Regularitätsergebnisse für minimale und fast minimale Flächen

DIPLOMARBEIT

vorgelegt von

Felix Schulze

betreut von

Prof. Dr. G. Huisken

Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Mathematische Fakultät

August 1999

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Eine zentrale Fragestellung der Variationsrechnung war seit ihren Anfängen die Suche nach minimalen Flächen, das heißt zu einem vorgegebenen Rand im $\mathbb{R}^n$ diejenige Fläche unter all den Flächen mit diesem Rand zu finden, die den Flächeninhalt minimiert. Für fast ein ganzes Jahrhundert stellte dies ein ungelöstes Problem dar, und erst in den dreißiger Jahren konnten J. Douglas und T. Radò zeigen, dass im dreidimensionalen euklidischen Raum jede glatte Jordankurve eine entsprechende minimierende Fläche berandet. Diese Ergebnisse waren aber nicht auf höhere Dimensionen und Kodimensionen verallgemeinerbar.

Erst in in den sechziger Jahren konnte dieses Problem in seiner vollen Allgemeinheit erfolgreich angegangen werden. Dies wurde unter anderem von F.J. Almgren, H. Federer und W.H. Flemming, E. De Giorgi sowie E. Reifenberg unter Verwendung von maßtheoretischen Methoden erreicht. Ein entscheidender Schritt in diesen Arbeiten war, eine passende 'schwache' Formulierung des Flächenbegriffs zu finden, um dann anhand von Kompaktheitsargumenten eine Lösung des obigen Problems zu erhalten.

Federer und Flemming definieren dabei eine k-dimensionale Fläche im $\mathbb{R}^n$ als einen k-Current, das heißt als ein stetiges lineares Funktional auf k-Formen. In der von Almgren eingenommenen Betrachtungsweise wird eine k-dimensionale Fläche als rektifizierbare k-Varifaltigkeit aufgefasst. Man spricht dabei bei einem Paar (M, θ) von einer rektitizierbaren k-Varifaltigkeit, falls die Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ bezüglich des k-dimensionalen Hausdorffmaßes $\mathcal{H}^k$ messbar und abzählbar n-rektifizierbar ist, sowie θ eine positive, lokal $\mathcal{H}^k$-integrierbare Funktion auf M darstellt. Unter einer abzählbar k-rektifizierbaren Menge B versteht man eine Menge, die bis auf eine $\mathcal{H}^k$-Nullmenge die Vereinigung von abzählbar vielen Bildern von Teilmengen des $\mathbb{R}^k$ unter Lipschitz-stetigen Funktionen ist. Solch eine Menge B zeichnet sich dadurch aus, dass fast überall ein verallgemeinerter Tangentialraum an B existiert, womit eine Form von Differentialgeometrie auf diesen 'Flächen' möglich wird.

De Giorgi beschreibt eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ als den Rand einer meßbaren Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$, deren charakteristische Funktion χ_E von (lokal) beschränkter Variation ist, das heißt, dass die distributionellen Ableitungen von χ_E Radonmaße mit (lokal) beschränkter totaler Variation sind. Man bezeichnet diese Mengen auch als Caccioppoli-

Mengen. Die totale Variation von $D\chi_E$ wird als der entsprechende Flächeninhalt solch einer Hyperfläche aufgefasst.

Da wir uns in dieser Arbeit mit der Regularität von Minimalflächen in dieser Formulierung beschäftigen wollen, sollen nun kurz die weiteren Ergebnisse von De Giorgi skizziert werden.

Anhand von Kompaktheitsaussagen für Funktionen mit beschränkter Variation kann in diesem Rahmen relativ einfach die Existenz einer Lösung für das Minimalflächenproblem gezeigt werden. Daraufhin stellt sich die weitaus schwierigere Frage der Regularität solch einer minimalen 'Hyperfläche'. Als ein zentrales Resultat konnte De Giorgi zeigen, dass diese minimalen 'Hyperflächen' regulär sind bis auf eine abgeschlossene singuläre Menge Σ. Diese Ergebnisse wurden später von M. Miranda vervollständigt und vereinfacht; dabei bewies er unter anderem, dass die singuläre Menge Σ verschwindendes $(n-1)$-dimensionales Hausdorffmaß besitzt.

In dem ersten Teil dieser Arbeit wollen wir mit Hilfe von Ergebnissen aus der geometrischen Maßtheorie die Resultate von E. De Giorgi und M. Miranda auf relativ direktem Wege zeigen. Indem wir in zentraler Weise das Regularitätstheorem von Allard verwenden, um die (Teil-) Regularität von minimalen Hyperflächen zu erhalten, weichen wir deutlich von der Vorgehensweise in [Giu84] ab, die auf den Arbeiten von E. De Giorgi und M. Miranda aufbaut. In der dort gewählten Herangehensweise ergibt sich die Regularität von minimalen Hyperflächen aus dem zentralen Lemma von De Giorgi. Ebenso unterscheidet sich unsere Darstellung der Regularitätsergebnisse von der für Area Minimizing Currents in Kodimension 1, wie sie in [Sim83] zu finden ist. Insgesamt erhalten wir dadurch einen anderen Beweis der Regularitätsaussagen für minimale Flächen, der nun kurz skizziert werden soll.

Zu Beginn der Arbeit geben wir eine kurze Einführung in die geometrische Maßtheorie. Wir definieren n-rektifizierbare Mengen und rektifizierbare n-Varifaltigkeiten, sowie die verallgemeinerte mittleren Krümmung. Anhand der Definition der verallgemeinerten mittleren Krümmung erhält man Abschätzungen und Relationen für verschiedene Dichteverhältnisse, die als Monotonieformeln bezeichnet werden. Diese Monotonieformeln gehen maßgeblich in das Regularitätstheorem von Allard ein, welches am Ende dieser Einführung in die geometrische Maßtheorie vorstellt wird. Das Theorem sagt aus, dass sich eine rektifizierbare n-Varifaltigkeit mit verallgemeinerter mittlerer Krümmung H lokal als Graph einer $C^{1,1-\frac{n}{p}}$-Funktion darstellen lässt, falls bestimmte L^p_{loc}-Abschätzungen an H und einige weitere lokale Voraussetzungen erfüllt sind.

Um nun die Regularität des Randes einer minimalen Caccioppoli-Menge zu untersuchen unterteilen wir den Rand ∂E in die Reduced Boundary $\partial^* E$ und die singuläre Menge $\Sigma := \partial E \setminus \partial^* E$. Dabei erhalten wir aus einem Resultat von De Giorgi, dass man die Reduced Boundary einer (nicht notwendigerweise minimalen) Caccioppoli-Menge als rektifizierbare $(n-1)$-Varifaltigkeit auffassen kann. Wir zeigen daraufhin, dass die Reduced Boundary einer minimalen Caccioppoli-Menge, aufgefasst als Varifaltigkeit, verschwindende verallgemeinerte mittlere Krümmung besitzt. Daraus folgend ergibt sich, dass die Voraussetzungen des Theorems von Allard erfüllt sind und damit, dass die Reduced Boundary eine glatte, $(n-1)$-dimensionale Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ ist.

Nachdem wir die Regularität der Reduced Boundary gezeigt haben, untersuchen wir die singuläre Menge Σ. Indem man die Menge E in solch einem Punkt $x_0 \in \Sigma$ durch zentrische Streckungen

$$E_k := \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{(x - x_0)}{k} + x_0 \in E\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

'aufbläst', sieht man, dass diese Mengen zu einem Kegel C konvergieren, der ebenfalls minimal ist. Man kann dann folgern, dass die Frage der Regularität von E in x_0 sich auf die Frage der Regularität des Kegels C zurückführen lässt, womit die Existenz von singulären Punkten in ∂E auf die Frage nach der Existenz singulärer minimaler Kegel im $\mathbb{R}^n$ reduziert wird. J. Simons konnte zeigen, dass bis zur Dimension $n \leq 7$ keine singulären minimalen Kegel im $\mathbb{R}^n$ existieren, womit wir wiederum anhand des Theorems von Allard die vollständige Regularität von minimalen Hyperflächen bis zu dieser Dimension erhalten. Dies ist das bestmögliche Resultat, da es ab Dimension 8 Beispiele singulärer minimaler Kegel gibt. Ausgehend von dem Resultat von J. Simons konnte in höheren Dimensionen H. Federer zeigen, dass die Hausdorff-Dimension der singulären Menge nicht größer sein kann als $n - 7$.

Man kann nun auch ähnlich gelagerte Variationsprobleme betrachten, wie zum Beispiel Flächen mit vorgeschriebener verallgemeinerter mittlerer Krümmung, das Hindernisproblem für Minimalflächen, Minimalflächen unter einer Volumenbedingung und weitere zusätzliche Randbedingungen. Verschiedene Arbeiten von F.J. Almgren, M. Miranda und U. Massari zeigen, dass auch in diesen Fällen ähnliche Regularitätsaussagen möglich sind.

In der Formulierung von Hyperflächen als Ränder von Caccioppoli-Mengen kann man zeigen, dass man die Lösungen der obigen Variationsprobleme unter dem Oberbegriff von fast minimalen Flächen zusammenfassen kann. Zur Definition von 'fast minimal' betrachtet man das Funktional

$$\Psi(E, B_r(x)) := |D\chi_E|(B_r(x)) - \inf\{|D\chi_F|(B_r(x)) : (F \setminus E) \cup (E \setminus F) \Subset B_r(x)\},$$

welches man als Abweichung von der Minimalität interpretieren kann. E, F sind dabei Caccioppoli-Mengen und mit $|D\chi_E|$ sei die totale Variation von $D\chi_E$ bezeichnet. Dabei ist eine Caccioppoli-Menge E genau dann minimal, wenn dieses Funktionals für alle x und alle hinreichend kleinen r verschwindet. Von einer 'fast minimalen' Caccioppoli-Menge E spricht man dann, wenn das Funktional $r^{1-n}\Psi(E, B_r(x))$ hinreichend gut durch eine Funktion $\alpha(r)$ kontrolliert ist.

In dem zweiten Teil dieser Arbeit wollen wir eine Arbeit von I. Tamanini [Tam84] über Regularitätsergebnisse für fast minimale Hyperflächen vorstellen. In dem zentralen Regularitätstheorem dieses Artikels zeigt der Autor, dass für fast minimale Hyperflächen entsprechende Regularitätsaussagen gelten wie für minimale Hyperflächen.

Wir werden in dieser Arbeit verschiedene Beispiele fast minimaler Flächen besprechen und darauf folgend im Beweis einer speziellen Version des Regularitätstheorems für fast minimale Flächen verschiedene Techniken für den eigentlichen Beweis einführen. Der Beweis des Regularitätstheorems bildet dann den Abschluss dieser Arbeit.

Konkret gliedert sich der Aufbau dieser Arbeit wie folgt:

Kapitel 1: Einleitung.

Kapitel 2: Dieses Kapitel gibt eine kurze Einführung in die geometrische Maßtheorie, wobei als Abschluss das Regularitätstheorem von Allard besprochen wird. Dabei haben wir uns an der Darstellung in dem Buch von L. Simon [Sim83] orientiert.

Kapitel 3: In diesem Kapitel zeigen wir mit Hilfe des Theorems von Allard die Regularität von Hyperflächen und zeigen die Abschätzung der Hausdorffdimension der singulären Menge von H. Federer. Eine wichtige Quelle stellte dabei das Buch von E. Giusti [Giu84] dar.

Kapitel 4: Hier stellen wir die Arbeit von I. Tamanini [Tam84] über die Regularität von fast minimalen, orientierbaren Hyperflächen vor.

Abschließend möchte ich mich bei Herrn Professor Huisken für die Betreuung und Unterstützung, sowie für den mir gewährten Freiraum bei der Erstellung dieser Arbeit ganz herzlich bedanken.
Desweiteren geht mein Dank an Sabine Schöttle und Wolf-Patrick Düll für ihre Hilfe bei der Korrektur dieser Arbeit, wie auch an meine Eltern für ihre Unterstützung während meines gesamten Studiums.

Kapitel 2

Geometrische Maßtheorie

In diesem ersten Kapitel wollen wir in knapper Form die grundlegenden Definitionen und Ergebnisse der geometrischen Maßtheorie vorstellen. Dies beinhaltet unter anderem die Definition von rektifizierbaren Mengen, Varifaltigkeiten und der verallgemeinerten mittleren Krümmung. Es folgt ein Abschnitt über Monotonieformeln und deren Konsequenzen. Als Abschluss des Kapitels wird das Regularitätsthorem von Allard besprochen.

2.1 Grundlagen

In diesem Abschnitt führen wir anhand abzählbar n-rektifizierbaren Mengen eine Verallgemeinerung des Flächenbegriffs ein. Mit Hilfe von maßtheoretischen Methoden kann man fast überall auf einer solchen 'Fläche' einen Tangentialraum definieren, der im C^1-Fall mit der herkömmlichen Definition übereinstimmt.

2.1.1 Abzählbar n-rektifizierbare Mengen

Definition 2.1.1 *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ heißt* abzählbar n- rektifizierbar, *wenn $M \subset M_0 \cup (\cup_{j=1}^{\infty} F_j(\mathbb{R}^n))$, wobei $\mathcal{H}^n(M_0) = 0$ und die $F_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ Lipschitzfunktionen für $j = 1, 2, \ldots$ sind.*

Dabei bezeichnet $\mathcal{H}^n$ das n-dimensionale Hausdorffmaß (Für die Definition der Hausdorffmaße siehe Definition 3.3.14). Wegen dem Fortsetzungssatz für Lipschitzfunktionen (siehe [Sim83] Theorem 5.1) ist diese Definition äquivalent zu

$$M \subset M_0 \cup (\cup_{j=1}^{\infty} F_j(A_j))$$

wobei $\mathcal{H}^n(M_0) = 0$, $F_j : A_j \to \mathbb{R}^{n+k}$ Lipschitzfunktionen, $A_j \subset \mathbb{R}^n$.

Lemma 2.1.2 *Eine Menge M ist genau dann abzählbar n-rektifizierbar wenn $M \subset \cup_{j=0}^{\infty} N_j$, wobei $\mathcal{H}^n(N_0) = 0$ und jedes N_j, $j \geq 1$, eine n-dimensionale, eingebettete C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$ ist.*

Beweis: Die eine Richtung ist klar, die Rückrichtung läßt sich leicht durch Approximation der Lipschitzfunktionen durch C^1-Funktionen zeigen. Für einen Beweis soll auf [Sim83] Lemma 11.1 verwiesen werden.

Man kann abzählbar rektifizierbare Mengen durch Existenz $\mathcal{H}^n$-fast überall eines approximativen Tangentialraumes charakterisieren, der wie folgt definiert wird:

Definition 2.1.3 *Sei M eine $\mathcal{H}^n$-messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+k}$ mit $\mathcal{H}^n(M \cap K) < \infty$ für alle kompakten $K \subset \mathbb{R}^{n+k}$. Dann ist ein n-dimensionaler Unterraum P des $\mathbb{R}^{n+k}$ der approximative Tangentialraum an M in x, $x \in \mathbb{R}^{n+k}$ fest, wenn*

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \int_{\eta_{x,\lambda}(M)} f(y)\, d\mathcal{H}^n(y) = \int_P f(y)\, d\mathcal{H}^n(y) \quad \forall f \in C_c^0(\mathbb{R}^{n+k}).$$

Wobei $\eta_{x,\lambda} : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k} : \eta_{x,\lambda}(y) = \lambda^{-1}(y-x),\ \ x, y \in \mathbb{R}^{n+k}$, $\lambda > 0$.

Wie man leicht sieht, ist P eindeutig, soweit er existiert. Er wird dann mit $T_x M$ bezeichnet.

Es ist oft hilfreich, die Bedingung, $\mathcal{H}^n(M \cap K) < \infty$ für alle kompakten Teilmengen K etwas abzuschwächen. Man kann $T_x M$ schon definieren, wenn man die Existenz einer positiven, lokal $\mathcal{H}^n$-integrierbaren Funktion θ auf M voraussetzt. (Es ist leicht einzusehen, dass die Existenz solch einer Funktion θ äquivalent dazu ist, dass sich M als abzählbare Vereinigung von $\mathcal{H}^n$-messbaren Mengen mit lokal endlichem $\mathcal{H}^n$-Maß darstellen lässt).

Definition 2.1.4 *Sei M eine $\mathcal{H}^n$-messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+k}$ und $\theta \in L^1_{loc}(M, \mathcal{H}^n \llcorner M)$, $\theta > 0$. Dann bezeichnet man einen n-dimensionalen Unterraum P des $\mathbb{R}^{n+k}$ als den Tangentialraum an M in x bezüglich θ, wenn gilt*

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \int_{\eta_{x,\lambda}(M)} f(y)\theta(x+\lambda y)\, d\mathcal{H}^n(y) = \theta(x) \int_P f(y)\, d\mathcal{H}^n(y) \quad \forall f \in C_c^0(\mathbb{R}^{n+k}).$$

Durch Koordinatentransformation $z = \lambda y + x$ ist diese Bedingung äquivalent zu

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_M f(\lambda^{-1}(z-x))\theta(z)\, d\mathcal{H}^n(y) = \theta(x) \int_P f(y)\, d\mathcal{H}^n(y) \quad \forall f \in C_c^0(\mathbb{R}^{n+k}).$$

Das nächste Lemma beleuchtet die Abhängigkeit des Tangentialraumes von der Funktion θ auf M.

Sei μ ein (äußeres) Maß auf dem Raum X und A eine Teilmenge von X. Dann können wir ein neues (äußeres) Maß $\mu \llcorner A$ auf X wie folgt definieren:

$$(\mu \llcorner A)(Z) := \mu(A \cap Z) \quad \text{für alle } Z \subset X.$$

Für den Fall, dass X ein topologischer Raum ist, und μ ein Maß auf X ist, können wir anhand einer nicht-negativen $L^1_{\text{loc}}(X, \mu)$-Funktion θ ein Radonmaß $\mu \llcorner \theta$ definieren:

$$(\mu \llcorner \theta)(Z) := \int_Z \theta\, d\mu$$

Lemma 2.1.5 *Sei M eine $\mathcal{H}^n$-messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+k}$ und $\theta, \tilde{\theta} \in L^1_{loc}(M, \mathcal{H}^n \llcorner M)$, $\theta, \tilde{\theta} > 0$. Sei $A := \{x |\ x \in \mathbb{R}^{n+k}$, x hat approximativen Tangentialraum bzgl. θ an $M\}$, $\tilde{A}$ entsprechend. Dann sind $B := \{x |\ x \in A \cap \tilde{A},\ T_x M \neq \widetilde{T_x M}\}$ und $(A \setminus \tilde{A}) \cup (\tilde{A} \setminus A)$ $\mathcal{H}^n$-Nullmengen.*

Beweis: Setze $\mu := \mathcal{H}^n \llcorner \theta$; $\tilde{\mu} := \mathcal{H}^n \llcorner \tilde{\theta}$; $M_\eta := \{x|\ x \in M,\ \frac{1}{\eta} \geq \theta(x) \geq \eta,\ \frac{1}{\eta} \geq \tilde{\theta}(x) \geq \eta\},\ \eta > 0$.
Dann gilt $\mathcal{H}^n(M_\eta \cap K) < \infty$ für alle kompakten K, M_η $\mathcal{H}^n$-messbar. Im Folgenden benötigen wir einige Ergebnisse über Dichten von Maßen. Sei ν ein Maß auf X, X metrischer Raum, $C \subset X$. Man definiert die n-dimensionale obere Dichte von ν in $x \in X$ wie folgt:

$$\Theta^{*n}(\nu, C, x) := \limsup_{\rho \to 0} \frac{\nu(C \cap B_\rho(x))}{\omega_n \rho^n},$$

wobei $B_\rho(x) := \{y \in X|\ |x-y| \leq \rho\}$ und $\omega_n := L^n(B_1^n(0))$.

Es gelten folgende Lemmata: (siehe [Sim83] 3.5 und 3.6), wobei $\mathcal{H}^n$ hier das auf dem metrischen Raum X definierte n-dimensionale Hausdorffmaß ist.

