so daß nach der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\int \tilde{f}^p d\tilde{\mu} \leq C e^{-\delta s}.$$

Zwar gilt diese Ungleichung zunächst nur für alle $s \geq s_0$, da jedoch das eben abgeschätzte Integral stetig in s ist, läßt sich eine so große Konstante C finden, daß diese Ungleichung für *alle* $s \geq 0$ gilt. Mit Theorem 4.7, der Hölder-Ungleichung und $|\tilde{M}_s| = |M_0|$ folgt daraus schließlich

$$\begin{aligned} \int \left(|\tilde{A}|^2 - \frac{1}{n}\tilde{H}^2 \right) d\tilde{\mu} = \int \tilde{f}\tilde{H}^2 d\tilde{\mu} &\leq C^2_\beta \left(\int \tilde{f}^p d\tilde{\mu} \right)^{1/p} \left(\int d\tilde{\mu} \right)^{1-1/p} \\ &\leq C' e^{-\delta' s} \qquad \Box \end{aligned}$$

Aus $|\tilde{\nabla}^m \tilde{A}|^2 = \psi^{-2(m+1)} |\nabla^m A|^2$ errechnen wir mit Lemma 3.2

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} |\tilde{\nabla}^m \tilde{A}|^2 &= \tilde{\triangle} |\tilde{\nabla}^m \tilde{A}|^2 - 2|\tilde{\nabla}^{m+1}\tilde{A}|^2 + \sum_{i+j+k=m} \tilde{\nabla}^i \tilde{A} * \tilde{\nabla}^j \tilde{A} * \tilde{\nabla}^k \tilde{A} * \tilde{\nabla}^m \tilde{A} \\ &\quad - \frac{2(m+1)}{n} \tilde{h} |\tilde{\nabla}^m \tilde{A}|^2. \end{aligned} \tag{8.26}$$

Da der letzte Summand nicht positiv ist und $|\tilde{A}|^2 \leq \tilde{H}^2 \leq C^2_\beta$, können wir daraus genau wie in Lemma 3.3 folgern, daß auch $|\tilde{\nabla}^m \tilde{A}|^2$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ gleichmäßig nach oben beschränkt ist. Damit und mit dem folgenden Hilfssatz können wir das nächste Theorem beweisen.

Hilfssatz 8.28 *Ist T irgendein Tensor auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M, so gibt es für $1 \leq l \leq m-1$ eine nur von n und m abhängige Konstante $C(n,m)$ mit*

(i) $$\int_M |\nabla^l T|^2 \, d\mu \leq C(n,m) \left(\int_M |\nabla^m T|^2 \, d\mu \right)^{l/m} \left(\int_M |T|^2 \, d\mu \right)^{1-l/m}$$

(ii) $$\int_M |\nabla^l T|^{2m/l} \, d\mu \leq C(n,m) \cdot \max_M |T|^{2(m/l-1)} \int_M |\nabla^m T|^2 \, d\mu$$

Beweis: siehe [Ha1], Korollar 12.7 und 12.6.

Theorem 8.29 *Es gibt Konstanten $\delta > 0$ und $C < \infty$, so daß*

$$|\tilde{A}|^2 - \frac{1}{n}\tilde{H}^2 \leq Ce^{-\delta s}.$$

Beweis: Wir bezeichnen wieder mit $\tilde{A}^0$ den spurlosen Anteil der zweiten Fundamentalform $\tilde{A}$, also

$$\tilde{A}^0 = \{\tilde{h}^0_{ij}\} = \left\{\tilde{h}_{ij} - \frac{1}{n}\tilde{H}\tilde{g}_{ij}\right\}.$$

Wie sich leicht nachrechnen läßt, ist damit $|\tilde{\nabla}^m\tilde{A}^0|^2 = |\tilde{\nabla}^m\tilde{A}|^2 - \frac{1}{n}|\tilde{\nabla}^m\tilde{H}|^2$ für alle $m \in \mathbb{N}^0$. Daher ist $|\tilde{\nabla}^m\tilde{A}^0|^2$ wie schon $|\tilde{\nabla}^m\tilde{A}|^2$ für alle $m \in \mathbb{N}^0$ gleichmäßig nach oben beschränkt. So können wir aus dem ersten Teil des vorigen Hilfssatzes (setze dort $l := m$ und $m \rightsquigarrow m+1$) schließen, daß für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\int_{\tilde{M}_s} |\tilde{\nabla}^m\tilde{A}^0|^2\, d\tilde{\mu} \leq C_m \left(\int_{\tilde{M}_s} (|\tilde{A}|^2 - \frac{1}{n}\tilde{H}^2)\, d\tilde{\mu}\right)^{1/(m+1)} \leq C'_m e^{-\delta s}$$