Lemma 1 Ist ν borel-regulär, $C \subset X$, C ν-messbar und $\nu(C) < \infty$,
dann ist

$$\Theta^{*n}(\nu, C, x) = 0 \text{ für } \mathcal{H}^n\text{-fast alle } x \in X \setminus C.$$

Lemma 2 Sei $C \subset X$, C $\mathcal{H}^n$-messbar, $\mathcal{H}^n(C) < \infty$, dann ist

$$\Theta^{*n}(\nu, C, x) \leq 1 \quad \text{für } \mathcal{H}^n\text{-fast alle } x \in C.$$

Sei nun $f \in C_c^0(\mathbb{R}^{n+k}),\ x \in B \cap M_\eta,\ \eta > 0$. Dann gilt nach obiger Definition mit

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_M f(\lambda^{-1}(z-x))\theta(z)\, d\mathcal{H}^n(y) \\
&\quad = \lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_{M \setminus M_\eta} f(\lambda^{-1}(z-x))\theta(z)\, d\mathcal{H}^n(y) + \lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_{M_\eta} f(\lambda^{-1}(z-x))\theta(z)\, d\mathcal{H}^n(y) \\
&\quad \leq C_1 \lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_{M \setminus M_\eta} \theta(z)\, d\mathcal{H}^n(y) + \lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_{M_\eta} f(\lambda^{-1}(z-x))\theta(z)\, d\mathcal{H}^n(y) \\
&\quad \leq C_1\, \Theta^{*n}(\mu, M \setminus M_\eta, x) + \lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_{M_\eta} f(\lambda^{-1}(z-x))\theta(z)\, d\mathcal{H}^n(y) \\
&\quad = \lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_{M_\eta} f(\lambda^{-1}(z-x))\theta(z)\, d\mathcal{H}^n(y)
\end{aligned}$$

für $\mathcal{H}^n$-fast alle x, $C_1 = \|f\|_\infty$. Da wegen Lemma 1 $\Theta^{*n}(\mu, M \setminus M_\eta, x) = 0$ für $\mathcal{H}^n$-fast alle $x \in B \cap M_\eta$, gilt für die Tangentialräume $P(x)$ und $\tilde{P}(x)$, wobei o.B.d.A. supp$f \subset B_1(x)$,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_P f(y)\, d\mathcal{H}^n(y) - \int_{\tilde{P}} f(y)\, d\mathcal{H}^n(y) \right| \\
&\leq \lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_{M_\eta} |f(\lambda^{-1}(z-x)| \left| \frac{\theta(z)}{\theta(x)} - \frac{\tilde{\theta}(z)}{\tilde{\theta}(x)} \right| d\mathcal{H}^n(z) \\
&\leq \frac{C}{\eta^2} \lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_{M_\eta \cap B_\lambda(x)} \left| \frac{\theta(z)}{\tilde{\theta}(z)} - \frac{\theta(x)}{\tilde{\theta}(x)} \right| d\mathcal{H}^n(z) \\
&\leq \frac{C}{\eta^2} \limsup_{\lambda \searrow 0} \left(\frac{\mathcal{H}^n(M_\eta \cap B_\lambda(x))}{\lambda^n} \right) \times \\
&\times \lim_{\lambda \searrow 0} (\mathcal{H}^n(M_\eta \cap B_\lambda(x)))^{-1} \int_{M_\eta \cap B_\lambda(x)} \left| \frac{\theta(z)}{\tilde{\theta}(z)} - \frac{\theta(x)}{\tilde{\theta}(x)} \right| d\mathcal{H}^n(z) \\
&\leq \frac{C}{\eta^2} \lim_{\lambda \searrow 0} (\mathcal{H}^n(M_\eta \cap B_\lambda(x)))^{-1} \int_{M_\eta \cap B_\lambda(x)} \left| \frac{\theta(z)}{\tilde{\theta}(z)} - \frac{\theta(x)}{\tilde{\theta}(x)} \right| d\mathcal{H}^n(z) = 0
\end{aligned}$$

für $\mathcal{H}^n$-fast alle $x \in M_\eta \cap B$; wegen Lemma 2 und $\theta(z)/\tilde{\theta}(z) \in L^1_{loc}(M,\ \mathcal{H}^n \llcorner M_\eta)$ ist somit das Lebesgue-point Lemma anwendbar (siehe [EG92] 1.7 Korollar 1). Insbesondere folgt auch aus der Existenz von $P(x)$ die von $\tilde{P}(x)$ $\mathcal{H}^n$-f.ü. .
Da $M = \cup_{n=1}^\infty M_{\frac{1}{n}}$, folgt $P \equiv \tilde{P}$ für $\mathcal{H}^n$-fast alle $x \in A \cap \tilde{A}$. □

Zusammen mit der folgenden wichtigen Charakterisierung von abzählbar n-rektifizierbaren Mengen sagt dieses Lemma insbesondere aus, dass bei zwei entsprechenden $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+k},\ \mathcal{H}^n \llcorner M)$ Funktionen $\theta,\ \tilde{\theta} > 0$ die Tangentialräume $\mathcal{H}^n$-f.ü. auf M übereinstimmen.

Theorem 2.1.6 *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}, \mathcal{H}^n$-messbar. M ist genau dann abzählbar n-rektifizierbar, wenn es eine positive Funktion $\theta \in L^1_{loc}(M,\ \mathcal{H}^n \llcorner M)$ gibt, bezüglich welcher der approximative Tangentialraum T_xM für $\mathcal{H}^n$-fast alle $x \in M$ existiert.*

Bemerkung 2.1.7 Sei M $\mathcal{H}^n$-messbar, abzählbar n-rektifizierbar. Dann kann man M als disjunkte Vereinigung $\cup_{j=0}^\infty M_j$ darstellen, wobei $\mathcal{H}^n(M_0) = 0$, M_j $\mathcal{H}^n$-messbar und $M_j \subset N_j,\ j \geq 1$, wobei N_j eingebettete n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n+k}$ sind. Um dies zu erreichen, definiert man M_j induktiv durch

$$M_j := (M \cap N_j) \setminus \cup_{i=0}^{j-1} M_i,\ j \geq 1,$$

wobei die N_j C^1-Untermannigfaltigkeiten sind und $M_0 := M \setminus \cup_{j=1}^\infty N_j$ mit $\mathcal{H}^n$-Maß null; solche N_j existieren nach Lemma 2.1.2. Im Beweis von Theorem 2.1.6 wird gezeigt, dass dann

$$T_xM = T_xN_j \ \text{ für } \mathcal{H}^n\text{-fast alle } x \in M_j.$$

Beweis von Theorem 2.1.6: Siehe [Sim83] Theorem 11.6.

2.1.2 Gradienten, Area- und Coareaformel

In diesem Abschnitt sei immer vorausgesetzt, dass M in der Darstellung wie in Bemerkung 2.1.7 gegeben ist.

Definition 2.1.8 *Sei f eine lokal Lipschitz-stetige Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ (U offen in $\mathbb{R}^{n+k}$, $U \supset M$). Dann ist der Gradient von f, der mit $\nabla^M f$ bezeichnet wird, definiert als die $L^1_{loc}(\mathcal{H}^n \llcorner M)$-Funktion, die durch die lokal integrable Funktion g mit*

$$g(x) := \nabla^{N_j} f(x) \quad \textit{für alle } x \in M_j$$

repräsentiert wird, sofern die rechte Seite existiert.

Dabei ist für eine C^1-Funktion h auf einer Umgebung von $x \in N$, wobei N eine n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$ist, der Gradient $\nabla^N h(x) \in T_x N$ von h wie folgt definiert

$$\nabla^N h(x) := \sum_{k=1}^{n} (D_{\tau_k} h)\, \tau_k,$$

wobei die τ_k mit $k = 1, \dots , n$ eine Orthonormalbasis von $T_x N$ bilden. Da f Lipschitz-stetig ist ergibt sich nach dem Theorem von Rademacher ([EG92], 3.1.2 Theorem 2), dass f differenzierbar ist für $\mathcal{H}^n$-fast alle $x \in M_j$. Dass diese Definition unabhängig ist von der Zerlegung $\cup_{j=0}^{\infty} M_j$, sieht man wie folgt: Es gilt

$$g(x) = \operatorname{grad}(f|_{(x+T_x N_j)})(x)$$

für $\mathcal{H}^n$-fast alle $x \in M_j$, wobei andererseits nach Bemerkung 2.1.7, $T_x M = T_x N_j$, für $\mathcal{H}^n$-fast alle $x \in M_j$. Da $T_x M$ intrinsisch definiert ist, sieht man so die Unabhängigkeit von der Zerlegung.

Nachdem wir nun $\nabla^M f$ definiert haben, können wir die Tangentialabbildung $d^M f_x : T_x M \to \mathbb{R}$ durch

$$d^M f_x(\tau) := \langle \tau, \nabla^M f(x) \rangle, \quad \forall\ \tau \in T_x M$$

an allen Punkten definieren, an denen $T_x M$ und $\nabla^M f(x)$ existieren. Falls $f = (f^1, \dots , f^N)$ Werte in $\mathbb{R}^N$ annimmt (f^j weiterhin lokal Lipschitz-stetig auf U), definiert man $d^M f_x : T_x M \to \mathbb{R}^N$ durch

$$d^M f_x(\tau) := \sum_{j=1}^{N} \langle \tau, \nabla^M f^j(x) \rangle\, e_j \ .$$

Anhand der Area- und Coareaformel im 'klassischen' Fall

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$$

kann man Versionen für abzählbar n-rektifizierbare Mengen herleiten. Dabei zeigt in diesem und im 'klassischen' Fall für

$N \geq n$ die Area-Formel , dass das n-dimensionale Hausdorffmaß von $f(A)$ für $A \subset \mathbb{R}^n$ oder M mit eigerechneter Multiplizität sich durch Integration der entsprechenden Jacobi-Determinante von f über A darstellen läßt.

Für $N \leq n$ sagt die Coarea-Formel, dass das Integral über das $(n-N)$-dimensionale Hausdorffmaß der Niveaumengen von f wiederum durch Integration der Jacobi-Determinante von f über A gegeben ist.

Lemma 2.1.9 (Area-Formel) *Sei $f : A \to \mathbb{R}^N$, $A \subset M$, A $\mathcal{H}^n$-messbar, $N \geq n$, f lokal Lipschitz-stetig und g eine nicht-negative $\mathcal{H}^n$-messbare Funktion auf M. Dann gilt*

$$\int_A J_M f \, d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^0(A \cap f_{-1}(y)) \, d\mathcal{H}^n(y)$$

und

$$\int_M g \, J_M f \, d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{f^{-1}(y)} g \, d\mathcal{H}^0 \right) d\mathcal{H}^N(y) \ .$$

Dabei ist

$$J_M f(x) := \sqrt{\det\left((d^M f_x)^* \circ (d^M f_x)\right)} \quad \textit{für } \mathcal{H}^n\textit{-fast alle } x \in M$$

und $(d^M f_x)^* : \mathbb{R}^N \to T_x M$ die adjungierte Abbildung zu $d^M f_x$.

Lemma 2.1.10 (Coarea-Formel) *Sei $f : A \to \mathbb{R}^N$, $A \subset M$, A $\mathcal{H}^n$-messbar, $N \leq n$, f lokal Lipschitz-stetig und g eine nicht-negative $\mathcal{H}^n$-messbare Funktion auf M. Dann gilt*

$$\int_A J_M^* f \, d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^{n-N}(A \cap f^{-1}(y)) \, d\mathcal{L}^N(y)$$

und

$$\int_M g \, J_M^* f \, d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{f^{-1}(y) \cap M} g \, d\mathcal{H}^{n-N} \right) d\mathcal{L}^N(y) \ .$$

Dabei ist hier

$$J_M^* f(x) := \sqrt{\det\left((d^M f_x) \circ (d^M f_x)^*\right)} \quad \textit{für } \mathcal{H}^n\textit{-fast alle } x \in M.$$

Zum Beweis der Area- und Coarea-Formel: Bei beiden Lemmata folgt der erste Teil durch Approximation von f durch C^1-Funktionen aus dem C^1-Fall. Der zweite Teil folgt durch Approximation von g durch charakteristische Funktionen. Für Details siehe [Sim83] §12.

2.2 BV-Funktionen und Caccioppoli-Mengen I

Wir wollen in diesem Abschnitt kurz den Raum der Funktionen mit beschränkter Variation und Caccioppoli-Mengen definieren. Für Caccioppoli-Mengen wird ein zentrales Theorem von De Giorgi vorgestellt, welches zeigt, dass die 'Reduced Boundary' einer Caccioppoli-Menge abzählbar n-rektifizierbar ist. In Kapitel 3 werden wir uns noch eingehender mit BV-Funktionen beschäftigen.

Definition 2.2.1 *Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $u \in L^1_{loc}(U)$. Dann ist u von lokal beschränkter Variation in U, das heißt $u \in BV_{loc}(U)$, wenn für jedes $W \Subset U$ ein $c(W) < \infty$ existiert mit*

$$\int_W u \operatorname{div} g \, d\mathcal{L}^n \leq c(W) \sup |g|$$

für alle $g : U \to \mathbb{R}^n$ mit $g^j \in C_c^\infty(W)$, $j = 1, \dots, n$.

Dies besagt insbesondere, dass sich das Funktional

$$F(u) := \int_U u \operatorname{div} g \, d\mathcal{L}^n$$

eindeutig zu einem reellwertigen linearen Funktional auf

$$\mathcal{K}(U, \mathbb{R}^n) := \{g : U \to \mathbb{R}^n, \ g^j \in C_c^0(W), \ \operatorname{supp}|g| \text{ kompakt}\}$$

fortsetzen läßt, das auf

$$\mathcal{K}_W(U, \mathbb{R}^n) := \{g \in \mathcal{K}(U, \mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}|g| \subset W\}$$

für alle $W \Subset U$ beschränkt ist. Dann sagt uns der Riesz'sche Darstellungssatz (siehe [EG92] 1.8 Theorem 1), dass ein Radonmaß μ auf U und eine μ-messbare Funktion $\nu : U \to \mathbb{R}^n$ existiert mit $|\nu| = 1$ μ-f.ü., so dass

$$\int_U u \operatorname{div} g \, d\mathcal{L}^n = \int_U \langle g, \nu \rangle \, d\mu \quad \forall \ g \in C_c^1(U).$$

Dabei ist μ eindeutig charakterisiert durch

$$|Du|(W) := \mu(W) = \sup\{F(g) \,|\, g \in C_c^\infty(U, \mathbb{R}^n), \, |f| \leq 1, \, \operatorname{supp}|g| \subset W\}$$

für $W \subset U$ offen.

Definition 2.2.2 *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und E eine $\mathcal{L}^{n+1}$-messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist E eine Caccioppoli-Menge in U, falls die charakteristische Funktion $\chi_E \in BV_{loc}(U)$ ist.*

Damit existiert ein Radonmaß μ_E auf U und eine μ_E-messbare Funktion $\nu : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $|\nu| = 1$ μ_E-f.ü. in U und mit

$$\int_{E \cap U} \operatorname{div} g \, d\mathcal{L}^{n+1} = -\int_U \langle g, \nu \rangle \, d\mu_E \quad \forall \ g \in C_c^1(U, \mathbb{R}^{n+1}). \tag{2.1}$$

Falls E offen ist und $\partial E \cap U$ eine n-dimensionale eingebettete C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ist, zeigt das Divergenztheorem, dass (2.1) gilt mit $\mu_E = \mathcal{H}^n \llcorner (\partial E \cap U)$ und ν als innere Einheitsnormale an ∂E. Dies motiviert dazu, dass man generell μ_E als verallgemeinertes Randmaß und ν als verallgemeinerte innere Einheitsnormale interpretieren kann.

Definition 2.2.3 *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und E eine Caccioppoli-Menge in U. Dann definiert man die* Reduced Boundary *$\partial^* E$ von E wie folgt:*

$$\partial^* E := \{x \in U : \ \lim_{\rho \searrow 0} \frac{\int_{B_\rho(x)} \nu \, d\mu_E}{\mu_E(B_\rho(x))} \ \textit{existiert und hat Länge 1}\}. \tag{2.2}$$

Da $|\nu| = 1$ μ_E-f.ü. in U aufgrund des Differentiationstheorems für Radonmaße ([EG92] 1.6.2 Theorem 2), gilt $\mu_E(U \setminus \partial^* E) = 0$, das heißt $\mu_E = \mu_E \llcorner \partial^* E$. Es gilt sogar weitaus mehr:

Theorem 2.2.4 (De Giorgi) *Sei E eine Caccioppoli-Menge in U. Dann ist $\partial^* E$ abzählbar n-rektifizierbar und $\mu_E = \mathcal{H}^n \llcorner \partial^* E$. Insbesondere existiert an jedem Punkt $x \in \partial^* E$ der approximative Tangentialraum $T_x(\partial^* E)$, hat Multiplizität 1, und ist gegeben durch*

$$T_x(\partial^* E) = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \langle y, \nu_E(x) \rangle = 0\}, \tag{2.3}$$

wobei $\nu_E(x) := \lim_{\rho \searrow 0} \frac{\int_{B_\rho(x)} \nu \, d\mu_E}{\mu_E(B_\rho(x))}$ (so dass $|\nu_E(x)| = 1$ nach (2.2)). Darüber hinaus gilt an jedem solchen Punkt $x \in \partial^* E$, dass man $\nu_E(x)$ wie folgt als die innere Einheitsnormale an E interpretieren kann:

$$E_{x,\lambda} := \{\lambda^{-1}(y - x) : y \in E\} \underset{\lambda \searrow 0}{\longrightarrow} \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle y, \nu_E(x) \rangle > 0\} \tag{2.4}$$

im $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$-Sinne.

Für einen Beweis siehe [Sim83] Theorem 14.3.

2.3 Rektifizierbare n-Varifaltigkeiten

Definition 2.3.1 *Sei M eine abzählbar n-rektifizierbare, $\mathcal{H}^n$-messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+k}$, und sei $\theta \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+k}, \mathcal{H}^n \llcorner M)$ mit $\theta = 0$ auf $\mathbb{R}^{n+k} \setminus M$ und $\theta > 0$ auf M. Die rektifizierbare n-Varifaltigkeit $V := \underline{v}(M, \theta)$ assoziert zu solch einem Paar (M, θ) wird als Äquivalenzklasse all solcher Paare $(\tilde{M}, \tilde{\theta})$ definiert, so dass $\mathcal{H}^n((M \setminus \tilde{M}) \cup (\tilde{M} \setminus M)) = 0$ und $\tilde{\theta} = \theta$ $\mathcal{H}^n$-f.ü. auf $\tilde{M} \cap M$ gilt.*

θ wird als Multiplizitätsfunktion von $\underline{v}(M, \theta)$ bezeichnet. Falls θ nur Werte in $\mathbb{N}$ $\mathcal{H}^n$-f.ü. annimmt, spricht man von einer *integer* n-Varifaltigkeit.

Zugeordnet zu solch einer n-rektifizierbaren Varifaltigkeit $V = \underline{v}(M, \theta)$ existiert ein Radonmaß $\mu_V := \mathcal{H}^n \llcorner \theta$, wobei

$$\mu_V(B) = \int_{B \cap M} \theta \, d\mathcal{H}^n \quad \text{für Borelmengen } B \subset \mathbb{R}^{n+k}. \tag{2.5}$$

Die Masse $\underline{M}$ von V ist

$$\underline{M} := \mu_V(\mathbb{R}^{n+k}), \tag{2.6}$$

und es sei:

$$\operatorname{supp} V := \operatorname{supp} \mu_V, \tag{2.7}$$

wobei der Träger eines Maßes η auf X definiert ist durch

$$\operatorname{supp} \eta := X \setminus \cup \{A : \ A \subset X \text{ offen}, \ \eta(A) = 0\}.$$

Seien (M, θ) und $(\tilde{M}, \tilde{\theta})$ zwei Repräsentanten von V. Dann gilt wegen Lemma 2.1.5, dass $T_x M$ und $T_x \tilde{M}$ $\mathcal{H}^n$-f.ü. auf M bzw. $\tilde{M}$ existieren und $T_x M = T_x \tilde{M}$ für $\mathcal{H}^n$-fast alle $x \in M \cap \tilde{M}$ gilt. Damit ist

$$T_x V := T_x M \tag{2.8}$$

wohldefiniert.

Man kann nun auch Bilder von rektifizierbaren n-Varifaltigkeiten unter lokal Lipschitz-stetigen Abbildungen betrachten. Sei $V = \underline{v}(M,\theta)$, $M \subset U$, U offen in $\mathbb{R}^{n+k}$, W offen in $\mathbb{R}^{n+l}$ und sei $f : \mathrm{supp}V \cap U \to W$ eigentlich (d.h. Urbilder kompakter Mengen sind wiederum kompakt), lokal Lipschitz-stetig und injektiv. Dann definiert man die *Bild*-Varifaltigkeit $f_\# V$ folgendermaßen:

$$f_\# V := \underline{v}(f(M), \theta \circ f^{-1}). \tag{2.9}$$

Anhand der Area-Formel 2.1.9 kann man leicht nachprüfen, dass f(M) abzählbar n-rektifizierbar und $\theta \circ f^{-1}$ lokal $\mathcal{H}^n$-integrabel in W ist. (Man beachte, dass die lokale Lipschitz-Stetigkeit von f lokale Beschränktheit von $J_M f$ impliziert). Wenn allgemeiner f die Bedingungen oben erfüllt, aber nicht notwendigerweise injektiv ist, definiert man $f_\# V$ durch

$$f_\# V := \underline{v}(f(M), \tilde{\theta}), \text{ wobei } \tilde{\theta}(y) := \int_{f^{-1}(y)\cap M} \theta \, d\mathcal{H}^0 \quad . \tag{2.10}$$

Wieder ist aufgrund der Area-Formel 2.1.9 $\tilde{\theta}$ lokal $\mathcal{H}^n$- integrabel in W und

$$\underline{M}(f_\# V) = \int_{f(M)} \tilde{\theta} \, d\mathcal{H}^n = \int_M J_M f \, \theta \, d\mathcal{H}^n \quad . \tag{2.11}$$

Es soll nun die *erste Variation der Masse* für rektifizierbare n-Varfaltigkeiten $V = \underline{v}(M,\theta)$ in $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen definiert werden.
Sei $\{\phi_t\}_{-\varepsilon<t<\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ eine 1-Parameterfamilie von Diffeomorphismen $U \to U$, so dass

$$\begin{aligned} &(i)\ \phi_0 = id_U, \text{und es existiert ein kompaktes } K \subset U, \text{ so dass } \phi_t|_{U\setminus K} = id_{U\setminus K}\ \forall\, t \in (-\varepsilon,\varepsilon) \\ &(ii)\ (x,t) \mapsto \phi_t(x) \text{ ist eine glatte Abbildung } U \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to U\ . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Setzt man nun

$$X_x := \frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0}, \tag{2.13}$$

so gilt:

$$\phi_t(x) = x + tX_x + O(t^2)\,. \tag{2.14}$$

Um nun $\underline{M}(\phi_{t\,\#}V)$ zu berechnen, müssen wir zunächst die induzierte lineare Abbildung $d^M\phi_t$ betrachten. Die Matrix von $d^M\phi_t$ bezüglich einer Orthonormalbasis $\tau_1,\ldots,\tau_n$ für T_xM und der Standardbasis $e_1,\ldots,e_{n+k}$ des $\mathbb{R}^{n+k}$ ist gegeben durch

$$(a_{li})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ l=1,\ldots,n+k}}, \text{ wobei } a_{li} = D_{\tau_i}\phi_t^l = \tau_i^l + t\,D_{\tau_i}X_x^l + O(t^2)\,. \tag{2.15}$$

Folglich hat $(d^M\phi_t\big|_x)^* \circ (d^M\phi_t\big|_x)$ die Matrixdarstellung

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \sum_{l=1}^{n+k} a_{li}a_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^{n+k} \Big(\tau_i^l\tau_j^l + t((D_{\tau_i}X^l)\tau_j^l + (D_{\tau_j}X^l)\tau_i^l)\Big) + O(t^2)\,. \\ &= \delta_{ij} + \sum_{l=1}^{n+k} t(\tau_j^l D_{\tau_i}X^l + \tau_i^l D_{\tau_j}X^l) + O(t^2) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Benutzt man nun, dass $\det(I + tA) = 1 + t\,\mathrm{spur}A + O(t^2)$ und $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2)$ gilt, so ergibt sich

$$J^M\phi_t(x) = 1 + t\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n+k} \tau_i^l D_{\tau_i}X^l + O(t^2). \tag{2.17}$$

Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n+k}\sum_{i=1}^{n} \tau_i^l D_{\tau_i}X^l &= \sum_{l=1}^{n+k}\sum_{i=1}^{n} \langle (D_{\tau_i}X^l)\tau_i, e_l\rangle \\ &= \sum_{l=1}^{n+k} \langle e_l, \nabla^M X^l\rangle =: \mathrm{div}_M X\,, \end{aligned} \tag{2.18}$$

wobei $\mathrm{div}_M X$ die 'tangentiale Divergenz' von X relativ zu M ist. Zusammen mit (2.11) ergibt sich für die erste Variation der Masse $\frac{d}{dt}\underline{M}(\phi_{t\,\#}V)\Big|_{t=0}$ relativ zur Störung ϕ_t :

$$\frac{d}{dt}\underline{M}(\phi_{t\,\#}V)\Big|_{t=0} = \int_M \mathrm{div}_M X \, d\mu_V \ . \tag{2.19}$$

Dies legt folgende Definition nahe.

Definition 2.3.2 *Sei U offen in $\mathbb{R}^{n+k}$. Dann ist $V = \underline{v}(M,\theta)$* stationär *in U, wenn*

$$\int div_M X \, d\mu_V = 0 \quad \forall X \in C^1(U;\mathbb{R}^{n+k}) \ mit\ suppX \Subset U \ . \tag{2.20}$$

Man beachte, dass hier nicht $X(x) \in T_xV$ verlangt wird. Motiviert durch den klassischen Fall (siehe [Sim83] Lemma 9.6) kann man definieren:

Definition 2.3.3 *Sei N eine $(n+k_1)$-dimensionale C^2-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}(k_1 \le k)$, U offen in N und $M \subset N$. Dann ist $V = \underline{v}(M,\theta)$* stationär *in U, wenn*

$$\int_U div_M X \, d\mu_V = -\int_U \langle X, \underline{\vec{H}}_M\rangle \, d\mu_V \ \forall X \in C^1(U;\mathbb{R}^{n+k}) \ \ mit\ supp\ X \Subset U\,. \tag{2.21}$$

Hierbei ist $\underline{\vec{H}}_M := \sum_{i=1}^n \vec{B}_x(\tau_i,\tau_i)$, wobei $\tau_1,\dots,\tau_n$ eine Orthonormalbasis von T_xM ist und $\vec{B}$ die zweite Fundamentalform von N. Die obige Definition ist äquivalent dazu, dass die erste Variation der Masse von V in U, $U \subset N$, U offen, verschwindet. (Siehe [Sim83] Lemma 9.6).
Dies lässt sich wie folgt verallgemeinern:

Definition 2.3.4 *Sei $\underline{H}$ eine lokal μ_V-integrable Funktion auf $M\cap U$ mit Werten in $\mathbb{R}^{n+k}$. Dann hat $V\ (=\underline{v}(M,\theta))$ verallgemeinerte mittlere Krümmung $\underline{H}$ in U (U offen in $\mathbb{R}^{n+k}$), wenn*

$$\int_U div_M X\, d\mu_V = -\int_U \langle X, \underline{H}\rangle\, d\mu_V \quad \forall\ X \in C_c^1(U;\mathbb{R}^{n+k})\,. \tag{2.22}$$

Bemerkung 2.3.5 falls M glatt ist mit $(\overline{M}\setminus M)\cap U = \emptyset$ und $\theta = 1$, ist die verallgemeinerte mittlere Krümmung auf V genau die gewöhnliche mittlere Krümmung auf M. (Siehe [Sim83] (7.6)). Für eine rektifizierbare n-Varifaltigkeit $V = (M,\theta)$ und

$$\left|\int \mathrm{div}_M X\, d\mu_V\right| \le C \sup|X|\, \eta(\mathrm{supp}X) \quad \forall\ X \in C_c^1(U;\mathbb{R}^{n+k})\,, \tag{2.23}$$

wobei η ein bezüglich μ_V gleichmäßig stetiges (d.h. jede μ_V-Nullmenge ist auch η-Nullmenge) Radonmaß sei, folgt mit dem Riesz'schen Darstellungsatz ([Sim83] 4.1) und dem Differentiationssatz für Radonmaße ([Sim83] 4.7) die Existenz einer $L^1_{loc}(\mu_V)$-Funktion $\underline{H}$ in U, die (2.22) erfüllt.

2.3.1 Monotonieformeln und Konsequenzen

In diesem Abschnitt sei U offen in $\mathbb{R}^{n+k}$, $V = \underline{v}(M,\theta)$ habe verallgemeinerte mittlere Krümmung $\underline{H}$ in U, und es sei $\mu := \mu_V = \mathcal{H}^n \llcorner \theta$. Anhand von (2.22) kann man nun durch passende Wahl des Vektorfelds X Informationen über V gewinnen.

Sei also $X_x := \gamma(r)(x-\xi)$, wobei $\xi \in U$ fest, $r := |x-\xi|$ und γ eine $C^1(\mathbb{R})$-Funktion mit

$$\gamma'(t) \le 0\ \forall\ t, \qquad \gamma(t) \equiv 1 \text{ für } t \le \rho/2, \text{ und } \gamma(t) \equiv 0 \text{ für } t > \rho. \tag{2.24}$$

dabei sei $\rho > 0$ so gewählt, dass $\overline{B}_\rho(\xi) \subset U$.

Sei $f \in C^1(U)$ und $x \in M$, so dass T_xM existiert. Dann gilt nach Definition 2.1.8 $\nabla^M f(x) = \sum_{j,l=1}^{n+k} e^{jl} \frac{\partial f}{\partial x^l}(x)\, e_j$, dabei bezeichne $(e^{jl})_{j,l=1}^{n+k}$ die Matrix der orthogonalen Projektion p_x des $\mathbb{R}^{n+k}$ auf T_xM. Damit folgt bei der obigen Wahl von X

$$\mathrm{div}_M X = \sum_{j=1}^{n+k} \langle e_j, \nabla^M X^j\rangle = \gamma(r)\sum_{j=1}^{n+k} e^{jj} + r\gamma'(r) \sum_{j,l=1}^{n+k} \frac{(x^j-\xi^j)}{r}\frac{(x^l-\xi^l)}{r}\, e^{jl}\,.$$

Es gilt $\sum_{j=1}^{n+k} e^{jj} = \mathrm{spur}(p_x) = n$ und

$$\sum_{j,l=1}^{n+k} \frac{(x^j-\xi^j)}{r}\frac{(x^l-\xi^l)}{r}\, e^{jl} = \langle Dr, p(Dr)\rangle = \langle p(Dr), p(Dr)\rangle = 1 - \left|(Dr)^\perp\right|^2,$$

da $|Dr| = 1$. Dabei bezeichne $(Dr)^\perp$ die orthogonale Projektion von Dr auf $(T_xM)^\perp$. Dies ergibt zusammen mit (2.22)

$$n \int \gamma(r)\, d\mu + \int r\gamma'(r)\, d\mu = - \int \langle \underline{H}, x - \xi \rangle \gamma(r)\, d\mu + \int r\gamma'(r) \big|(Dr)^\perp\big|^2\, d\mu\,, \tag{2.25}$$

vorausgesetzt $\overline{B}_\rho(\xi) \subset U$. Sei nun ϕ_ε eine $C^1(\mathbb{R})$-Funktion mit $\phi_\varepsilon(t) \equiv 1$ für $t \leq 1 - \varepsilon$, $\phi_\varepsilon(t) \equiv 0$ für $t \geq 1$ und $\phi' \leq 0$ für alle t, $0 < \varepsilon < 1$. Dann können wir (2.25) mit $\gamma(r) := \phi_\varepsilon(r/\rho)$ anwenden. Da $r\gamma'(r) = r\rho^{-1}\phi_\varepsilon'(r/\rho) = -\rho \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\phi_\varepsilon(r/\rho)\right)$, folgt

$$nI(\rho) - \rho I'(\rho) = -\rho J'(\rho) - L(\rho)\,, \tag{2.26}$$

wobei

$$\begin{aligned} I(\rho) &= \int \phi_\varepsilon(r/\rho)\, d\mu \quad , \ L(\rho) = \int \langle \underline{H}, x - \xi \rangle\, \phi_\varepsilon(r/\rho)\, d\mu \\ \text{und} \ \ J(\rho) &= \int \phi_\varepsilon(r/\rho) \big|(Dr)^\perp\big|^2\, d\mu\ . \end{aligned} \tag{2.27}$$

Multiplikation von (2.26) mit ρ^{-n-1} und Umordnung ergibt

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^{-n} I(\rho)) = \rho^{-n} J'(\rho) + \rho^{-n-1} L(\rho)\,. \tag{2.28}$$

Wir wollen nun in (2.28) ε gegen 0 gehen lassen. Dann konvergiert $\phi_\varepsilon(r/\rho)$ punktweise und im $L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$-Sinne gegen die charakteristische Funktion von $B_\rho(\xi)$. Wegen $\frac{\partial}{\partial\rho}\phi_\varepsilon(r/\rho) \geq 0$ für $(1-\varepsilon)\rho \leq r \leq \rho$ und $\frac{\partial}{\partial\rho}\phi_\varepsilon(r/\rho) \equiv 0$ sonst, gilt für $\rho^{-n}J'(\rho)$:

$$\begin{aligned} (1-\varepsilon)^n \frac{\partial}{\partial\rho} \int \phi_\varepsilon(r/\rho) \frac{|(Dr)^\perp|^2}{r^n}\, d\mu &= (1-\varepsilon)^n \int r^{-n} \frac{\partial}{\partial\rho}\phi_\varepsilon(r/\rho)|(Dr)^\perp|^2\, d\mu \\ \leq \rho^{-n} \int \frac{\partial}{\partial\rho}\phi_\varepsilon(r/\rho)|(Dr)^\perp|^2\, d\mu &\leq \int r^{-n} \frac{\partial}{\partial\rho}\phi_\varepsilon(r/\rho)|(Dr)^\perp|^2\, d\mu \\ = \frac{\partial}{\partial\rho} \int \phi_\varepsilon(r/\rho) \frac{|(Dr)^\perp|^2}{r^n}\, d\mu\,. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Damit folgt aus (2.28) im Sinne von Distributionen für $\varepsilon \searrow 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\rho}\left(\rho^{-n}\mu(B_\rho(\xi))\right) \\ &= \frac{d}{d\rho} \int_{B_\rho(\xi)} \frac{|(Dr)^\perp|^2}{r^n}\, d\mu + \rho^{-n-1} \int_{B_\rho(\xi)} \langle \underline{H}, x - \xi \rangle\, d\mu \\ &= \frac{d}{d\rho} \int_{B_\rho(\xi)} \frac{|(Dr)^\perp|^2}{r^n}\, d\mu + \frac{d}{d\rho} \int_\delta^\rho \tau^{-n-1} \int_{B_\tau(\xi)} \langle \underline{H}, x - \xi \rangle\, d\mu\, d\tau \quad ; \quad \rho > \delta > 0. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Diese Gleichung wird als fundamentale *Monotonieformel* bezeichnet.

Um den letzten Term in (2.30) in eine günstigere Form zu bringen, benötigen wir ein kleines Lemma.

Lemma 2.3.6 *Sei X ein top. Raum, μ ein Maß auf X, $\alpha > 0$, $f \in L^1(\mu)$, $f \geq 0$ und $A_t := \{x \in X : \ f(x) > t\}$. Dann gilt:*

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{\alpha-1}\mu(A_t)\,dt = \alpha^{-1}\int_{A_{t_0}} (f^{\alpha} - t_0^{\alpha})\,d\mu \quad \forall\ t_0 \geq 0\ . \tag{2.31}$$

Beweis: Der Beweis folgt einfach durch Anwendung des Satzes von Fubini auf

$$\int_{A_{t_0}\times[t_0,\infty]} t^{\alpha-1}\chi_{A_t}\ \ d\mu \times dt \ \ \text{für } t_0 > 0.$$

□

Setzt man nun

$$g^{+}(x) := \langle \underline{H}, x-\xi\rangle^{+}\ ,\ g^{-} := \langle \underline{H}, x-\xi\rangle^{-}$$

und $\mu^{+} := \mu \llcorner g^{+}$, $\mu^{-} := \mu \llcorner g^{-}$ und für $0 < \sigma < \rho$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > \rho \\ \frac{1}{\sigma} & \text{für } |x| < \sigma \\ \frac{1}{|x|} & \text{für } \sigma \leq |x| \leq \rho\,, \end{cases}$$

dann folgt für den letzten Term von (2.30) mit Lemma 2.3.6

$$\begin{aligned} &\int_{\sigma}^{\rho} \tau^{-n-1}\int_{B_\tau(\xi)} \langle \underline{H}, x-\xi\rangle\,d\mu\,d\tau = \int_{\sigma}^{\rho} \tau^{-n-1}\mu^{+}(B_\tau(\xi))\,d\tau \\ &- \int_{\sigma}^{\rho} \tau^{-n-1}\mu^{-}(B_\tau(\xi))\,d\tau = \frac{1}{n}\int_{B_\rho}(\xi)(r_\sigma^{-n} - \rho^{-n})\langle \underline{H}, x-\xi\rangle\,d\mu\,, \end{aligned} \tag{2.32}$$

wobei $r_\sigma := \max\{r,\sigma\}$.

Aufgrund der Stetigkeit der einzelnen nicht-differenzierten Summanden in (2.30), folgt mit dem Hilbert'schen Lemma, dass die Differenz der nicht-differenzierten Summanden beider Seiten konstant ist. Für $0 < \sigma \leq \rho$, mit $\overline{B}_\rho(\xi) \subset U$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \sigma^{-n}\mu(B_\sigma(\xi)) = \rho^{-n}\mu(B_\rho(\xi)) &- \int_{B_\rho(\xi)\setminus B_\sigma(\xi)} \frac{|(Dr)^{\perp}|^2}{r^n}\,d\mu \\ &- \frac{1}{n}\int_{B_\rho(\xi)} (r_\sigma^{-n} - \rho^{-n})\langle \underline{H}, x-\xi\rangle\,d\mu\,. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Es soll nun kurz untersucht werden, welche Folgerungen aus (2.30) gewonnen werden können, wenn man Beschränktheit oder L^p-Abschätzungen für $\underline{H}$ annimmt.

Theorem 2.3.7 *Sei $\xi \in U$, $0 < \alpha \leq 1$, $\Lambda \geq 0$, und es sei*

$$\alpha^{-1}\int_{B_\rho(\xi)} |\underline{H}|\,d\mu \leq \Lambda\,(\rho/R)^{\alpha-1}\,\mu(B_\rho(\xi)) \quad \forall\ \rho \in (0,R)\,, \tag{i}$$

so dass $\overline{B}_R(\xi) \subset U$. Dann ist $e^{\Lambda R^{1-\alpha}\rho^{\alpha}}\rho^{-n}\mu(B_\rho(\xi))$ eine monoton wachsende Funktion in $\rho \in (0,R)$, und es gilt sogar:

$$e^{\Lambda R^{1-\alpha}\sigma^{\alpha}}\sigma^{-n}\mu(B_\sigma(\xi)) \leq e^{\Lambda R^{1-\alpha}\rho^{\alpha}}\rho^{-n}\mu(B_\rho(\xi)) - \int_{B_\rho(\xi)\setminus B_\sigma(\xi)} \frac{|(Dr)^{\perp}|^2}{r^n}\,d\mu \tag{ii}$$

für alle $0 < \sigma < \rho \leq R$. *Analog gilt*

$$e^{-\Lambda R^{1-\alpha}\sigma^\alpha}\sigma^{-n}\mu(B_\sigma(\xi)) \geq e^{-\Lambda R^{1-\alpha}\rho^\alpha}\rho^{-n}\mu(B_\rho(\xi)) - \int_{B_\rho(\xi)\setminus B_\sigma(\xi)} \frac{|(Dr)^\perp|^2}{r^n}\,d\mu \qquad \text{(iii)}$$

für alle $o < \sigma < \rho \leq R$.

Beweis: Um (ii) zu erhalten, multiplizieren wir (2.30) mit dem integrierenden Faktor $e^{\Lambda R^{1-\alpha}\sigma^\alpha}$, dann folgt mit Hilfe von (i), dass

$$\frac{d}{d\rho}\left(e^{\Lambda R^{1-\alpha}\sigma^\alpha}\rho^{-n}\mu(B_\rho(\xi))\right) \geq \frac{d}{d\rho}\int_{B_\rho(\xi)} \frac{|(Dr)^\perp|^2}{r^n}\,d\mu$$

im Sinne von Distributionen gilt. Um (iii) zu erhalten, verfährt man analog mit dem integrierenden Faktor $e^{-\Lambda R^{1-\alpha}\sigma^\alpha}$.

Theorem 2.3.8 *Sei* $\xi \in U$, $\left(\int_{B_R(\xi)} |\underline{H}|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \Gamma$, *so dass* $\overline{B}_R \subset U$ *und* $p > n$, *dann gilt*

$$\left(\sigma^{-n}\mu(B_\sigma(\xi))\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\rho^{-n}\mu(B_\rho(\xi))\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\Gamma}{p-n}\left(\rho^{1-\frac{n}{p}} - \sigma^{1-\frac{n}{p}}\right) \qquad (2.34)$$

für alle $0 < \sigma < \rho \leq R$.

Beweis: Indem wir in (2.28) die Hölder-Ungleichung anwenden, erhalten wir (Man beachte $J'(\rho) \geq 0$, da $J(\rho)$ monoton wachsend in ρ ist):

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^{-n}I(\rho)) \geq -\rho^{-n}\ \Gamma(I(\rho))^{1-\frac{1}{p}} \quad \forall\ \rho \in (0, R).$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^{-n}I(\rho))^{\frac{1}{p}} \geq -\frac{\Gamma}{p}\,\rho^{-\frac{n}{p}}\,.$$

Indem man nun wieder über (σ, ρ) integriert und ε gegen 0 gehen läßt, erhält man die erwünschte Ungleichung.

Korollar 2.3.9 *Sei* $\underline{H} \in L^p_{loc}(\mu)$ *in* U *für* $p > n$, *dann existiert die Dichte* $\Theta^n(\mu, x) = \lim_{\rho\searrow 0}\frac{\mu(\overline{B}_\rho(x))}{\omega_n\rho^n}$ *an jedem Punkt* $x \in U$, *und* $\Theta^n(\mu, .)$ *ist eine oberhalbstetige Funktion auf* U, *das heißt*

$$\Theta^n(\mu, x) \geq \limsup_{y\to x}\Theta^n(\mu, y) \quad \forall\ x \in U\ . \qquad (2.35)$$

Beweis: (2.34) sagt uns, dass

$$(\rho^{-n}\mu(B_\rho(\xi)))^{\frac{1}{p}} + \frac{\Gamma}{p-n}\,\rho^{1-\frac{n}{p}}$$

eine monoton wachsende Funktion in ρ ist. Damit existiert $\lim_{\rho\searrow 0}\frac{\mu(B_\rho(x))}{\rho^n}$ (und ist gleich $\lim_{\rho\searrow 0}\frac{\mu(\overline{B}_\rho(x))}{\rho^n}$).