nach Lemma 8.27. Daraus folgt mit dem zweiten Teil des obigen Hilfssatzes (setze dort $l := m$ und $m \rightsquigarrow \frac{pm}{2}$) für $p \cdot m$ gerade und $m \leq \frac{pm}{2} - 1$

$$\int_{\tilde{M}_s} |\tilde{\nabla}^m\tilde{A}^0|^p\, d\tilde{\mu} \leq C_{m,p} \cdot \max_{\tilde{M}_s} |\tilde{A}^0|^{p-2} \int_{\tilde{M}_s} |\tilde{\nabla}^{pm/2}\tilde{A}^0|^2\, d\tilde{\mu} \leq C'_{m,p} e^{-\delta s},$$

wobei $C'_{m,p} = C_{m,p} \cdot C_\beta^{p-2} \cdot C'_{pm/2}$. Da hierbei p und m beliebig groß sein können, folgt aus den Sobolewschen Einbettungssätzen die Behauptung, denn danach gilt für p, m groß genug

$$|\tilde{A}^0| \leq \left(\int_{\tilde{M}_s} |\tilde{\nabla}^m\tilde{A}^0|^p\, d\tilde{\mu}\right)^{1/p} \leq\; C'^{1/p}_{m,p}\, e^{-\delta s/p},$$

womit das Theorem bewiesen ist. □

Damit haben wir nun weitere Abschätzungen:

Korollar 8.30 *Es gibt Konstanten $\delta > 0$ und C, $C_m < \infty$, so daß*
(i) $\max_{\tilde{M}_s} |\tilde{\nabla}^m \tilde{A}|^2 \leq C_m e^{-\delta_m s}$ *für* $m > 0$.
(ii) $\tilde{H}_{\max} - \tilde{H}_{\min} \leq Ce^{-\delta s}$
(iii) $|\tilde{h}_{ij}\tilde{H} - \frac{1}{n}\tilde{h}\tilde{g}_{ij}| \leq Ce^{-\delta s}$

Beweis:(i) Sei zunächst $m = 1$, dann ist zu zeigen, daß

$$\max_{\tilde{M}_s} |\tilde{\nabla}\tilde{A}|^2 \leq C_1 e^{-\delta_1 s}.$$

Mit Lemma 8.5, welches auch für die reskalierten Formen gilt, errechnen wir

$$\frac{\partial}{\partial s}|\tilde{A}^0|^2 = \tilde{\triangle}|\tilde{A}^0|^2 - 2\left(|\tilde{\nabla}\tilde{A}|^2 - \frac{1}{n}|\tilde{\nabla}\tilde{H}|^2\right) + 2|\tilde{A}|^2|\tilde{A}^0|^2 - \frac{2}{n}\tilde{h}|\tilde{A}^0|^2.$$

Daraus folgt mit dem vorigen Theorem und dem Lemma 8.2(ii), welches ebenfalls auch für die reskalierten Formen gilt,

$$\frac{\partial}{\partial s}|\tilde{A}^0|^2 \leq \tilde{\triangle}|\tilde{A}^0|^2 - \frac{4(n-1)}{3n}|\tilde{\nabla}\tilde{A}|^2 + Ce^{-\delta s}.$$

Weiterhin haben wir nach Gleichung (8.26)

$$\frac{\partial}{\partial s}|\tilde{\nabla}\tilde{A}|^2 \leq \tilde{\triangle}|\tilde{\nabla}\tilde{A}|^2 + C'|\tilde{\nabla}\tilde{A}|^2.$$

Bei beiden Abschätzungen haben wir wieder verwendet, daß $|\tilde{A}| \leq C_\beta$. Aus beiden folgt mit $f := |\tilde{\nabla}\tilde{A}|^2 + \frac{3n}{4(n-1)} \cdot (C'+1)|\tilde{A}^0|^2$

$$\frac{\partial}{\partial s}f \leq \tilde{\triangle}f - |\tilde{\nabla}\tilde{A}|^2 + Ce^{-\delta s} \leq \tilde{\triangle}f - f + C''e^{-\delta' s},$$

nach dem vorigen Theorem. Daraus folgt mit dem Maximumlemma 2.1

$$\frac{\partial}{\partial s}\max_{\tilde{M}_s} f \leq -\max_{\tilde{M}_s} f + C''e^{-\delta' s}.$$

Aus dieser gewöhnlichen Differentialungleichung folgt, was zu zeigen war:

$$\max_{\tilde{M}_s} |\tilde{\nabla}\tilde{A}|^2 \leq \max_{\tilde{M}_s} f \leq C_1 e^{-\delta_1 s}.$$