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $0 < \rho < \varepsilon$, so dass $B_\rho \Subset U$ und

$$\left(\omega_n^{-1}\rho^{-n}\mu(B_\rho(x))\right)^{\frac{1}{p}} \leq (\Theta^n(\mu,x))^{\frac{1}{p}} + \varepsilon\,.$$

Sei nun $\eta \in (0,1)$ und $\sigma \leq (1-\eta)\rho$. Dann gilt wegen (2.34)

$$\begin{aligned}\left(\sigma^{-n}\mu(B_\sigma(y))\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left((1-\eta)^{-n}\rho^{-n}\mu(B_{(1-\eta)\rho}(y))\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\Gamma}{p-n}\left((1-\eta)\rho\right)^{1-\frac{n}{p}} \\ &\leq \left((1-\eta)^{-n}\rho^{-n}\mu(B_\rho(y))\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\Gamma}{p-n}\,\rho^{1-\frac{n}{p}}\end{aligned}$$

für alle $y \in B_{\eta\rho}(x)$. Für $\sigma \searrow 0$ erhalten wir dann

$$(\Theta^n(\mu,y))^{\frac{1}{p}} \leq \left((\omega_n^{-1}\rho^{-n}\mu(B_\rho(y))\right)^{\frac{1}{p}}(1-\eta)^{-\frac{n}{p}} + \frac{\Gamma}{\omega_n(p-n)}\,\rho^{1-\frac{n}{p}}\,.$$

Wähle nun $\eta \in (0,1)$ so, dass

$$(1-\eta)^{-\frac{n}{p}}\left((\Theta^n(\mu,x))^{\frac{1}{p}} + \varepsilon\right) \leq (\Theta^n(\mu,x))^{\frac{1}{p}} + 2\varepsilon\,.$$

Dies ergibt dann

$$(\Theta^n(\mu,y))^{\frac{1}{p}} \leq (\Theta^n(\mu,x))^{\frac{1}{p}} + 2\varepsilon + \frac{\Gamma}{\omega_n(p-n)}\,\varepsilon^{1-\frac{n}{p}}$$

für alle $y \in B_{\eta\rho}(x)$. Damit ist die Oberhalbstetigkeit bewiesen.

2.4 Das Regularitätstheorem von Allard

In diesem Abschnitt soll das Regularitätstheorem von Allard für rektifizierbare n-Varifaltigkeiten vorgestellt werden. Da der Beweis dieses Theorems etwas länger ist und damit den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, soll dafür auf die entsprechende Literatur verwiesen werden. Wir wollen aber versuchen darzulegen, welche Ergebnisse in den Beweis eingehen und versuchen, die Strukturierung des Beweises einsichtig zu machen.

Sei im Folgenden immer $V = \underline{v}(M,\theta)$ eine rektifizierbare n-Varifaltigkeit mit verallgemeinerter mittlerer Krümmung $\underline{H}$ in U.

Voraussetzungen I: Seien $\varepsilon, \alpha \in (0,1)$, $\rho > 0$ fest, $p > n$ und T ein n-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^{n+k}$. Es sei weiter

$$\left.\begin{array}{c} 1 \leq \theta \leq 1+\varepsilon \quad \mu\text{-f.ü. in } U, \quad \xi \in \operatorname{supp}\mu \\ B_\rho \subset U, \quad \omega_n^{-1}\rho^{-n}\mu(B_\rho(\xi)) \leq 2(1-\alpha), \quad E_*(\xi,\rho,T) \leq \varepsilon \end{array}\right\} \tag{2.36}$$

wobei

$$E(\xi,\rho,T) := \frac{1}{2}\,\rho^{-n}\int_{B_\rho(\xi)} |p_{T_xM} - p_T|^2\,d\mu_V \tag{2.37}$$

und p_{T_xM}, p_T die orthogonalen Projektionen $\mathbb{R}^{n+k} \to T_xM$, T sind, $|p_{T_xM} - p_T|^2$ bezeichnet hier *spur* $(p_{T_xM} - p_T)^2$. Dies bedeutet, dass $E(\xi, \rho, T)$ die mittlere quadratische Abweichung des approximativen Tangentialraums T_xM von einem gegeben Unterraum T misst. E wird als der *Tilt-Excess* von V über $B_\rho(\xi)$ bezeichnet. Darüber hinaus setzt man

$$E_*(\xi, \rho, T) := \max\left\{E(\xi, \rho, T), \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{B_\rho(\xi)} |\underline{H}|^p \, d\mu_V\right)^{\frac{2}{p}} \rho^{2(1-\frac{n}{p})}\right\}, \tag{2.38}$$

Theorem 2.4.1 (Allard, Version 1, siehe [Sim83] Ch.5) *Seien $\alpha \in (0,1)$ und $p > n$ gegeben. Es existieren Konstanten $\varepsilon = \varepsilon(n,k,\alpha,p)$, $\gamma = \gamma(n,k,\alpha,p) \in (0,1)$, für die gilt: Wenn die Voraussetzungen (2.36) mit obigem ε und $\rho > 0$, $T = \mathbb{R}^n$ und $\xi = 0$ erfüllt sind, dann existiert $u \in C^{1,1-\frac{n}{p}}(\overline{B}^n_{\gamma\rho}; \mathbb{R}^k)$ mit $u(0) = 0$ und*

$$\mathit{supp} V \cap B_{\gamma\rho}(0) = \mathit{graph}\, u \cap B_{\gamma\rho}(0) \tag{i}$$

und

$$\begin{aligned}\rho^{-1} \sup |u| + \sup |Du| + \rho^{1-\frac{n}{p}} \sup_{\substack{x,y \in B^n_{\gamma\rho}(0) \\ x \neq y}} \frac{|Du(x) - Du(y)|}{|x-y|^{1-\frac{n}{p}}} \\ \leq C\left(E^{\frac{1}{2}}(0, \rho, \mathbb{R}^n) + \left(\int_{B_\rho(0)} |\underline{H}|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \rho^{1-\frac{n}{p}}\right).\end{aligned} \tag{ii}$$

Nun die zweite Version des Theorems von Allard:

Voraussetzungen II: Sei $\delta \in (0, 1/2)$ und es gelte

$$\left.\begin{aligned} 1 \leq \theta \ \ \mu\text{-f.ü. in } U, \ \ 0 \in \operatorname{supp} V, \ \ B_\rho(0) \subset U \\ \omega_n^{-1} \rho^{-n} \mu(B_\rho(0)) \leq 1 + \delta, \ \ \left(\int_{B_\rho(0)} |\underline{H}|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \rho^{1-\frac{n}{p}} \leq \delta \end{aligned}\right\} \tag{2.39}$$

Theorem 2.4.2 (Allard, Version 2, siehe [Sim83] Ch. 5) *Sei $p > n$ beliebig. Dann existieren $\delta = \delta(n,k,p)$, $\gamma = \gamma(n,k,p) \in (0,1)$, für die gilt: Wenn die Voraussetzungen (2.39) mit obigem δ erfüllt sind, existieren eine lineare Isometrie q des $\mathbb{R}^{n+k}$ und ein $u \in C^{1,1-\frac{n}{p}}(\overline{B}^n_{\gamma\rho}; \mathbb{R}^k)$ mit $u(0) = 0$, so dass*

$$\mathit{supp} V \cap B_{\gamma\rho}(0) = q(\mathit{graph}\, u) \cap B_{\gamma\rho}(0) \tag{1}$$

und

$$\rho^{-1} \sup |u| + \sup |Du| + \rho^{1-\frac{n}{p}} \sup_{\substack{x,y \in B^n_{\gamma\rho}(0) \\ x \neq y}} \frac{|Du(x) - Du(y)|}{|x-y|^{1-\frac{n}{p}}} \leq C\, \delta^{\frac{1}{4n}}. \tag{2}$$

Beweisskizze zum Beweis der 1. Version:

Der Beweis des Allard-Theorems greift immer wieder auf die Ergebnisse des letzten Abschnitts über Monotonieformeln zurück, wie auch an einigen Stellen auf die definierende Gleichung der verallgemeinerten mittleren Krümmung (2.22). Desweiteren gehen

Ergebnisse über Lipschitz-stetige und harmonische Funktionen maßgeblich in den Beweis mit ein.

In einem ersten Schritt wird gezeigt, dass sich $\operatorname{supp}\mu_V \cap B_{\beta\rho/2}$ gut (im Maßtheoretischen Sinn) als Teilmenge eines Graphen einer Lipschitz-Funktion f darstellen lässt, wobei die Abweichung durch den entsprechenden Tilt-Excess kontrolliert ist.

Im zweiten Schritt, dem *Tilt-Excess Decay Lemma* ([Sim83] §22), wird nun zu Beginn gezeigt, dass sich *graph* f hinreichend gut durch den Graphen einer harmonischen Funktion u annähern lässt. Man zeigt insbesondere, dass der Abstand (im L^2-Sinne) zwischen *graph* u und *graph* f 'viel kleiner' ist als der Abstand zwischen $supp\mu_V|_{B_{\beta\rho}/2}$ und $T_{x_0}V = \mathbb{R}^n$.

Da aber wiederum der Graph einer harmonischen Funktion über eine Kugel mit Mittelpunkt 0 besonders gut durch seinen Tangentialraum L in $(0, u(0))$ approximiert wird, kann man zeigen, dass der Tilt-Excess von $supp\mu_V$ relativ zu der Ebene L über einen kleineren Ball $B_{\eta\rho}(0)$ im Verhältnis viel kleiner ist als der Tilt-Excess von μ_V über $B_{\beta\rho}$ relativ zur eigentlichen Ebene $\mathbb{R}^n$.

Im dritten Schritt des Beweises wird die obige Aussage iteriert, wodurch gezeigt werden kann, dass $E(0, \sigma, \mathbb{R}^n)$ wie eine positive Potenz von σ abfällt. Dies führt zu dem Ergebnis, dass lokal $supp\mu_V$ mit *graph* f übereinstimmt. Die $C^{1,1-\frac{n}{p}}$-Regularität dieses Graphen folgt dann ziemlich direkt, indem die obige Argumentation auf Bälle $B_\sigma(\xi)$ mit unterschiedlichen Mittelpunkten ξ ($\xi \in \operatorname{supp}\mu_V$, $|\xi|$ klein) angewendet wird.

Zum Beweis der 2. Version:

Wir wollen darlegen, wie man die zweite Version auf den Fall der ersten Version zurückführen kann.

Man zeigt anhand der Monotonieformel ([Sim83], 24.3), dass die Dichte (und damit auch θ) nahe bei 1 liegt, und dass $supp\mu_V$ (in einem kleineren Ball $B_{\beta\rho}(0)$) nahe bei einem n-dimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^{n+k}$ liegt. Anhand eines kleinen Lemmas ([Sim83], 22.2), lässt sich daraus folgern, dass der Tilt-Ecess von μ_V über $B_{\beta\rho/2}$ klein ist und damit wird die erste Version anwendbar.

Kapitel 3

Regularität von Minimalflächen

3.1 BV-Funktionen und Caccioppoli-Mengen II

3.1.1 Weitere Eigenschaften

In diesem Abschnitt sollen weitere wichtige Eigenschaften von BV-Funktionen und Caccioppoli-Mengen vorgestellt werden, die für die späteren Abschnitte von Bedeutung sind. Teilweise werden nur die wichtigsten Resultate kurz dargestellt, für eine genauere Behandlung und einige der Beweise wird auf die entsprechende Literatur verwiesen. Darüber hinaus zeigen wir die Existenz von minimalen Caccioppoli-Mengen.

Für die Definition von BV-Funktionen soll auf Abschnitt 2.2 verwiesen werden. Zusätzlich sollen folgende Schreibweisen verwendet werden:

Sei $u \in BV_{\text{loc}}(U)$, $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $\nu \cdot \mu$ das zugeordnete Radonmaß. Dann schreibt man auch

$$Df = \nu{\cdot}\mu \ , \ |Df| = \mu \ ;$$

dies heißt im Falle einer Caccioppoli-Menge E:

$$D\chi_E = \nu_E{\cdot}\mu_E \ , \ |D\chi_E| = \mu_E.$$

Lemma 3.1.1 *Sei E eine Caccioppoli-Menge in $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen. Dann gilt*

$$\mathit{supp}\, \mu_E \subset \partial E. \tag{3.1}$$

Beweis: Da

$$\operatorname{supp} \mu_E = \mathbb{R}^n \setminus \cup\{A : A \text{ offen, so dass } \forall\, g \in C_0^1(A;\mathbb{R}^{n+1}) \text{ gilt: } \int \langle g, \nu \rangle \, d\mu_E = 0\}\,,$$

folgt: Sei $x \notin \partial E$, damit existiert $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, so dass $x \in A$ und $A \subset E$ oder $A \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus E$. Falls $A \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus E$ ist, dann ist $\chi_E = 0$ auf A, woraus sich ergibt, dass

$$\int \langle g, \nu \rangle \, d\mu_E = -\int \chi_E \operatorname{div} g \, dx = 0 \quad \text{für alle } g \in C_0^1(A;\mathbb{R}^{n+1}).$$

Falls $A \subset E$ ist, ist $\chi_E = 1$ auf A, und wiederum ergibt sich

$$\int \langle g, \nu \rangle \, d\mu_E = -\int \operatorname{div} g \, dx = 0 \quad \text{für alle } g \in C_0^1(A; \mathbb{R}^{n+1}).$$

Daraus folgt dann, dass $x \in A \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \operatorname{supp} \mu_E$. □

Bemerkung 3.1.2 Aus Theorem 2.2.4 wissen wir, dass $\mu_E = \mathcal{H}^n \llcorner \partial^* E$ und dass $\Theta^n(\mu_E, x) = 1$ für alle $x \in \partial^* E$, womit $\partial^* E \subset \operatorname{supp} \mu_E$ und $\partial^* E \subset \partial E$ ist.

Theorem 3.1.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $\{f_j\}$ eine Folge von Funktionen in $BV(\Omega)$, die in $L^1_{loc}(\Omega)$ gegen eine Funktion f konvergiert. Dann gilt:*

$$\int_\Omega |Df| \le \liminf_{j \to \infty} \int_\Omega |Df_j|. \tag{3.2}$$

Beweis: Zu Beginn sei angemerkt, dass für beliebige $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ die linke Seite wie folgt definiert ist:

$$\int_\Omega |Df| := \sup\{\int f \operatorname{div} g \, dx \ : \ g \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^{n+1}) \text{ und } |g(x)| \le 1\}.$$

Sei $g \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^{n+1}), \ |g| \le 1$. Dann gilt:

$$\int_\Omega f \operatorname{div} g \, dx = \lim_{j \to \infty} \int_\Omega f_j \operatorname{div} g \, dx \le \liminf_{j \to \infty} \int_\Omega |Df_j|.$$ □

Bemerkung 3.1.4 Anhand dieses Lemmas sieht man sofort, dass aus der gleichmäßigen Beschränktheit der $|Df_j|$ in $BV(\Omega)$ bzw. $BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ folgt, dass f ebenfalls ein Element aus $BV(\Omega)$ beziehungsweise $BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ist.

Indem man eine Funktion f in $BV(\Omega)$ durch Faltung mit einem entsprechenden symmetrischen Mollifier $\eta_\varepsilon(x)$ glättet, erhält man das folgende Resultat:

Theorem 3.1.5 *Sei $f \in BV(\Omega)$, dann existieren $\{f_j\} \subset C^\infty(\Omega)$, so dass:*

$$\lim_{j \to \infty} \int_\Omega |f - f_j| \, dx = 0 \quad \textit{und} \tag{i}$$

$$\lim_{j \to \infty} \int_\Omega |Df_j| \, dx = \int_\Omega |Df| \ . \tag{ii}$$

Für einen Beweis siehe [Giu84] Theorem 1.17.

Bemerkung 3.1.6 Für $f \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ erhält man (i) in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und für (ii) erhält man die Konvergenz von $|Df_j| \to |Df|$ im Sinne von Radonmaßen. (Siehe dafür zum Beispiel [Sim83] Lemma 6.2). Man beachte aber, dass man hier nicht $Df_j \to Df$ erhält.

Theorem 3.1.7 (Kompaktheit für BV-Funktionen) *Sei Ω eine beschränkte offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$, deren Rand hinreichend regulär ist, so dass der Satz von Rellich gilt (Lipschitzstetigkeit genügt). Sei $\{f_k\} \subset BV(\Omega)$ und*

$$\sup_{k \ge 1} \left(\|f_k\|_{L^1(\Omega)} + \int_\Omega |Df_k| \right) < M < \infty. \tag{3.3}$$

Dann existiert $f \in BV(\Omega)$, so dass $f_{k'} \to f$ in $L^1(\Omega)$ für eine Teilfolge $\{f_{k'}\} \subset \{f_k\}$.

Beweis: Wegen des vorherigen Theorems können wir $\tilde{f}_j \in C^\infty(\Omega)$ wählen, so dass gilt:

$$\int_\Omega |\tilde{f}_j - f_j|\, dx < \frac{1}{j} \quad \text{und} \quad \|\tilde{f}_j\| + \int_\Omega |D\tilde{f}_j| \leq M + 2.$$

Nach dem Satz von Rellich (siehe z.B. [Ada75]) ist $\{\tilde{f}_j\}$ relativ kompakt in $L^1(\Omega)$, das heißt es existiert eine Teilfolge, die gegen eine Funktion f in $L^1(\Omega)$ konvergiert. Wegen Theorem 3.1.3 ist $f \in BV(\Omega)$ und $f_{j'} \to f$ in $L^1(\Omega)$. $\square$

Anhand dieses Theorems, zusammen mit der Unterhalbstetigkeit bei lokaler Konvergenz (Theorem 3.1.3), kann man leicht die Existenz minimaler Caccioppoli-Mengen zeigen.

Die Differenz zweier Mengen F und E sei bezeichnet mit:

$$F \triangle E := (F \setminus E) \cup (E \setminus F). \tag{3.4}$$

Theorem 3.1.8 (Existenz von Minimalflächen) *Sei Ω eine beschränkte, offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$ und L sei eine Caccioppoli-Menge in $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann existiert eine Menge $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$, die mit L außerhalb von Ω übereinstimmt, so dass*

$$\int |D\chi_E| \leq \int |D\chi_F| \quad \text{für alle } F \subset \mathbb{R}^{n+1} \text{ mit } F \triangle L \subset \Omega. \tag{3.5}$$

Beweis: Da Ω als beschränkt vorausgesetzt ist, existiert ein $R > 0$, so dass $\Omega \Subset B_R$. Wegen $F \triangle L \subset \Omega$ gilt

$$\int |D\chi_F| = \int_{B_R} |D\chi_F| + \int_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus B_R} |D\chi_L|\,.$$

Damit genügt es zu zeigen, dass eine Menge E in B_R existiert mit $E \triangle L \subset \Omega$, die folgende Bedingung erfüllt:

$$\int_{B_R} |D\chi_E| \leq \int_{B_R} |D\chi_F| \quad \text{für alle } F \subset B_R \text{ mit } F \triangle L \subset \Omega.$$

Da $\int_{B_R} |D\chi_F|$ von unten durch 0 beschränkt ist, existiert ein Infimum für dieses Funktional. Man wähle nun eine minimierende Folge $\{E_j\}$, damit ist $\int_{B_R} |D\chi_{E_j}|$ und $\int_{B_R} |\chi_{E_j}|\, dx$ gleichmäßig beschränkt. Theorem 3.1.7 liefert eine Teilfolge $\{\chi_{E_{j'}}\}$, die in $L^1(B_R)$ gegen eine Funktion f konvergiert. Da $\chi_{E_{j'}}(x) \to f(x)$ für fast alle $x \in B_R$, und da $\operatorname{Im} \chi_{E_{j'}} \subset \{0, 1\}$ ist , kann man annehmen, dass f die charakteristische Funktion einer Menge E mit $E \triangle L \subset \Omega$ ist. Theorem 3.1.3 zeigt, dass E das Minimum annimmt. $\square$

Aus den Sobolev-Ungleichungen für C_0^∞- und C^∞-Funktionen erhält man durch Approximation entsprechende Ungleichungen für BV-Funktionen, siehe z.B. [Giu84] Theorem 1.28. Eine direkte Folgerung daraus sind die Isoperimetrischen Ungleichungen:

Theorem 3.1.9 (Isoperimetrische Ungleichungen) *Sei E eine beschränkte Caccioppoli-Menge in $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann gilt:*

$$|E|^{\frac{n}{n+1}} \leq c_1(n) \int |D\chi_E|, \tag{3.6}$$

$$min\,\{|E \cap B_\rho|, |(\mathbb{R}^{n+1} \setminus E) \cap B_\rho|\}^{\frac{n}{n+1}} \leq c_2(n) \int_{B_\rho} |D\chi_E|. \tag{3.7}$$

Für einen Beweis siehe [Giu84] Korollar 1.29.

3.1.2 Spuren von BV-Funktionen

Da nach Definition $BV(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ ist, betrachten wir eigentlich nicht Funktionen sondern Äquivalenzklassen von Funktionen. Damit macht die Einschränkung einer Funktion f aus $BV(\Omega)$ auf eine Nullmenge nur wenig Sinn, es ist aber wichtig, von den Werten einer BV-Funktion auf dem Rand einer Menge sprechen zu können, auch wenn der Rand eine Nullmenge ist. Offensichtlich müssen bei solch einer Definition nicht nur die Werte der Funktion auf dem Rand, sondern auch die in einer Umgebung des Randes mit in Betracht gezogen werden.

Bemerkung 3.1.10 Anhand der Definition von BV-Funktionen sieht man leicht, dass $W^{1,1}(\Omega) \subset BV(\Omega)$. Aus der Theorie der Sobolev-Räume wissen wir, dass man, falls Ω einen lokal Lipschitz-stetigen Rand besitzt, die Spur einer $W^{1,1}$-Funktion auf dem Rand $\partial\Omega$ definieren kann. Die hier im Folgenden definierte Spur für BV-Funktionen stimmt mit der für $W^{1,1}$-Funktionen überein.

Da für die Definition der Spur einige technische Vorarbeiten nötig sind, sollen hier nur die wichtigsten Resultate vorgestellt werden. Für eine vollständigere Abhandlung sei auf [Giu84] Kapitel 2 verwiesen.

Theorem 3.1.11 *Sei Ω eine beschränkte, offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Lipschitz-stetigem Rand $\partial\Omega$ und sei $f \in BV(\Omega)$. Dann existiert eine Funktion $\varphi \in L^1(\partial\Omega)$, so dass für $\mathcal{H}^n$-fast alle $x \in \partial\Omega$*

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^{-n-1} \int_{B_\rho(x) \cap \Omega} |f(x) - \varphi(x)| \, dx = 0 \tag{3.8}$$

und für alle $g \in C_0^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1})$

$$\int_\Omega f \, div \, g \, dx = -\int_\Omega \langle g, Df \rangle + \int_{\partial\Omega} \varphi \, \langle g, \vec{n} \rangle \, d\mathcal{H}^n, \tag{3.9}$$

gilt, wobei $\vec{n}$ die äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$ bezeichne. (Diese existiert nach dem Theorem von Rademacher $\mathcal{H}^n$-f.ü. auf $\partial\Omega$).

Theorem 3.1.12 *Sei Ω eine beschränkte, offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Lipschitz-stetigem Rand $\partial\Omega$, und seien $f_j, f \in BV(\Omega)$, so dass*

$$\lim_{j \to \infty} \int_\Omega |f_j - f| \, dx = 0 \quad \textit{und} \tag{3.10}$$

$$\lim_{j \to \infty} \int_\Omega |Df_j| = \int_\Omega |Df|. \tag{3.11}$$

Dann gilt, wenn φ_j und φ die Spuren von f_j und f bezeichnen, dass

$$\lim_{j \to \infty} \int_{\partial\Omega} |\varphi_j - \varphi| \, d\mathcal{H}^n = 0. \tag{3.12}$$

Bemerkung 3.1.13 Sei $A \Subset \Omega$ eine offene Menge mit Lipschitz-stetigem Rand ∂A, dann besitzen $f|_A$ und $f|_{\Omega \setminus \overline{A}}$ (die zu $BV(A)$ und $BV(\Omega \setminus \overline{A})$ gehören) Spuren auf ∂A, die wir mit f_A^- und f_A^+ bezeichnen wollen. Es gilt

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^{-n-1} \int_{B_\rho(x) \cap A} |f(z) - f_A^-(x)| \, dz = 0 \quad \text{für } \mathcal{H}^n\text{- fast alle } x \in \partial A, \tag{3.13}$$

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^{-n-1} \int_{B_\rho(x) \setminus A} |f(z) - f_A^+(x)| \, dz = 0 \quad \text{für } \mathcal{H}^n\text{- fast alle } x \in \partial A, \tag{3.14}$$

und darüber hinaus (siehe [Giu84] Remark 2.13)

$$\int_{\partial A} |f_A^+ - f_A^-| \, d\mathcal{H}^n = \int_{\partial A} |Df| \tag{3.15}$$

und

$$Df = (f_A^+ - f_A^-)\nu \, d\mathcal{H}^n \quad \text{auf } \partial A, \tag{3.16}$$

wobei ν hier die äußere Einheitsnormale bezeichnet.

Einen wichtigen Spezialfall stellt $\Omega = B_R$ und $A = B_\rho$ mit $\rho < R$ dar. Die entsprechenden Spuren seien mit f_ρ^+ und f_ρ^- bezeichnet. Dann folgt aus (3.15) für fast alle ρ:

$$f_\rho^+(x) = f_\rho^-(x) = f(x) \quad \mathcal{H}^n\text{-f.ü. auf } \partial B_\rho \tag{3.17}$$

und ebenso

$$\lim_{\substack{t \to \rho^- \\ t \notin N}} f(tx) = f_\rho^-(\rho x) \quad \text{in } L^1(\partial B_1), \tag{3.18}$$

wobei N eine passend gewählte Nullmenge in $[0, R]$ sei.

3.2 Minimalflächen und die Regularität der Reduced Boundary

Dieser Abschnitt befasst sich mit minimalen Caccioppoli-Mengen, deren Existenz in Theorem 3.1.8 gezeigt wurde. Anhand des Theorems 2.2.4 von De Giorgi wissen wir, dass die Reduced Boundary $\partial^* E$ einer Caccioppoli-Menge E eine Teilmenge von $\operatorname{supp} \mu_E$ ist. Das Lemma 3.1.1 liefert nun, dass $\partial^* E \subset \partial E$ ist.

Für minimale Caccioppoli-Mengen soll nun gezeigt werden, dass $(\partial^* E, 1)$, aufgefasst als rektifizierbare n-Varifaltigkeit, verschwindende mittlere Krümmung $\underline{H}_{\partial^* E} \equiv 0$ besitzt. Anhand des Theorems von Allard wollen wir daraufhin zeigen, dass alle Punkte von $\partial^* E$ reguläre Punkte in ∂E sind, das heißt, dass es zu jedem Punkt $p \in \partial^* E$ eine Umgebung U gibt, in der $\partial^* E$ eine $C^{1,\alpha}$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

Da alle BV-Funktionen nur bis auf Nullmengen definiert sind, betrachten wir eigentlich Äquivalenzklassen von Caccioppoli-Mengen. Um später Regularitätsaussagen über den Rand ∂E machen zu können, muss man einen entsprechend günstigen Vertreter solch einer Äquivalenzklasse wählen.

Proposition 3.2.1 *Sei $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Borelmenge, dann existiert eine Borelmenge $\tilde{E}$ mit $|E \triangle \tilde{E}| = 0$, so dass gilt:*

$$0 < |\tilde{E} \cap B_\rho(x)| < \omega_{n+1}\,\rho^{n+1} \quad \textit{für alle } x \in \partial\tilde{E} \textit{ und alle } \rho > 0. \tag{3.19}$$

Beweis: Setze

$$E_0 := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \text{es existiert ein } \rho > 0 \text{ mit } |E \cap B_\rho(x)| = 0\} \quad \text{und}$$

$$E_1 := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \text{es existiert ein } \rho > 0 \text{ mit } |E \cap B_\rho(x)| = \omega_{n+1}\rho^{n+1}\}.$$

Sei nun $x_0 \in E_0$, dann existiert ein $\rho > 0$ mit $|E \cap B_\rho(x)| = 0$. Sei wiederum $y \in B_\rho(x)$, $\rho_0 := \rho - |x_0 - y| > 0$, damit ist $B_{\rho_0}(y) \subset B_\rho(x_0)$ und $|B_{\rho_0}(y) \cap E| = 0$. Folglich ist $B_\rho(x_0) \subset E_0$ und E_0 ist offen. Analog zeigt man, dass E_1 ebenfalls offen ist.
Wir wollen nun zeigen, dass $|E_0 \cap E| = 0$ ist. Dazu wählen wir für jedes $x \in E_0$ ein $\rho_x > 0$ mit $|E \cap B_{\rho_x}(x)| = 0$. Dann ist $\{B_{\rho_x}(x) : x \in E_0\}$ eine offene Überdeckung von E_0 und es existiert (da $\mathbb{R}^{n+1}$parakompakt ist) eine Folge $\{x_i\} \subset E_0$, so dass

$$E_0 \subset \cup_{i=1}^\infty B_{\rho_i}(x_i) \text{ und } |E \cap B_{\rho_i}(x_i)| = 0,$$

woraus sich ergibt

$$|E \cap E_0| \leq |\cup_{i=1}^\infty (B_{\rho_i}(x_i) \cap E)| = 0\ .$$

Analog zeigt man, dass $|E_1 - E| = 0$ ist.
Man setzt nun $\tilde{E} := (E \cup E_1) \setminus E_0$. Dann gilt $|E \triangle \tilde{E}| = 0$, und da E_1 und E_0 offen sind, folgt aus $x \in \partial\tilde{E}$, dass $x \notin E_1 \cap E_0$ und damit dann (3.19). □

Bemerkung 3.2.2 Da im auf nächsten Abschnitt die Größe und insbesondere die Hausdorff-Dimension der singulären Menge $\partial E \setminus \partial^* E$ untersucht werden soll, sei im Folgenden immer vorausgesetzt, dass jede Caccioppoli-Menge (3.19) erfüllt.

Wir kommen nun zur eigentlichen Definition von minimalen Caccioppoli-Mengen, deren Existenz wir schon in Theorem 3.1.8 gezeigt haben.

Definition 3.2.3 *Sei $f \in BV(\Omega)$ und sei*

$$\Psi(f,\Omega) := \int_\Omega |Df| - \inf\{\int_\Omega |Dg| : g \in BV(\Omega),\ \textit{supp}\,(g-f) \Subset \Omega\}. \tag{3.20}$$

Für eine Caccioppoli-Menge E in Ω schreiben wir $\Psi(E,\Omega)$ anstelle von $\Psi(\chi_E,\Omega)$. Falls $\Psi(E,\Omega) = 0$, wird E als minimal in Ω bezeichnet.

Bemerkung 3.2.4 Im Falle von Caccioppoli-Mengen lässt sich obige Definition auch etwas anders schreiben:

$$\Psi(E,\Omega) = |D\chi_E|(\Omega) - \inf\{|D\chi_F|(\Omega) : F \triangle E \Subset \Omega\}. \tag{3.21}$$

Nun einige wichtige Eigenschaften lokal konvergenter Folgen von Caccioppoli-Mengen. (Dabei sagen wir $E_h \to E$ lokal in Ω wenn $\chi_{E_h} \to \chi_E$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$):

Proposition 3.2.5 *Seien $E, \{E_h\}$ Caccioppoli-Mengen in $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen. Dann gilt*

$$A_1 \subset A_2 \Subset \Omega \Rightarrow \Psi(E, A_1) \leq \Psi(E, A_2), \tag{i}$$

$$E_h \to E \text{ lokal in } \Omega \Rightarrow \Psi(E, \Omega) \leq \liminf_{h\to\infty} \Psi(E_h, \Omega), \tag{ii}$$

$$\left.\begin{array}{r} E_h \to E \text{ lokal in } \Omega \text{ und } \Psi(E_h, \Omega) \to \Psi(E, \omega) \\ \text{dann gilt auch } |D\chi_{E_h}|(A) \to |D\chi_E|(A) \\ \text{für alle } \; A \Subset \Omega, \; A \text{ offen mit } |D\chi_E|(\partial A) = 0 \end{array}\right\} \tag{iii}$$

Beweis: Zu (i):
Sei $A_1 \subset A_2$, dann gilt

$$|D\chi_E|(A_1) - \inf\{|D\chi_F|(A_1) : F \triangle E \Subset A_1\} = |D\chi_E|(A_2) - \inf\{|D\chi_F|(A_2) : F \triangle E \Subset A_1\},$$

woraus sich (i) ergibt.
Zu (ii):
Sei $E_h \to E$ lokal in Ω und F sei so gewählt, dass $F \triangle E \Subset \Omega$. Indem wir uns gegebenenfalls auf eine Teilfolge von $\{E_h\}$ beschränken, können wir eine offene Teilmenge $W \subset \Omega$ mit Lipschitz-stetigem Rand finden, so dass gilt: (siehe dazu die folgende Bemerkung)

$$F \triangle E \Subset W \Subset \Omega, \;\; |D\chi_{E_h}|(\partial W) = |D\chi_E|(\partial W) = 0 \;\; \forall\, h, \; \int_{\partial W} |\varphi_{E_h} - \varphi_E| \, d\mathcal{H}^n \to 0\,. \tag{$\diamond$}$$

Hierbei bezeichnen φ_{E_h}, φ_E die Spuren von χ_{E_h}, χ_E auf ∂W. Dann gilt für $F_h := (E_h \setminus W) \cup (F \cap W)$ nach (3.15):

$$|D\chi_{F_h}|(\Omega) = |D\chi_{E_h}|(\Omega \setminus W) + \int_{\partial W} |\varphi_{E_h} - \varphi_E| \, d\mathcal{H}^n + |D\chi_F|(W). \tag{$\star$}$$

Da aber auch $F_h \triangle E_h \Subset \Omega$ ist, bekommen wir

$$\Psi(E_h, \Omega) \geq |D\chi_{E_h}|(\Omega) - |D\chi_{F_h}|(\Omega) = |D\chi_{E_h}|(W) - |D\chi_F|(W) - \int_{\partial W} |\varphi_{E_h} - \varphi_E| \, d\mathcal{H}^n. \tag{$\star\star$}$$

Indem wir nun $h \to \infty$ betrachten, ergibt dies für jedes F mit $F \triangle E \Subset \Omega$

$$\liminf_{h\to\infty} \Psi(E_h, \Omega) \geq |D\chi_E|(W) - |D\chi_F|(W) = |D\chi_E|(\Omega) - |D\chi_F|(\Omega).$$

Dies folgt wegen ($\star$) und Theorem 3.1.3. Hiermit erhalten wir (ii).
Zu (iii):
Sei also $E_h \to E$ in Ω und $\Psi(E_h, \Omega) \to \Psi(E, \Omega)$, $A \Subset \Omega$ mit A offen und $|D\chi_E|(\partial A) = 0$. Dann wählen wir F, W, F_h wie oben, mit der zusätzlichen Bedingung, dass $A \Subset W$ ist. Aus ($\star\star$) erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
\Psi(E, \Omega) = \lim_{h\to+\infty} \Psi(E_h, \Omega) &\geq \limsup_{h\to+\infty} |D\chi_{E_h}|(W) - |D\chi_F|(W) \\
&\geq \limsup_{h\to+\infty} |D\chi_{E_h}|(A) + \liminf_{h\to+\infty} |D\chi_{E_h}|(W \setminus \overline{A}) - |D\chi_F|(W) \\
&\geq \limsup_{h\to+\infty} |D\chi_{E_h}|(A) + |D\chi_E|(W \setminus \overline{A}) - |D\chi_F|(W) \\
&= \limsup_{h\to+\infty} |D\chi_{E_h}|(A) - |D\chi_E|(\overline{A}) + |D\chi_E|(\Omega) - |D\chi_F|(\Omega).
\end{aligned}$$

Dies gilt wiederum für alle $F : F \triangle E \Subset \Omega$. Zusammen mit der Definition von $\Psi(E,\Omega)$ und der Vorraussetzung $|D\chi_E|(\partial A) = 0$ folgt

$$\limsup_{h\to+\infty} |D\chi_{E_h}|(A) \leq |D\chi_E|(\overline{A}) = |D\chi_E|(A).$$

Wenn wir noch

$$|D\chi_E|(A) \leq \liminf_{h\to+\infty} |D\chi_{E_h}|(A)$$

beachten, ergibt dies (iii). □

Bemerkung 3.2.6 (Zum Beweis von (ii)) Zu der Wahl einer Teilmenge $W \subset \Omega$ mit Lipschitz-stetigem Rand, die $(\diamond)$ erfüllt:
Sei $\operatorname{dist}(F \triangle E, \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega) = \varepsilon > 0$. Man setze dann

$$W := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : dist(x, F \triangle E) < \varepsilon/2\},$$

und wähle einen entsprechenden Mollifier η, so dass $\operatorname{supp}\eta \subset B_{\varepsilon/8}(0)$, und setze $\varphi := \chi_W * \eta$. Damit gilt

$$\operatorname{supp}(\varphi) \Subset \Omega, \quad \varphi \geq \chi_{F\triangle E} \text{ und } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Nach dem Satz von Sard können wir einen regulären Wert $y \in (0,1)$ von φ wählen. Dann gilt für $A_0 := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \varphi(x) > y\}$:

$$F \triangle E \Subset A_0 \Subset \Omega, \text{ und } \partial A_0 \text{ ist } C^\infty.$$

Anhand der Distanzfunktion auf ∂A_0 erhalten wir eine C^∞- Blätterung einer kleinen Tubenumgebung von ∂A_0 durch

$$\partial A_t := \partial\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \operatorname{dist}(x, \partial A_0) < t\}$$

für hinreichend kleine t. Insbesondere erfüllen die A_t die entsprechenden Vorraussetzungen wie A_0 und

$$|D\chi_{E_h}|(\partial A_t) = |D\chi_E|(\partial A_t) = 0 \text{ für alle } h$$

und für fast alle t. Indem man beachtet, dass für die Spuren von χ_E und χ_{E_h} auf den Rändern ∂A_t analoge Ergebnisse wie in (3.17) gelten, erhält man aus $E_h \to E$ anhand der Co-Area Formel

$$\lim_{h\to\infty} \int_{\partial A_t} |\varphi_{E_h} - \varphi_E| \, d\mathcal{H}^n = 0 \text{ für fast alle hinreichend kleinen } t.$$

Damit können wir t wählen, so dass $(\diamond)$ erfüllt ist. □

Im zweiten Teil dieses Abschnitts wollen wir nun zeigen, dass für eine minimale Caccioppoli-Menge E in Ω die Reduced Boundary $\partial^* E$ verschwindende verallgemeinerte mittlere Krümmung hat.

Sei dazu $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine minimale Caccioppoli-Menge in B_1, und $\{F_t\}$ sei eine Einparameterfamilie von Diffeomorphismen von $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, so dass $F_0 = Id_{\mathbb{R}^{n+1}}$ und die

Abbildungen $F_t - Id$ gleichmäßig kompakten Träger in B_1 haben.
Damit stimmen die Mengen $E_t := F_t(E) = \{F_t(x) : x \in E\}$ außerhalb von B_1 mit E überein, und es gilt (Man beachte, dass $\int_{B_1} |Du|$ für beliebige $u \in L^1(B_1)$ definiert ist):

$$\int_{B_1} |D\chi_E| \leq \int_{B_1} |D\chi_{E_t}|.$$

Es ist dann klar, dass unter Annahme hinreichender Differenzierbarkeit, die Funktion

$$A(t) := \int_{B_1} |D\chi_{E_t}|$$

ein lokales Minimum in 0 annimmt, und somit

$$\frac{d}{dt}A(t)\big|_{t=0} = 0 \ \text{ und } \ \frac{d^2}{dt^2}A(t)\big|_{t=0} \geq 0 \ \text{ gilt.} \tag{3.22}$$

Um in diesem Fall die erste Variation zu berechnen, benötigen wir folgende Transformationsformel.

Lemma 3.2.7 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f \in BV_{loc}(\Omega)$ und $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ sei ein Diffeomorphismus. Sei $A \Subset \Omega$ und sei $f_* := f \circ F^{-1}$, $\Omega_* := F(\Omega)$ und $A_* = F(A) \subset \Omega$. Dann gilt:*

$$\int_{A_*} |Df_*| = \int_A |H\, Df|, \tag{3.23}$$

wobei $H := |\det DF|(DF^{-1})^\top$.