Für $m > 1$ wenden wir nun vollständige Induktion an. Sei also

$$|\tilde{\nabla}^l \tilde{A}|^2 \leq C_l e^{-\delta_l s} \qquad \text{für } 1 \leq l \leq m-1$$

vorausgesetzt. Dann können wir wie im Beweis von Lemma 3.3 folgern, daß mit $g := |\tilde{\nabla}^m \tilde{A}|^2 + \tilde{B}_m |\tilde{\nabla}^{m-1} \tilde{A}|^2$ für eine nur von m abhängige Konstante $\tilde{B}_m > 0$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial s} g \leq \tilde{\triangle} g - \tilde{B}_m |\tilde{\nabla}^m \tilde{A}|^2 + \tilde{B} e^{-\eta s} \leq \tilde{\triangle} g - \tilde{B}_m g + \tilde{B}' e^{-\eta' s}.$$

(Ersetze in den Ungleichungen (3.1) B_{m-1} durch $\tilde{B}_{m-1} e^{-\eta_{m-1} s}$ und B_m durch $\tilde{B}_m e^{-\eta_m s}$ und bedenke, daß $e^{-\eta_m s} \leq 1$; dann gilt obige Ungleichung für $\tilde{B}$, $\eta > 0$ mit $\tilde{B} e^{-\eta s} \geq \tilde{B}_m (\tilde{B}_{m-1} e^{-\eta_{m-1} s} + e^{-\eta_m s})$.) Daraus folgt wieder mit dem Maximumlemma die gewöhnliche Differentialungleichung

$$\frac{\partial}{\partial s} \max_{\tilde{M}_s} g \leq -\tilde{B}_m \max_{\tilde{M}_s} g + \tilde{B}' e^{-\eta' s}$$

und daraus

$$\max_{\tilde{M}_s} |\tilde{\nabla}^m \tilde{A}|^2 \leq \max_{\tilde{M}_s} g \leq C_m e^{-\delta_m s},$$

womit der erste Teil des Korollars bewiesen ist.

(ii) Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \tilde{M}_s$ so, daß $H(\mathbf{x}) = H_{\max}$ und $H(\mathbf{y}) = H_{\min}$ und sei $\gamma : [0,1] \to \tilde{M}_s$ eine minimierende Geodäte mit $\gamma(0) = \mathbf{x}$ und $\gamma(1) = \mathbf{y}$. Dann folgt mit Ungleichung (8.25)

$$\tilde{H}_{\max} - \tilde{H}_{\min} \leq \int_\gamma |\tilde{\nabla} \tilde{H}| d\gamma \leq L(\gamma) \cdot \max_{\tilde{M}_s} |\tilde{\nabla} \tilde{H}| \leq \frac{\pi}{\varepsilon C_\alpha} \cdot \max_{\tilde{M}_s} |\tilde{\nabla} \tilde{H}|.$$

Da nach (i) $\max_{\tilde{M}_s} |\tilde{\nabla} \tilde{H}| \leq n \cdot \max_{\tilde{M}_s} |\tilde{\nabla} \tilde{A}|^2 \leq n C_1 e^{-\delta_1 s}$, folgt daraus die Behauptung (ii).

(iii) Wegen $C_\alpha^2 \leq \tilde{H}_{\min}^2 \leq \tilde{h} \leq \tilde{H}_{\max}^2 \leq C_\beta^2$ gilt

$$\begin{aligned} |\tilde{h}_{ij} \tilde{H} - \frac{1}{n} \tilde{h} \tilde{g}_{ij}|^2 &= |\tilde{A}|^2 \tilde{H}^2 - \frac{2}{n} \tilde{h} \tilde{H}^2 + \frac{\tilde{h}^2}{n} \\ &\leq C_\beta^2 (|\tilde{A}|^2 - \frac{\tilde{H}^2}{n}) + \frac{2}{n} C_\beta^2 (\tilde{H}_{\max}^2 - \tilde{H}_{\min}^2). \end{aligned}$$

Da $\tilde{H}_{\max}^2 - \tilde{H}_{\min}^2 = (\tilde{H}_{\max} + \tilde{H}_{\min})(\tilde{H}_{\max} - \tilde{H}_{\min}) \leq 2C_\beta (\tilde{H}_{\max} - \tilde{H}_{\min})$, folgt daraus mit Theorem 8.29 und Teil (ii) dieses Korollars Teil (iii). $\square$