Beweis: Sei $f \in C^1(\Omega)$ und $g \in C_0^1(A, \mathbb{R}^{n+1})$. Dann gilt mit $\phi := F^{-1}$:

$$\begin{aligned}\int \langle g_*, DF_* \rangle\, dx &= \int \langle g \circ \phi, D\phi^\top Df \circ \phi \rangle\, dx \\ &= \int \langle g, (D\phi^\top \circ F) Df \rangle |\det DF|\, dx = \int \langle g, H\, Df \rangle\, dx.\end{aligned} \tag{$*$}$$

Damit gilt (3.23) für $C^1(\Omega)$-Funktionen. Sei nun $f \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Aufgrund von Theorem 3.1.5 können wir f durch eine Folge von C^1-Funktionen $\{f_j\}$ approximieren, wobei insbesondere $f_{j*} \to f_*$ in $L^1(A_*)$. Und aufgrund von $(*)$ ergibt sich

$$\int \langle g_*, Df_* \rangle = \int \langle g, H\, Df \rangle = \int \langle g, H\, \nu \rangle\, |Df|.$$

Sei $g \in C_0^1(A; \mathbb{R}^{n+1})$, $|g| \leq 1$. Dann ist $|g_*| \leq 1$ und $\operatorname{supp} g_* \subset A_*$, so dass

$$\int \langle g, H\, \nu \rangle\, |Df| \leq \int_{A_*} |Df_*|.$$

Indem wir nun das Supremum über alle g, wie oben definiert, bilden, erhalten wir

$$\int_A |H\, Df| = \int_A |H\, \nu|\, |Df| \leq \int_{A_*} |Df_*|$$

Um die umgekehrte Ungleichung zu zeigen, wählen wir $\gamma \in C_0^1(A_*;\mathbb{R}^{n+1})$, $|\gamma| \leq 1$ und setzen $g := \gamma \circ F \in C_0^1(A;\mathbb{R}^{n+1})$. Dann gilt $g_* = \gamma$ und

$$\int \langle \gamma, Df_* \rangle = \int \langle g, H\,\nu \rangle\, |Df| \leq \int_A |H\,\nu|\, |Df|\,,$$

woraus dann

$$\int_{A_*} |Df_*| \leq \int_A |H\,\nu|\, |Df|$$

folgt. □

Anhand dieses Lemmas können wir nun leicht Formeln für die erste Variation ableiten. (Auch für die zweite Variation können nun einfach Formeln angegeben werden, wir werden dies aber im Folgenden nicht mehr benötigen.)
Sei nun F_t wieder eine Einparameterfamilie von Diffeomorphismen des $\mathbb{R}^{n+1}$mit $F_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$. Wir setzen $\phi_t := F_t^{-1}$. Es auch wieder vorausgesetzt, dass F_t =Id für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ außerhalb von $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gilt, wobei K kompakt ist. Für $A \supset K$ muss dann gelten, dass $A_{t*} = F_t(A) = A$. Mit dem obigen Lemma erhalten wir

$$\left\{ \frac{d}{dt} \int_A |Df_{*t}| \right\}_{t=0} = \int_A \langle \nu, \dot{H}_0\,\nu \rangle\, |Df|,$$

wobei $\dot{H}_0 := (dH/dt)|_{t=0}$.
Für $f = \chi_E$ und E_t definiert durch $\chi_{E_t} = (\chi_E)_{*t}$ haben wir $E_t = E$ außerhalb von $K \subset A$ und

$$\left\{ \frac{d}{dt} \int_A |D\chi_{E_t}| \right\}_{t=0} = \int_{A\cap\partial^* E} \langle \nu, \dot{H}_0\,\nu \rangle\, d\mathcal{H}^n. \tag{3.24}$$

Lemma 3.2.8 *Sei $F_t = Id_{\mathbb{R}^{n+1}} + t\cdot g$, wobei $g \in C_0^1(A;\mathbb{R}^{n+1})$. Dann gilt*

$$\left\{ \frac{d}{dt} \int_A |D\chi_{E_t}| \right\}_{t=0} = \int_{A\cap\partial^* E} \sum_{i=1}^{n+1} (D_i g_i - \nu_i \langle D g_i, \nu \rangle)\, d\mathcal{H}^n. \tag{3.25}$$

Beweis: Es gilt $DF_t = \mathrm{Id} - tDg$ und somit

$$(DF_t)^{-1} = \mathrm{Id} - tDg + O(t^2)$$

und

$$\det(DF_t) = 1 + t\ \mathrm{trace}(Dg) + O(t^2).$$

Daraus folgt

$$\dot{H}_0 = \mathrm{trace}(Dg) \cdot \mathrm{Id} - Dg^\top$$

und damit

$$\langle \nu, \dot{H}_0\,\nu \rangle = \mathrm{trace}(Dg) - \langle Dg\,\nu, \nu \rangle = \ \mathrm{trace}(Dg) - \sum_{i,j}^{n+1} D_i g_j\, \nu_j \nu_i$$

$$= \operatorname{trace}(Dg) - \sum_{j=1}^{n+1} \nu_j \langle Dg_j, \nu \rangle. \qquad \square$$

Bemerkung 3.2.9 Nach Theorem 2.2.4 existiert an jedem Punkt $x \in \partial^* E$ der approximative Tangentialraum und es gilt

$$T_x(\partial^* E) = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle y, \nu_E(x) \rangle = 0\}.$$

Für die orthogonale Projetion auf $T_x(\partial^* E)$ gilt somit $p_{T_x(\partial^* E)} = \mathrm{Id} - \nu \langle \nu, . \rangle$, was insbesondere liefert:

$$\nabla^{\partial^* E} g_i = p_{T_x(\partial^* E)}(Dg_i) = Dg_i - \nu \langle \nu, Dg_i \rangle \quad \text{und} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\partial^* E}(g) = \sum_{l=1}^{n+1} \langle e_l, \nabla^{\partial^* E} g_l \rangle &= \sum_{l=1}^{n+1} D_l g_l - \nu_l \langle \nu, Dg_l \rangle \\ &= \operatorname{trace}(Dg) - \sum_{l=1}^{n+1} \nu_l \langle \nu, Dg_l \rangle. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Damit folgt aus Lemma 3.2.8, dass für eine minimale Caccioppoli-Menge E in $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gilt

$$\int \operatorname{div}_{\partial^* E}(X)\, d\mu_E = \int_{\partial^* E} \operatorname{div}_{\partial^* E}(X)\, d\mathcal{H}^n = 0 \quad \text{für alle } X \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^{n+1}). \tag{3.28}$$

Die Definition 2.3.4 zeigt, dass die rektifzierbare n-Varifaltigkeit $(\partial^* E, 1)$ verschwindende verallgemeinerte Krümmung $\underline{H}_{\partial^* E} \equiv 0$ besitzt.

Zusammen mit dem Regularitätstheorem von Allard liefert dies nun die Regularität der Reduced Boundary.

Theorem 3.2.10 (Regularität der Reduced Boundary) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, Ω offen und E sei eine minimale Caccioppoli-Menge in Ω. Dann ist $\partial^* E$ eine $C^{1,\alpha}$-Hyperfläche, wobei $\alpha \in (0,1)$ beliebig ist.*

Beweis: Wir zeigen, dass die Voraussetzungen (2.39) für die zweite Version des Theorems von Allard erfüllt sind.
Nach Theorem 2.2.4 ist $\partial^* E$ abzählbar n-rektifizierbar und an jedem Punkt $x \in \partial^* E$ existiert der approximative Tangentialraum und hat Multiplizität 1. Da nach Bemerkung 3.2.9 $\underline{H}_{\partial^* E} \equiv 0$ ist, folgt aus der Monotonieformel, dass $\Theta^n(\mu_E, x)$ an jedem Punkt $x \in \partial^* E$ existiert. Da aber $\theta = 1$ ist, ist auch $\Theta^n(\mu_E, x) = 1$. Wie wir schon gesehen haben, gilt $\partial^* E \subset \operatorname{supp} \mu_E$. Sei nun $x \in \partial^* E$. Da $\Theta^n(\mu_E, x) = 1$, können wir $\rho > 0$ wählen, so dass (2.39) erfüllt ist. $\square$

3.3 Die singuläre Menge

In diesem Abschnitt soll die singuläre Menge $\Sigma := \partial E \setminus \partial^* E$ untersucht werden. Wir zeigen, dass die Folge von Mengen E_k, die entsteht, wenn man E in einem Punkt $x_0 \in \partial E$

'aufbläst', lokal gegen eine Menge C konvergiert. Darauf folgend kann gezeigt werden, dass C ein Kegel ist, und aus Proposition 3.2.5 folgt, dass wenn E mininal in Ω ist, so auch C. Ein Resultat von J.Simons zeigt, dass in $\mathbb{R}^n$ für $1 \leq n \leq 7$ keine miminalen Kegel mit einer isolierten Singularität in 0 existieren. Anhand dieses Ergebnises können wir dann zeigen, dass bis Dimension sieben ∂E eine $C^{1,\alpha}$-Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$ ist. In höheren Dimensionen kann man mit Hilfe einer Dimensionsreduktion, die auf eine Idee von H. Federer basiert, die Hausdorff-Dimension der singulären Menge abschätzen.

3.3.1 Minimale Kegel

Theorem 3.3.1 *Sei E eine minimale Caccioppoli-Menge in $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, so dass $0 \in \partial E$. Setze*

$$E_t := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : tx \in E\} \quad \textit{für alle } t > 0. \tag{3.29}$$

Dann existiert für jede Nullfolge $t_j \searrow 0$ eine Teilfolge $\{s_j\}$, so dass E_{s_j} lokal in $\mathbb{R}^{n+1}$ gegen eine Menge C konvergiert, die ein minimaler Kegel in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

Beweis: Dieses Theorem ist ein Spezialfall von Propositon 4.3.4 für fast minimale Flächen. Aufgrund dessen soll hier auf den dort ausgeführten Beweis verwiesen werden. □

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, dass die Frage der Existenz von minimalen Kegeln immer auf den Fall von Kegeln mit nur einer Singularität im Ursprung zurückgeführt werden kann.

Proposition 3.3.2 *Sei C ein minimaler Kegel in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der Spitze in 0 und sei $x_0 \in \partial C \setminus \{0\}$. Für $t > 0$ sei*

$$C_t := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0 + t(x - x_0) \in C\} = \eta_{x_0,t}(C) + x_0. \tag{3.30}$$

Dann existiert zu jeder Nullfolge $\{t_j\}$ eine Teilfolge $\{s_j\}$, so dass $C_j := C_{s_j}$ gegen einen minimalen Kegel Q konvergiert. Darüber hinaus ist Q ein Zylinder mit Achse durch 0 und x_0.

Beweis: Sei o.B.d.A. $x_0 = (0, 0, \dots, 0, a)$, $a \neq 0$. Dann gilt $\chi_{C_t}(x) = \chi_C(x_0 + t(x - x_0))$ und somit

$$\int_{B_\rho(x_0)} |D\chi_{C_t}| = t^{-n} \int_{B_{\rho t}(x_0)} |D\chi_C| = \rho^n \int_{B_1(x_0)} |D\chi_C|,$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Voraussetzung folgt, dass C ein Kegel ist. Das Kompaktheitstheorem 3.1.7 liefert nun lokal konvergente Teilfolgen; anhand eines Diagonalverfahrens erhält man daraus eine Teilfolge $\{s_j\}$, so dass C_j in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ gegen einen minimalen Kegel Q mit Spitze in x_0 konvergiert. (Benutze dazu Theorem 3.3.1). Man muss nun nachprüfen, dass Q ein Zylinder mit Achse durch 0 und x_0 ist. Anders formuliert heißt dies, dass $A \subset \mathbb{R}^n$ existiert mit $Q = A \times \mathbb{R}$. Da C ein Kegel mit Spitze in 0 ist, gilt $\langle x, D\chi_C(x)\rangle = 0$ (weil $D\chi_C(x) = \nu$ die innere Einheitsnormale an ∂C ist) und somit

$$aD_{n+1}\chi_C = -\langle x - x_0, D\chi_C\rangle, \text{ woraus folgt } |D_{n+1}\chi_C| \leq \frac{|x - x_0|}{|x_0|}|D\chi_C| \ .$$

Da C ein minimaler Kegel ist, gilt auch $\underline{H}_{\partial^* C} \equiv 0$. Die Monotonieformel (Theorem 2.3.7) sagt aus, dass $\rho^{-n} \int_{B_\rho(x_0)} |D\chi_C|$ eine monoton wachsende Funktion in ρ ist. Daraus ergibt sich zusammen mit der obigen Ungleichung

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho(x_0)} |D_{n+1}\chi_{C_t}| = t^{-n} \int_{B_{\rho t}(x_0)} |D_{n+1}\chi_C| &\leq \frac{t^{1-n}\rho}{|x_0|} \int_{B_{\rho t}(x_0)} |D\chi_C| \\ &= \frac{t\rho^{n+1}}{|x_0|}(t\rho)^{-n} \int_{B_{\rho t}(x_0)} |D\chi_C| \leq \frac{t\rho}{|x_0|} \int_{B_\rho(x_0)} |D\chi_C|\end{aligned}$$

für $0 < t \leq 1$. Damit folgt nun

$$\int_{B_\rho(x_0)} |D_{n+1}\chi_Q| \leq \liminf_{j\to\infty} \int_{B_\rho(x_0)} |D_{n+1}\chi_{t_j}| \leq \liminf_{j\to\infty} \frac{t_j\rho}{|x_0|} \int_{B_\rho(x_0)} |D\chi_C| = 0.$$

Sei nun $R > 0,\ 0 < s < t$, dann existieren nach Theorem 3.1.5 Funktionen $f_j \in C^\infty(B_R^n \times (s,t))$ mit

$$\lim_{j\to\infty} \int_{B_R^n\times(s,t)} |f_j - \chi_Q|\, dx = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{j\to\infty} \int_{B_R^n\times(s,t)} |Df_j|\, dx = \int_{B_R^n\times(s,t)} |D\chi_Q|.$$

Analog zu dem Beweis von Theorem 3.1.5 in [Giu84] kann man zeigen, dass außerdem gilt:

$$\lim_{j\to\infty} \int_{B_R^n\times(s,t)} |D_{n+1}f_j|\, dx = \int_{B_R^n\times(s,t)} |D_{n+1}\chi_Q|. \tag{$*$}$$

Nun gilt für solch ein f_j:

$$\int_{B_R^n} |f_j(y,s) - f_j(y,t)|\, d\mathcal{H}^n(y) = \int_{B_R^n} \left| \int_s^t D_{n+1}f(y,x)\, dx \right| d\mathcal{H}^n(y) \leq \int_{B_R^n\times(s,t)} |D_{n+1}f_j|\, dx. \tag{$**$}$$

Da nun aber

$$\lim_{j\to\infty} \int_{B_R^n\times(s,t)} |f_j - \chi_Q|\, dx = \lim_{j\to\infty} \int_s^t \left(\int_{B_R^n} |f_j(y,x) - \chi_Q(y,x)|\, dy \right) dx = 0$$

gilt, ergibt sich $f_j(y,x) \to \chi_Q(y,x)$ in $L^1(B_R^n)$ für fast alle $x \in (s,t)$. Damit, zusammen mit $(*)$ und $(**)$, sieht man, dass

$$\int_{B_R^n} |\chi_Q(y,s) - \chi_Q(y,t)|\, dy = 0 \quad \text{für fast alle } x.$$

Das heißt, es existiert $A \subset \mathbb{R}^n$, so dass für fast alle r und s und fast alle $y \in \mathbb{R}^n$

$$\chi_Q(y,s) = \chi_Q(y,r) = \chi_A(y)\,,$$

womit $Q = A \times \mathbb{R}$ folgt. $\square$

Bemerkung 3.3.3 Da Q selbst ein Kegel ist, haben wir für alle $t > 0$ und alle $(y,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$$\chi_A(ty) = \chi_Q(ty,ts) = \chi_Q(y,s) = \chi_A(y),$$

und damit ist A ebenfalls ein Kegel.

Proposition 3.3.4 *Sei $Q = A \times \mathbb{R}$ ein Zylinder in $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Falls Q minimal ist, so ist auch A minimal in $\mathbb{R}^n$.*

Beweis: Nehmen wir an, A sei nicht minimal in $\mathbb{R}^n$, das heißt es existieren ein $\varepsilon > 0, R > 0$ und eine Menge E, die mit A außerhalb einer kompakten Menge $H \subset B_R^n$ übereinstimmt, so dass

$$\int_{B_R^n} |D\chi_E| \leq \int_{B_R^n} |D\chi_A| - \varepsilon \ .$$

Sei nun $T > 0$ und sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ wie folgt definiert:

$$M := \begin{cases} E \times (-T, T) & \text{in } |x_{n+1}| < T \\ Q & \text{außerhalb } |x_{n+1}| < T, \end{cases}$$

so dass $M = Q$ außerhalb von $H \times [-T, T]$. Folglich gilt

$$\int_{B_R^n \times [-T,T]} |D\chi_Q| \leq \int_{B_R^n \times [-T,T]} |D\chi_M|. \tag{$*$}$$

Andererseits gilt

$$\int_{B_R^n \times [-T,T]} |D\chi_Q| = 2T \int_{B_R^n} |D\chi_A|,$$

womit sich ergibt:

$$\begin{aligned} \int_{B_R^n \times [-T,T]} |D\chi_M| &\leq 2T \int_{B_R^n} |D\chi_E| + 2\omega_n R^n \\ &\leq 2T \int_{B_R^n} |D\chi_A| - 2T\varepsilon + 2\omega_n R^n \ , \end{aligned}$$

was einen Widerspruch zu $(*)$ liefert für hinreichend großes T. □

Bemerkung 3.3.5 Man kann umgekehrt zeigen, dass wenn A minimal in $\mathbb{R}^n$ ist, so ist auch $Q := A \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein minimaler Kegel. Siehe [Giu84] Proposition 9.9.

Theorem 3.3.6 *Sei E_j eine Folge von minimalen Caccioppoli-Mengen in B_1, die lokal gegen eine minimale Caccioppoli-Menge E konvergieren. Sei $x \in \partial^* E$ und sei $\{x_j\}$ eine Folge von Punkten mit $x_j \in \partial E_j$ und $x_j \to x$. Dann ist für hinreichend große j, $x_j \in \partial^* E_j$.*

Beweis: In Proposition 3.3.11 wird unabhängig hiervon gezeigt, dass für minimale Caccioppoli-Mengen gilt

$$\overline{\partial^* E} = \partial E \quad \text{und} \quad \mathcal{H}^n(\partial E \setminus \partial^* E) = 0.$$

Damit können wir mit Hilfe von Theorem 2.2.4 ∂E_j als rektifizierbare n-Varifaltigkeit mit $\underline{H}_{\partial E_j} \equiv 0$ auffasssen, wobei $\operatorname{supp} |D\chi_{E_j}| = \partial E$. Für die Vorraussetzungen des Theorems von Allard (2.39) bleibt somit noch zu zeigen, dass zu jedem $\delta > 0$ ein $\rho > 0$ und ein $N(\delta)$ existiert, so dass

$$\omega_n^{-1} \rho^{-n} \mu_{E_j}(B_\rho(x_j)) \leq 1 + \delta \quad \forall\ j > N(\delta).$$

Da $x \in \partial^* E$, gilt nach Theorem 2.2.4 $\theta(x) = 1$ und somit $\Theta^n(x) = 1$. Dann existiert $\beta > 0$, so dass für alle $0 < \rho < \beta$

$$\omega_n^{-1} \rho^{-n} \mu_E(B_\rho(x)) \leq 1 + \frac{\delta}{3}.$$

Wähle nun $0 < \rho < \beta$ mit $\mu_E(\partial B_\rho(x)) = 0$. Es gilt nach Proposition 3.2.5 (iii):

$$\mu_{E_j}(B_\rho(x)) \to \mu_E(B_\rho(x)).$$

Sei nun $\gamma \in (0,1)$ fest und $N(\delta, \gamma) \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass

$$|\rho^{-n} \mu_{E_j}(B_\rho(x)) - \rho^{-n} \mu_E(B_\rho(x))| < \frac{\delta}{3} \quad \text{sowie} \quad |x_j - x| \leq (1 - \gamma)\rho$$

für alle $j > N(\delta, \gamma)$. Dann gilt für passend gewähltes $\gamma(\delta)$:

$$\begin{aligned}(\gamma\rho)^{-n} \mu_{E_j}(B_{\gamma\rho}(x_j)) &\leq (\gamma\rho)^{-n} \mu_{E_j}(B_\rho(x)) \leq \gamma^{-n} \left(\rho^{-n} \mu_E(B_\rho(x)) + \frac{\delta}{3} \right) \\ &\leq \gamma^{-n} \left(1 + \frac{2\delta}{3} \right) \leq 1 + \delta\end{aligned}$$

für alle $j > N(\delta) := N(\delta, \gamma(\delta))$. Damit sind für all solche x_j die Vorraussetzungen des Theorems von Allard erfüllt, und ∂E_j ist in einer Umgebung U_j von x_j eine $C^{1,\alpha}$-Hyperfläche für alle $j > N(\delta)$, und damit $x_j \in \partial^* E_j$. □

Sei C nun ein minimaler Kegel in $\mathbb{R}^{n+1}$, singulär in 0 und im Punkt $x_0 \neq 0$. Da C ein Kegel ist, sind auch sämtliche Punkte auf der Halbgeraden durch 0 und x_0 singulär. Durch Rotation können wir o.B.d.A. annehmen, dass diese Halbgerade die positive x_{n+1}-Achse ist. Wenn wir nun C in x_0 aufblasen, erhalten wir einen minimalen Zylinder Q, so dass die x_{n+1}-Achse in ∂Q liegt und sämtliche Punkte auf der x_{n+1}-Achse singulär sind. (Da sie alle Grenzwerte von Folgen singulärer Punkte sind, siehe Theorem 3.3.6). Wegen Proposition 3.3.2 und 3.3.4 können wir Q schreiben als $Q = A \times \mathbb{R}$, wobei A ein minimaler Kegel in $\mathbb{R}^n$ ist, singulär im Ursprung. Indem wir dies -falls nötig- wiederholen, erhalten wir:

Theorem 3.3.7 *Sei C ein minimaler Kegel in $\mathbb{R}^{n+1}$, singulär im Ursprung. Dann existiert $k \leq n+1$ und ein minimaler Kegel $A \subset \mathbb{R}^k$, der nur eine Singularität im Ursprung besitzt.*

An dieser Stelle soll nun das Resultat von J.Simons über die Existenz von minimalen Kegeln vorgestellt werden.

Theorem 3.3.8 *Sei $2 \leq n \leq 6$ und sei C ein n-dimensionaler eingebetteter Kegel in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit verschwindender mittlerer Krümmung und $\overline{C} \setminus C = \{0\}$. Zusätzlich sei C stabil, das heißt die zweite Variation des Flächeninhaltes sei positiv (siehe (3.22)). Dann ist $\overline{C}$ eine Hyperebene.*

Zum Beweis: Ein Beweis mit Hilfe der Differentialgeometrie findet sich in [Sim83] Appendix B, eine elementarere Herleitung dieses Resultats findet sich bei [Giu84] Kap. 10.

Bemerkung 3.3.9 Im Falle $n = 1$, das heisst ein Kegel C in $\mathbb{R}^2$ mit $\Psi(C, B_1) = 0$, sieht man leicht, dass ∂C nur aus abzählbar vielen Halbgeraden durch den Ursprung bestehen kann. Da wir zusätzlich wissen, dass $\mathcal{H}^n \llcorner \partial C$ ein Radonmaß sein muss, können es sogar nur endlich viele Strahlen sein. Durch elementargeometrische Überlegungen sieht man darüber hinaus, dass C nur dann minimal sein kann, wenn ∂C aus einer einzigen Geraden durch den Ursprung besteht.

Bemerkung 3.3.10 Theorem 3.3.8 gilt nicht für $n \geq 7$. Der singuläre Kegel $M := \{(x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{R}^8 : \sum_{i=1}^4 x_i^2 < \sum_{i=5}^8 x_i^2\}$ ist minimal in $\mathbb{R}^8$, was von Bombieri, De Giorgi und Giusti bewiesen wurde. Zusammen mit Bemerkung 3.3.5 ergibt dies ein Gegenbeispiel für $n \geq 7$.

3.3.2 Regularität von Minimalflächen

Die folgende Proposition wird es ermöglichen, im Falle einer minimalen Caccioppoli-Menge E nicht nur $\partial^* E$, sondern auch ∂E als rektifizierbare n-Varifaltigkeit mit verschwindender verallgemeinerter mittlerer Krümmung aufzufassen.

Proposition 3.3.11 *Sei E eine Caccioppoli-Menge in $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dann gilt*

$$\overline{\partial^* E} = \partial E \tag{i}$$

$$\textit{und } \mathcal{H}^n(\Sigma) = \mathcal{H}^n(\partial E \setminus \partial^* E) = 0\ ,\ \textit{falls } E \textit{ zusätzlich minimal in } \Omega \textit{ ist.} \tag{ii}$$

Beweis: Zu (i):
Wegen $\mu_E = \mathcal{H}^n \llcorner \partial^* E$, gilt $\mu_E(\partial E \setminus \partial^* E) = 0$. Damit gilt

$$\int_\Omega |D\chi_E| = \int_{\Omega \cap \partial E} |D\chi_E| = \int_{\Omega \cap \partial^* E} |D\chi_E|.$$

Sei nun $x \in \partial E$, und es sei angenommen, dass $x \notin \overline{\partial^* E}$, das heißt es existiert ein $\rho > 0$ mit $B_\rho(x) \cap \partial^* E = \emptyset$ und somit

$$\int_{B_\rho(x)} |D\chi_E| = 0.$$

Anhand der isoperimetrischen Ungleichung, Theorem 3.1.9, erhalten wir

$$\min\{|E \cap B_\rho(x)|, |(\mathbb{R}^{n+1} \setminus E) \cap B_\rho(x)|\}^{\frac{n-1}{n}} \leq c_2 \int_{B_\rho(x)} |D\chi_E| = 0\,,$$

was im Widerspruch zu Propostion 3.2.1 steht.

zu (ii):
Sei K eine beliebige kompakte Menge, die in $\partial E \setminus \partial^* E$ enthalten sei. Dann gilt wie oben

$$\int_K |D\chi_E| = 0.$$

Da aber $|D\chi_E|$ ein Radonmaß ist, existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine offene Menge A_ε mit $K \subset A_\varepsilon \subset \Omega$ und

$$\int_{A_\varepsilon} |D\chi_E| < \varepsilon.$$

Sei nun $\eta > 0$. Für alle $x \in \partial^* E \cap A_\varepsilon$ existiert $\rho < \eta$ mit $B_\rho(x) \subset A_\varepsilon$, was isbesondere impliziert, dass

$$K \subset \bigcup_{x \in \partial^* E \cap A_\varepsilon} B_{\rho_x}(x).$$

Nach dem Überdeckungssatz von Vitali ([EG92] 1.5 Theorem 1) existiert eine Folge von Punkten $x_j \in \partial^* E \cap A_\varepsilon$, so dass

$$\begin{aligned} B_{\rho_i}(x_i) \cap B_{\rho_j}(x_j) = \emptyset \;\; &\text{falls } i \neq j \text{ und} \\ \cup_{j=1}^\infty B_{6\rho_j}(x_j) \supset K. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\sum_{j=1}^\infty \int_{B_{\rho_j}(x_j)} |D\chi_E| \leq \int_{A_\varepsilon} |D\chi_E| < \varepsilon \ .$$

Andererseits gilt aber nach der Monotonieformel, da E minimal und $\underline{H}_{\partial^* E} \equiv 0$ ist, dass $\omega_n^{-1}\rho^{-n}\int_{B_\rho(x)} |D\chi_E|$ eine monoton wachsende Funktion in ρ ist, und wegen $\Theta^n(\mu_E, x) = 1$ für alle $x \in \partial^* E$, gilt

$$\int_{B_{\rho_j}(x_j)} |D\chi_E| \geq \omega_n \rho_j^n$$

und damit

$$\omega_n \sum_{j=1}^\infty \rho_j^n \leq \varepsilon \ .$$

Hieraus ergibt sich direkt, dass $\mathcal{H}^n(K) \leq 6^n \varepsilon$, und da ε beliebig war, $\mathcal{H}^n(K) = 0$. Nach Theorem 3.2.10 ist $\partial^* E$ offen in ∂E, womit $\partial E \setminus \partial^* E$ abgeschlossen ist. Hieraus folgt dann $\mathcal{H}^n(\partial E \setminus \partial^* E) = 0$. □

Theorem 3.3.12 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, E eine minimale Caccioppoli-Menge in Ω. Dann ist für $n \leq 6$ $\partial E \cap \Omega$ eine $C^{1,\alpha}$-Hyperfläche, wobei $\alpha \in (0,1)$ beliebig ist.*

Beweis: Sei $x \in \partial E \setminus \partial^* E$ und wir nehmen o.B.d.A. an $x = 0$. Dann betrachten wir

$$E_t := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : tx \in E\} \;\; \text{für } t > 0.$$

Nach Theorem 3.3.1 existiert für jede Nullfolge $\{t_j\}$ eine Teilfolge $\{s_j\}$, so dass $E_{s_j} \to C$, wobei C ein minimaler Kegel ist.
Aufgrund von Theorem 3.3.7 und Theorem 3.3.8 muß ∂C eine Hyperebene sein, und somit ist $\partial^* C = \partial C$. Wir können nun Theorem 3.3.6 anwenden und erhalten, dass 0 für hinreichend große j ein regulärer Punkt von ∂E_j ist. Da aber E_j nur durch zentrische Streckung aus E hervorgeht, muß 0 schon ein regulärer Punkt von ∂E sein. □

Bemerkung 3.3.13 Man kann somit in einer Umgebung von $x \in \partial E$ den Rand als Graph einer $C^{1,\alpha}$-Funktion u darstellen. Da ∂E aber minimal ist, muss u auch eine (schwache) Lösung der Minimalflächengleichung sein. Da die Minmalfächengleichung eine quasilineare elliptische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, erhalten wir mit der Schauder-Theorie, dass u sogar C^∞ ist, nach [Giu84] sogar analytisch.

3.3.3 Die Dimension der singulären Menge

In diesem Abschnitt soll nun Regularität in höheren Dimensionen untersucht werden. Wir werden zeigen, dass das k-te Hausdorffmaß für $k > n-7$ verschwindet, was insbesondere die Ergebnisse des vorherigen Abschnitts beinhaltet.
Dafür benötigen wir noch einige Resultate über Hausdorffmaße.

Definition 3.3.14 (Hausdorffmaße) *Sei* $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \le k < \infty$, $0 < \delta \le \infty$ *und*

$$\mathcal{H}^k_\delta(A) := \omega_k 2^{-k} \inf\{\sum_{j=1}^{\infty}(diam\, S_j)^k : A \subset \cup_{j=1}^{\infty} S_j,\ diam\, S_j < \delta\}, \tag{3.31}$$

$$\mathcal{H}^k := \lim_{\delta \searrow 0} \mathcal{H}^k_\delta(A) = \sup_\delta \mathcal{H}^k_\delta(A), \tag{3.32}$$

wobei $\mathcal{H}^k$ *als k-dimensionales Hausdorffmaß bezeichnet wird.*

Offensichtlich gilt $\mathcal{H}^k_\delta \ge \mathcal{H}^k_\rho$, falls $\rho > \delta$ ist. Es lässt sich darüber hinaus leicht nachprüfen, dass die $\mathcal{H}^k$ Borel-reguläre Maße sind. (Siehe z.B. [EG92] Kapitel 2.)

Lemma 3.3.15 *Sei* $A \subset \mathbb{R}^n$. *Dann gilt:* $\mathcal{H}^k_\infty(A) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{H}^k(A) = 0$.

Beweis: Wegen der obigen Anmerkung genügt es zu zeigen, dass

$$\mathcal{H}^k_\infty(A) = 0 \ \Rightarrow\ \mathcal{H}^k(A) = 0.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine abzählbare Überdeckung $\{S_j\}$ von A, so dass

$$\sum_j (\mathrm{diam}\, S_j)^k < \varepsilon^k.$$

Dann ist auch $\mathrm{diam}\, S_j < \varepsilon \ \ \forall\, j$, und somit

$$\mathcal{H}^k_\varepsilon(A) < \omega_k 2^{-k} \varepsilon^k;$$

$\varepsilon \to 0$ liefert die Behauptung. □

Lemma 3.3.16 *Sei* $A \subset \mathbb{R}^n$, *dann gilt*

$$\limsup_{t \to 0^+} \frac{\mathcal{H}^k_\infty(A \cap B_t(x))}{\omega_k t^k} \ge 2^{-k} \quad \textit{für } \mathcal{H}^k\textit{- fast alle } x \in A.$$

Beweis: Für einen Beweis siehe [Giu84] Prop. 11.3 oder [EG92] S.72 Theorem 2.

Wir können nun Minimalflächen betrachten. Zuerst zeigen wir, dass, falls eine Folge von minimalen Mengen $\{E_j\}$ lokal gegen eine minimale Menge E konvergiert, die singulären Punkte der ∂E_j nahe bei den singulären Punkten von ∂E liegen. Genauer gesagt:

Lemma 3.3.17 *Sei $\{E_j\}$ eine Folge von minimalen Caccioppoli-Mengen in Ω, die in $L^1_{loc}(\Omega)$ gegen eine minimale Caccioppoli-Menge E konvergieren. Seien $\Sigma_j := \partial E_j \setminus \partial^* E_j$ und $\Sigma := \partial E \setminus \partial^* E$ die singulären Teilmengen von ∂E_j und ∂E . Sei $K \subset \Omega$, K kompakt und $A \subset \Omega$ offen, so dass $\Sigma \cap K \subset A$. Dann ist für hinreichend grosses j, $\Sigma_j \cap K \subset A$.*

Beweis: Nehmen wir an, dass die Aussage falsch wäre. Wir können annehmen (möglicherweise durch Auswahl einer Teilfolge), dass für jedes j ein $x_j \in \Sigma_j \cap K$ existiert mit $x_j \notin A \quad \forall\, j$. Da K kompakt ist, können wir zusätzlich annehmen, dass $x_j \to \overline{x} \in K$. Weil $x_j \in \partial E_j$ ist, und die E_j minimal sind, gilt aufgrund der Monotonieformel und $\Theta^n(\mu_{E_j}, x_j) \geq 1$:

$$\int_{B_\rho(x_j)} |D\chi_{E_j}| \geq \omega_n \rho^n \quad \text{für alle } \rho < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega).$$

Sei nun $0 < r < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$ und $0 < \rho < r$, dann gilt für hinreichend große j

$$B_\rho(x_j) \subset B_r(\overline{x}).$$

Da aber wegen Proposition 3.2.5 (iii) $\int_{B_\rho(\overline{x})} |D\chi_{E_j}| \to \int_{B_\rho(\overline{x})} |D\chi_E|$ für fast alle ρ, muss gelten, dass

$$\int_{B_r(\overline{x})} |D\chi_E| \geq \omega_n r^n > 0,$$

womit sich $\overline{x} \in \partial E$ ergibt. Nun ist auch $\overline{x} \in \Sigma$, da anderenfalls Theorem 3.3.6 liefern würde, dass $x_j \in \partial^* E_j$ ist für hinreichend große j, im Gegensatz zur Annahme. Damit erhält man $\overline{x} \in \Sigma \cap K \subset A$, was einen Widerspruch zu $x_j \to \overline{x}$ liefert, da A als offen vorausgesetzt wurde. □

Hiermit sehen wir nun direkt:

Lemma 3.3.18 *Seien die Voraussetzungen wie im vorherigen Lemma. Dann gilt für alle $K \subset \Omega$, K kompakt:*

$$\mathcal{H}^k_\infty(\Sigma \cap K) \geq \limsup_{j\to\infty} \mathcal{H}^k_\infty(\Sigma_j \cap K).$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$, $\{S_j\}$ eine abzählbare Überdeckung von $\Sigma \cap K$, so dass

$$\mathcal{H}^k_\infty(\Sigma \cap K) > \omega_k\, 2^{-k} \sum_{j=1}^\infty (\operatorname{diam} S_j)^k - \varepsilon.$$

Wir können zusätzlich o.B.d.A annehmen, dass die S_j offen sind und setzen $A := \cup_{j=1}^\infty S_j$. Für hinreichend großes j gilt nach obigem Lemma, dass $\Sigma_j \cap K \subset A$ ist, was zur Folge hat, dass

$$\mathcal{H}^k_\infty(\Sigma_j \cap K) \leq \mathcal{H}^k_\infty(A) \leq \omega_k\, 2^{-k} \sum_{j=1}^\infty (\operatorname{diam} S_j)^k,$$

und damit

$$\limsup_{j\to\infty} \mathcal{H}^k_\infty(\Sigma_j \cap K) \leq \mathcal{H}^k_\infty(\Sigma \cap K) + \varepsilon.$$

Daraus folgt die Behauptung, da ε beliebig war. $\square$

Zusammen liefern die vorherigen Lemmata nun das folgende Theorem:

Theorem 3.3.19 *Sei E eine minimale Caccioppoli-Menge in $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und sei $\mathcal{H}^k(\Sigma) > 0$. Dann existiert ein minimaler Kegel C in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit*

$$\mathcal{H}^k(\partial C \setminus \partial^* C) > 0 \tag{+}$$

Beweis: Wegen Lemma 3.3.16 existiert ein Punkt $x_0 \in \Sigma$ und eine Nullfolge r_j, so dass

$$\mathcal{H}^k_\infty(\Sigma \cap B_{r_j}(x_0)) \geq 2^{-k-1}\omega_k r_j^k. \tag{$*$}$$

Sei o.B.d.A. $x_0 = 0$ und setze $E_t := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : tx \in E\}$. Aus Theorem 3.3.1 wissen wir nun, dass eine Teilfolge $\{s_j\}$ von $\{r_j\}$ existiert, für die $\{E_{s_j}\}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$lokal gegen einen minimalen Kegel C konvergiert. Setzt man nun $\Sigma_j := \partial E_{s_j} \setminus \partial^* E_{s_j}$, gilt offensichtlich

$$\Sigma_j = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : s_j x \in \Sigma\}, \text{ woraus folgt aufgrund von } (*)$$
$$\mathcal{H}^k_\infty(\Sigma_j \cap B_1) = s_j^k \mathcal{H}^k_\infty(\sigma \cap B_{s_j}) \geq 2^{-k-1}\omega_k \text{ folgt.}$$

(+) ergibt sich nun aus Lemma 3.3.18 und 3.3.15. $\square$

Theorem 3.3.20 *Sei E eine minimale Caccioppppoli-Menge in $\Omega \subset \mathbb{R}^8$. Dann besteht die singuläre Menge Σ von E höchstens aus isolierten Punkten.*

Beweis: Nehmen wir im Gegensatz zur Behauptung an, dass eine Folge von singulären Punkten existiert, die gegen einen Punkt $x_0 \in \Omega$ konvergiert. Sei o.B.d.A. $x_0 = 0$ und setze $r_k := |x_k|$. Aus Theorem 3.3.1 erhalten wir wiederum, dass (möglicherweise nach Auswahl einer Teilfolge) die Folge E_{r_k} lokal in $\mathbb{R}^8$ gegen einen minimalen Kegel C konvergiert. Des Weiteren können wir o.B.d.A annehmen, dass $y_k := x_k/r_k$ gegen $y_0 = (0, \ldots, 0, 1)$ konvergiert. Da $y_k \in \Sigma_{r_k}$ ist, folgt aus Theorem 3.3.6, dass $y_0 \in \partial C \setminus \partial^* C$. Weil C ein Kegel ist, besteht die Halbgerade durch 0 und y_0 nur aus singulären Punkten.
Indem wir nun nochmals C in y_0 analog zu Proposition 3.3.2 'aufblasen', erhalten wir einen Zylinder $Q = A \times \mathbb{R}$ mit

$$\mathcal{H}^1(\partial Q \setminus \partial^* Q) > 0.$$

Nach Prop. 3.3.4 ist A ein minimaler Kegel in $\mathbb{R}^7$, und da $\partial Q \setminus \partial^* Q = (\partial A \setminus \partial^* A) \times \mathbb{R}$, ist

$$\mathcal{H}^0(\partial A \setminus \partial^* A) > 0,$$

was Theorem 3.3.7 zusammen mit Theorem 3.3.8 widerspricht. $\square$

Theorem 3.3.21 (Dimension der singulären Menge [Fed70]) *Sei E eine minimale Caccioppoli-Menge in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und sei $\Sigma := (\partial E \setminus \partial^* E) \cap \Omega$. Dann gilt*

$$\mathcal{H}^k(\Sigma) = 0 \quad \forall\ k > n - 8.$$

Beweis: Sei $k > 0$ so gewählt, dass $\mathcal{H}^k(\Sigma) > 0$. Nach Theorem 3.3.19 existiert ein minimaler Kegel C in $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{H}^k(\partial C \setminus \partial^* C) > 0$. Wegen Lemma 3.3.18 existiert ein Punkt $x_0 \neq 0$, so dass $(*)$ gilt mit $\Sigma = \partial C \setminus \partial^* C$. Durch 'Aufblasen' in x_0 erhalten wir einen minimalen Zylinder $Q = A \times \mathbb{R}$ mit

$$\mathcal{H}^k(\partial Q \setminus \partial^* Q) > 0.$$

Dabei ist $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Kegel mit

$$\mathcal{H}^{k-1}(\partial A \setminus \partial^* A) > 0.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Schlusses erhalten wir, dass für alle $m \leq k$ ein minimaler Kegel C_m in $\mathbb{R}^{n-m}$ existiert mit

$$\mathcal{H}^{k-m}(\partial C_m \setminus \partial^* C_m) > 0. \tag{$*$}$$

Da aber nach Theorem 3.3.20 minimale Kegel in $\mathbb{R}^8$ höchstens einen singulären Punkt besitzen können, gilt für $n - m = 8$, dass $k - m \leq 0$ erfüllt sein muss, da sonst $(*)$ verletzt wäre. Zusammen ergibt sich $k \leq n - 8$. $\square$

Kapitel 4

Regularitätsergebnisse für fast minimale Flächen

In diesem Kapitel wollen wir uns mit einer Arbeit von I.Tamanini [Tam84] über die Regularität von fast minimalen Flächen beschäftigen. Dabei spricht man von fast minimalen Flächen, wenn für eine Caccioppoli-Menge E das Funktional $r^{1-n}\Psi(E, B_r(x))$ in r hinreichend gut durch eine Funktion $\alpha(r)$ kontrolliert ist. In diesem Falle zeigt Tamanini, dass analoge Regularitätsergebnisse wie für minimale Caccioppoli-Mengen gelten. Insbesondere umfasst die Definition von fast minimalen Flächen Problemstellungen wie Flächen mit vorgegebener verallgemeinerter mittlerer Krümmung, Minimalfächen unter einer Volumenbedingung, sowie das Hindernisproblem für Minimalflächen. Beim letzteren Problem wollen wir einige tiefergehende Resultate aus einer weiteren Arbeit von I.Tamanini [Tam82] vorstellen.
Darüber hinaus können wir anhand der Definition fast minimaler Flächen den Unterschied zwischen einer C^1- und einer $C^{1,\alpha}$-Fläche, $\alpha \in (0,1)$, genauer präzisieren.

4.1 Definitionen und erste Beispiele

Dieser Abschnitt behandelt die Definition von fast minimalen Flächen und einige einführende Beispiele. Daraufhin werden das Regularitätstheorem, sowie Konsequenzen daraus und weitere Beispiele vorgestellt.