Beweis des Theorems 8.25: Aus $ds/dt = \psi^2$, den Gleichungen (8.22) und (8.23) und der Evolutionsgleichung (2.2) für g_{ij} folgt sofort die Evolutionsgleichung für die reskalierte Metrik $\tilde{g}_{ij}$, nämlich:

$$\frac{\partial}{\partial s}\tilde{g}_{ij} = \frac{2}{n}\tilde{h}\tilde{g}_{ij} - 2\tilde{H}\tilde{h}_{ij}.$$

Damit haben wir nach Korollar 8.30(iii)

$$\int_0^\infty \max_{\tilde{M}_s} |\frac{\partial}{\partial s}\tilde{g}_{ij}| ds \leq \frac{2C}{\delta} < \infty,$$

so daß nach Lemma 3.4 die Metriken $\tilde{g}_{ij}(s)$ für $s \to \infty$ gleichmäßig gegen eine positiv definite Metrik $\tilde{g}_{ij}(\infty)$ konvergieren. Weiterhin gilt für $m > 0$

$$\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\nabla}^m\tilde{g}_{ij} = -2\tilde{\nabla}^m(\tilde{H}\tilde{h}_{ij}),$$

da $\tilde{h}$ konstant auf $\tilde{M}_s$ und somit $\tilde{\nabla}^m(\tilde{h}\tilde{g}_{ij}) = 0$. Nach Korollar 8.30(i) fällt also auch $|\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\nabla}^m\tilde{g}_{ij}|$ exponentiell ab, so daß die Metriken sogar in der C^∞-Topologie konvergieren und somit $\tilde{g}_{ij}(\infty)$ glatt ist. Schließlich ist $\tilde{g}_{ij}(\infty)$ nach Korollar 8.24 die Metrik einer Sphäre, die wegen $|\tilde{M}_s| \equiv |M_0|$ Flächeninhalt $|M_0|$ hat. Damit ist das Haupttheorem dieses Abschnittes bewiesen. $\square$

Daraus folgt nun, was wir in der Einleitung bereits behauptet haben: Bei konvexer Anfangsfläche M_0 bildet M_t zum Zeitpunkt T eine *TypI*-Singularität aus, da sich M_t dort einer homothetisch-selbstähnlichen Lösung, nämlich einer Sphäre, annähert, womit ausgeschlossen ist, daß die Singularität vom TypII ist.

Literaturverzeichnis

[A] S.Altschuler, *Singularities for the curve shortening flow for space curves*, J.Diff.Geom.34 (1991), 491-514.

[AL] U.Abresch, J.Langer, *The normalized curve shortening flow and homothetic solutions*, J.Diff.Geom.23 (1986), 175-196.

[E] L.C.Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol.19, American Mathematical Society, 1998.

[Gr1] M.Grayson, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J.Diff.Geom.26 (1987), 285-314.

[Gr2] M.Grayson, *Shortening embedded curves*, Annals of Math.129 (1989), 71-111.

[Ha1] R.S.Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci-curvature*, J.Diff.Geom.17 (1982), 255-306.

[Ha2] R.S.Hamilton, *Four-manifolds with positive curvature operator*, J.Diff.Geom.24 (1986), 153-179.

[Ha3] R.S.Hamilton, *Harnack estimate for the mean curvature flow*, J.Diff.Geom.41 (1995), 215-226.

[HS1] G.Huisken, C.Sinestrari, *Mean curvature flow singularities for mean convex surface*, erscheint demnächst in ??

[HS2] G.Huisken, C.Sinestrari, *Convexity estimates for mean curvature flow and singularities of mean convex surfaces*, Preprint ??

[Hu1] G.Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J.Diff.Geom.20 (1984), 237-266.

[Hu2] G.Huisken, *Asymptotic behaviour for singularities of the mean curvature flow*, J.Diff.Geom.31 (1990), 285-299.

[Hu3] G.Huisken, *Local and Global Behaviour of Hypersurfaces Moving by Mean Curvature*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol.54 (1993), Part 1, 175-191.

[Hu4] G.Huisken, *A Distance Comparison Principle for Evolving Curves*, Sonderforschungsbereich 382, Report Nr.70, Tübingen 1997.

[MS] J.H.Michael, L.M.Simon, *Sobolev and Mean-Value Inequalities on Generalized Submanifolds of* $\mathbb{R}^n$, Comm.Pure Appl.Math. 26 (1973), 361 - 379.

[Mu] W.W.Mullins, *Two dimensional Motion of Idealized Grain Boundaries*, J.App.Physics Vol.27 no.8 (1956), 900-904.

[P] P.Petersen, *Riemannian Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 171, Springer New York, 1998.

[PW] M.H.Protter, H.F.Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer New York 1984.