Es sollen folgende Schreibweisen und Konventionen verwendet werden:

Für dieses Kapitel betrachten wir Mengen $E, F, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ wobei $E, F, \ldots$ Caccioppoli-Mengen in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seien. Die Menge Ω wird dabei immer als offen vorausgesetzt. Dies steht insofern im Gegensatz zum letzten Kapitel, als dass wir dort Caccioppoli-Mengen in $\mathbb{R}^{n+1}$betrachtet haben. Im Folgenden sei $B_t := B_t(0)$, falls ein anderer Mittelpunkt gewählt sei, schreiben wir explizit $B_t(x)$. Die Projektion von $\mathbb{R}^n$ auf die ersten $n-1$ Variablen sei immer durch einen 'Strich' gekennzeichnet, wie zum Beispiel x', B'_t. Damit haben wir $x = (x', x_n)$ und $B'_t(x') = \{y' \in \mathbb{R}^{n-1} : |y' - x'| < t\}$.
Anhand von Vektoraddition und Skalarmultiplikation können wir Translation und

zentrische Streckung von Teilmengen E des $\mathbb{R}^n$ definieren:

$$E + x_0 := \{x : x - x_0 \in E\} \quad \text{und} \quad tE := \{x : t^{-1}x \in E\},$$

für $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$. Falls E eine Caccioppoli-Menge ist, so auch $E + x_0$ und tE, wobei für $G \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|D\chi_{E+x_0}|(G + x_0) = |D\chi_E|(G), \quad |D\chi_{tE}|(tG) = t^{n-1}|D\chi_E|(G).$$

Für die Maße $D_i\chi_E,\ i = 1, \ldots, n$ gelten entsprechende Ausssagen.

Definition 4.1.1 (Fast minimale Mengen) *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine Caccioppoli-Menge in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann bezeichnen wir E beziehungsweise den Rand von E als fast minimal in Ω, falls für alle $A \Subset \Omega$ ein $T \in (0, dist(A, \partial\Omega))$ und eine monoton wachsende Funktion $\alpha : (0, T) \to [0, \infty)$ mit $\alpha(t) = o(1)$ existiert, so dass*

$$\Psi(E, B_t(x)) \leq \alpha(t)t^{n-1} \quad \forall\ x \in A,\ \forall\ t \in (0, T) \tag{4.1}$$

gilt. Wir werden nun sehen, dass die Voraussetzungen an $\alpha(t)$ in gewissem Sinne notwendig sind, wenn wir die Regularität von ∂^*E zeigen wollen. Dafür sei S eine C^1-Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$, die sich über $B'_R \subset \mathbb{R}^{n-1},\ R > 0$ als $\operatorname{graph} u$ einer Funktion $u : B'_R \to \mathbb{R}$ mit $u \in C^1,\ u(0) = 0,\ Du(0) = 0$ darstellen lässt.
Sei nun $0 < t < R$ und $v \in C^1(B'_R)$, so dass $\operatorname{supp}(u - v) \subset B'_t$ ist. Damit gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{B'_t} \sqrt{1 + |Du|^2}\, dx' - \int_{B'_t} \sqrt{1 + |Dv|^2}\, dx' \leq \\
&\quad \leq \int_{B'_t} \left(\sqrt{1 + |Du|^2} - 1\right) dx' \leq \frac{1}{2} \int_{B'_t} |Du|^2 dx' \leq \alpha(t)t^{n-1}\ ,
\end{aligned}$$

wobei $\alpha(t)$ hier als

$$\alpha(t) := 1/2\, \omega_{n-1} \sup_{B'_t} |Du|^2$$

gewählt sei.
Daran sieht man nun leicht (man beachte die Regularitätsergebnisse für Minimalfächen im vorherigen Kapitel), dass für den Epigraph $E = \operatorname{epi}(u)$,

$$\operatorname{epi}(u) := \{x \in B'_R \times \mathbb{R} : x_n \geq u(x')\}\,,$$

die Bedingung (4.1) mit obiger Funktion $\alpha(t)$, die den Voraussetzungen in Def. 4.1.1 genügt, erfüllt ist.

Andererseits sieht man auch, dass für den Kegel

$$E := \{x = (x_1, x_2) : |x_1| < |x_2|\} \subset \mathbb{R}^2,$$

der eine Singularität im Ursprung besitzt,

$$\Psi(E, B_t) \leq \alpha(t)\, t$$

gilt, wobei die optimale Wahl für $\alpha(t)$ die Konstante $2(2 - \sqrt{2})$ ist.

4.1.1 Das Regularitätstheorem für fast minimale Flächen

Wir wollen nun das Hauptresultat vorstellen, um daraufhin einige Anwendungen zu diskutieren. Für das Regularitätstheorem sind einige zusätzliche Voraussetzungen an $\alpha(t)$ notwendig. Wir setzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraus, dass $\alpha : (0,1) \to [0,\infty)$.

Voraussetzungen an $\alpha(t)$:

(α_1) $\alpha : (0,1) \to [0,\infty)$ ist monoton wachsend und beschänkt ,

(α_2) $\alpha(t) = o(1)$,

(α_3) $t^{-1}\alpha(t)$ ist monoton fallend auf $(0,1)$,

(α_4) $\int_0^1 t^{-1}\alpha^{1/2}(t)\,dt < +\infty$.

Bemerkung 4.1.2 Man kann einfach nachprüfen, dass eine konkave Funktion α, die (α_1) und (α_2) erfüllt, automatisch auch (α_4) genügt.

Theorem 4.1.3 (Haupttheorem) *Sei E eine fast minimale Caccioppoli-Menge in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, wobei $\alpha(t)$ die obigen Bedingungen erfülle. Dann gilt*

$$\partial^* E \cap \Omega \text{ ist eine } C^1\text{-Hyperfläche,} \tag{4.2}$$

$$\text{und } \mathcal{H}^k((\partial E \setminus \partial^* E) \cap \Omega) = 0 \quad \forall\, k > n-8\,. \tag{4.3}$$

Sei darüber hinaus $\{E_h\}$ eine Folge von gleichmäßig fast minimalen Caccioppoli-Mengen in Ω (das heißt (4.1) gilt für alle E_h, wobei T und $\alpha(t)$ unabhängig von h sind), die lokal gegen eine Caccioppoli-Menge E_∞ konvergiert. Dann ist E_∞ ebenfalls fast minimal in Ω. Sei $\{x_h\} \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge von Punkten, für die gelte

$$x_h \in \partial E_h, \quad x_h \to x_\infty \in \Omega$$

dann gilt auch

$$x_\infty \in \partial E_\infty. \tag{4.4}$$

Falls zusätzlich $x_\infty \in \partial^* E_\infty$ ist, erhält man

$$x_h \in \partial^* E_h \text{ für hinreichend große } h \text{ und } \nu_{E_h}(x_h) \to \nu_{E_\infty}(x_\infty). \tag{4.5}$$

Bemerkung 4.1.4 Für die Oszillation der Einheitsnormalen an ∂E erhält man

$$|\nu_E(x) - \nu_E(y)| \le c_1 \int_0^{|x-y|} t^{-1}\alpha^{\frac{1}{2}}(t)\,dt + c_2|x-y|^{\frac{1}{2}}\,, \tag{4.6}$$

für alle $x, y \in \partial^* E$ mit $|x-y|$ hinreichend klein, wobei $c_1, c_2 > 0$ lokale Konstanten sind.

Der Beweis dieses Theorems wird im letzten Abschnitt dieses Kapitels gegeben werden.

Nun einige Beispiele für Funktionen $\alpha(t)$, die die obigen Voraussetzungen erfüllen.

Die möglicherweise einfachste Wahl ist $\alpha(t) = c\,t^{2\alpha}$, dann sind $(\alpha_1) - (\alpha_4)$ erfüllt für alle $c > 0$ und $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$. Für eine Wahl von $\alpha(t)$ wie

$$\begin{aligned} &\alpha(t) = c\,(\ln(e/t))^{-2(1+\varepsilon)} \quad \text{oder} \\ &\alpha(t) = c\,(\ln(e/t))^{-2}\,(\ln(e\ln(e/t)))^{-2(1+\varepsilon)} \end{aligned} \tag{4.7}$$

folgt ebenfalls $(\alpha_1) - (\alpha_4)$ für $\varepsilon > 0$, sofern man $\alpha(t)$ jeweils in der richtigen Höhe abschneidet, um $\alpha(t)$ konkav zu halten. Für $\varepsilon = 0$ wird (α_4) verletzt.

4.1.2 Beispiele fast minimaler Flächen

(i) Minimale Caccioppoli-Mengen:

Sind sicherlich fast minimal mit $\alpha(t) \equiv 0$.

(ii) Ränder mit vorgeschriebener verallgemeinerter mittlerer Krümmung:

Sei hierfür $H \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und sei E eine Caccioppoli-Menge in Ω, die ein lokales Minimum für das Funktional

$$\mathcal{F}_H(F, A) := |D\chi_F|(A) + \int_{A\cap F} H(x)\,dx \tag{4.8}$$

darstellt, wobei das Funktional für alle Caccioppoli-Mengen F und alle $A \Subset \Omega$ definiert ist. Das heißt, wir nehmen an:

$$\mathcal{F}_H(E, A) \le \mathcal{F}_H(F, A) \quad \forall\, A \Subset \Omega,\ \forall\, F :\ F \triangle E \Subset A. \tag{4.9}$$

Es gilt ersichtlich

$$\mathcal{F}_H(F, A) \ge -\int_A |H(x)|\,dx \quad \text{und} \quad |D\chi_F|(A) \le \mathcal{F}_H(F, A) + \int_A |H(x)|\,dx\ ,$$

damit können wir unter der Voraussetzung, dass Ω einen hinreichend regulären Rand besitzt, analog zu Theorem 3.1.8 die Existenz einer lokal minimierenden Caccioppoli-Menge zeigen.

Für den Fall, dass $\partial E \cap A$ lokal C^2 ist, und H eine differenzierbare Funktion auf Ω ist, sieht man leicht durch Ausrechnen der ersten Variation, mit Hilfe von Lemma 3.2.8 und dem Transformationssatz, dass gilt

$$\int_{\partial E\cap A} \mathrm{div}_{\partial E} X\, d\mathcal{H}^{n-1} = -\int_{\partial E\cap A} \langle X, \nu\rangle\, H(x)\ d\mathcal{H}^{n-1} \quad \forall\, X \in C^1_c(A; \mathbb{R}^n),$$

was impliziert, dass die Hyperfläche ∂E mittlere Krümmung H besitzt. Dies motiviert, dass wir die lokalen Minima von $\mathcal{F}_H$ als Mengen mit 'Rändern von verallgemeinerter mittlerer Krümmung H' bezeichnen.
Für ein $A = B_t(\xi) \Subset \Omega$ haben wir wegen (4.8) und (4.9):

$$|D\chi_E|(B_t(\xi)) \le |D\chi_F|(B_t(\xi)) + \int_{B_t(\xi)} |H(x)|\,dx\,. \tag{4.10}$$

Wenn wir nun voraussetzen, dass $H \in L^n_{\text{loc}}(\Omega)$ ist, folgt aus der Hölderschen Ungleichung, dass E fast minimal in ξ ist mit

$$\alpha(t) = \omega_n^{1-\frac{1}{n}} \left(\int_{B_t(\xi)} |H|^n \, dx \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Sei $A \Subset \Omega$ und $T \in (0, \text{dist}(A, \partial\Omega))$. Dann ist $\int_{B_t(\xi)} |H|^n \, dx$ für jedes $t \in (0,T)$ eine stetige Funktion in $\xi \in \overline{A}$, welche ihr Maximum an einem Punkt $\xi_t \in \overline{A}$ annimmt. Setzen wir dann

$$\alpha(t) := \omega_n^{1-\frac{1}{n}} \left(\int_{B_t(\xi_t)} |H|^n \, dx \right)^{\frac{1}{n}}, \tag{4.11}$$

erhalten wir, dass E fast minimal in Ω ist, wobei $\alpha(t)$ von A abhängt und (α_1) und (α_2) erfüllt.
Es ist aber nicht immer gegeben, dass auch (α_3) und (α_4) erfüllt sind. Man kann dies anhand des folgenden Beispiels erkennen

Für $n = 2$ sei auf $B_1 \setminus \{0\}$ $\;H$ definiert als

$$H(x) := -\frac{M}{|x|} (\ln(e/r))^{-\frac{5}{2}}, \tag{4.12}$$

für $|x| \in (0,1]$ und $M > 0$. Damit erhalten wir für $0 < t < 1$:

$$\int_{B_t} |H|^2 \, dx = \frac{\pi}{2} M^2 \left(\ln(e/t)\right)^{-4},$$

womit $H \in L^2(B_1)$. Wenn wir nun aber $\alpha(t)$ wie in (4.11) definieren, erhalten wir

$$\int_0^1 t^{-1} \alpha^{\frac{1}{2}}(t) \, dt = +\infty$$

womit (α_4) verletzt ist. Setzen wir aber

$$H(x) = 0 \quad \text{für } |x| \in (1,2], \tag{4.13}$$

und ziehen die Symmetrie des Problems mit in Betracht, so sehen wir, dass $E = B_1$ ein lokales Minimum für $\mathcal{F}_H$ in $\Omega = B_2$ ist, vorausgesetzt M ist groß genug gewählt. Damit liefert die Wahl in (4.12) und (4.13) kein Gegenbeispiel zur Regularität !
Die Frage, ob im Falle $H \in L^n_{\text{loc}}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Regularitätstheorem gilt, ist nach [Tam84] in voller Allgemeinheit noch nicht geklärt. Für eine eingehendere Diskussion dieser Frage sei auf [Tam84] S.18,19 verwiesen.

Wir wollen uns nun dem Fall $H \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $1 \leq p < n$ oder $n < p \leq \infty$ zuwenden. Im ersten Fall zeigen einfache Beispiele, dass Singularitäten auftreten können, wobei im zweiten Fall Theorem 4.1.3 angewendet werden kann.
Zuerst ein Gegenbeispiel für den Fall $1 \leq p < n$. Sei dafür $E := epi(u) \subset \mathbb{R}^n$, wobei $u : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ und $n \geq 2$ sei. Wir wählen

$$H(x) = \begin{cases} -\frac{c}{|x|} & \text{für } x \in E \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit $c \gg 0$ hinreichend groß. Dann ist $H \in L^{\tau n}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ für alle $\tau < 1$.

Sei nun G ein lokales Minimum von $\mathcal{F}_H(F, \overline{B}_1)$, mit $G \triangle E \Subset B_1$. Da E konvex ist und H außerhalb von E verschwindet, gilt sicherlich, dass $G \cap B_1 \subset E \cap B_1$. Wir wollen nun zeigen, dass $0 \in \partial G$ ist. Sei dafür angenommen, dass $0 \notin \partial G$ ist. Dann existiert ein $r > 0$, so dass für $E_r := (E \cap B_r)$ gilt: $E_r \cap G = \emptyset$. Da aber für hinreichend großes c

$$|D\chi_{E_r}|(B_1) + \int_{E_r} H \, dx < 0 \quad \text{ist für alle } r \in (0,1),$$

erhalten wir

$$|D\chi_{G \cup E_r}|(\overline{B}_1) + \int_{(G \cup E_r) \cap B_1} H \, dx < |D\chi_G|(\overline{B}_1) + \int_{G \cap B_1} H \, dx \ ,$$

was im Widerspruch zur Minimalität von G steht. Damit ist G ein lokales Minimum von $\mathcal{F}_H$ in B_1 mit $H \in L^{\tau n}_{\mathrm{loc}}(B_1)$ für alle $\tau < 1$, und 0 ist ein singulärer Punkt von ∂G. Es ergibt sich somit, dass Theorem 4.1.3, insbesondere (4.3), nicht für Ränder mit vorgeschriebener verallgemeinerter mittlerer Krümmung $H \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $p < n$ gelten kann.

Wir betrachten jetzt den Fall $H \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $p > n$. Für $A \Subset \Omega$, $0 < T < \operatorname{dist}(A, \partial\Omega)$, $x \in A$, $t \in (0,T)$ erhalten wir aus (4.10) anhand der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \Psi(E, B_t(x)) &\leq \int_{B_t(x)} |H| \, dy \leq \omega_n^{1-\frac{1}{p}} \|H\|_{L^p(B_t(x))} t^{n-\frac{n}{p}} \\ &\leq \operatorname{const}(n, \|H\|_{L^p(A_T)}) \, t^{1-\frac{n}{p}} \, t^{n-1} := \alpha(t) \, t^{n-1} \ , \end{aligned} \tag{4.14}$$

wobei $A_T := \{x : \operatorname{dist}(x, A) < T\} \Subset \Omega$ ist. Da $1 - \frac{n}{p} \in (0,1)$ ist, wissen wir, dass $\alpha(t) = c\, t^{1-\frac{n}{p}}$ die Bedingungen $(\alpha_1) - (\alpha_4)$ erfüllt und somit Theorem 4.1.3 angewendet werden kann.

(iii) <u>Minimale Ränder bei festem Volumen:</u>

Man kann auch das Problem der Minimierung der Oberfläche bei festgehaltenem eingeschlossenen Volumen in diesem Kontext betrachten. Die hier gebräuchliche Formulierung wäre, das heißt E ist minimal in Ω bei festgehaltenem eingeschlossenen Volumen in Ω, wenn

$$|D\chi_E|(A) \leq |D\chi_F|(A), \quad \forall \ A \Subset \Omega, \ \forall \ F : F \triangle E \Subset A \text{ mit } |F \cap A| = |E \cap A| \, , \tag{4.15}$$

wobei $|G|$ das Lebesgue-Maß von $G \subset \mathbb{R}^n$ bezeichne. Diese Definition kann auch entsprechend auf Funktionale wie (4.8) erweitert werden, um 'Krümmungsterme' mit hinzuzunehmen. In [Tam84] (S.20-22) wird unter Verweis auf [GMT83] gezeigt, dass in solch einem Fall E fast minimal ist mit $\alpha(t) = c\,t$, womit wiederum Theorem 4.1.3 anwendbar wird.

(iv) Glatte Hyperflächen:

Wir haben im Abschnitt 4.1 gesehen, dass Ränder ∂E, die lokal C^1-Hyperflächen sind, auch fast minimal sind. Im Allgemeinen aber erfüllt die Funktion $\alpha(t)$, die die Abweichung von der Minimalität kontrolliert, nicht die Integrabilitätsbedingung (α_4). Dazu ein einfaches Beispiel einer solchen Situation. Setze $u : (-1,1) \to (0,1)$ als

$$u(t) = \begin{cases} \int_0^t (\ln(e/s))^{-1}\, ds & \text{für } t \in (0,1)\,, \\ u(0) = 0 & , \\ u(t) = u(-t) & \text{für } t \in (-1,0)\,, \end{cases}$$

und $E := \operatorname{epi}(u) \subset \mathbb{R}^2$, so dass in $\Omega := (-1,1)^2$ der Rand ∂E in C^1 ist. In $Q_t := (-t,t)^2$, $t \in (0,1)$ gilt insbesondere

$$\Psi(E, Q_t) = 2\int_0^t (\sqrt{1 + (\ln(e/s))^{-2}} - 1)\, ds,$$

da $x \mapsto u(t)$ sicherlich der minimale Graph unter den gegebenen Randbedingungen ist. Es gilt aber, dass

$$\Psi(E, Q_t) \leq 2\int_0^t \frac{1}{2}(\ln(e/s))^{-2}\, ds \leq t(\ln e/t)^{-2}$$

und zusätzlich $\Psi(E, Q_t) \sim t(\ln(e/t))^{-2}$, wobei für $f, g : (0,\varepsilon) \to \mathbb{R}^+, g > 0$,

$$f \sim g \quad \text{definiert ist als} \quad \lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{g(t)} = 1.$$

Dies sagt insbesondere aus, dass

$$\alpha(t) = (\ln(e/t))^{-2}\,,$$

wonach aber wegen (4.7) die Bedingung (α_4) nicht erfüllt ist.

Im Falle, dass ∂E in $C^{1,\alpha}$ mit $0 < \alpha < 1$ liegt, das heißt, wenn lokal $E = \operatorname{epi}(u)$ mit $u \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ und

$$|Du(y) - Du(z)| \leq L|y - z|^\alpha \tag{4.16}$$

mit einer Konstanten $L > 0$, erhalten wir bessere Resultate. Indem wir wie in Abschnitt 4.1 argumentieren, erhalten wir $(Du(0) = 0)$:

$$\int_{B'_t} \sqrt{1 + |Du|^2}\, dx' - \int_{B'_t} \sqrt{1 + |Dv|^2}\, dx' \leq 1/2 \int_{B'_t} |Du|^2\, dx' \leq 1/2\, \omega_{n-1}\, L^2\, t^{n-1}\, t^{2\alpha}\,,$$

woraus sich ergibt, dass

$$\Psi(E, B_t(x)) \leq c\, t^{n-1+2\alpha} \tag{4.17}$$

ist und lokal $\alpha(t) = c\, t^{2\alpha}$ ist, was $(\alpha_1) - (\alpha_4)$ genügt.

Bemerkung 4.1.5 Aus Bemerkung 4.1.4 erhalten wir für

$$\alpha(t) = c\,t^{2\alpha}, \quad c > 0 \ , \ \text{und } \alpha \in (0, 1/2] \, ,$$

dass

$$|\nu_E(x) - \nu_E(y)| \le \text{const}\, |x - y|^{\alpha}$$

für $x, y \in \partial^* E$ mit hinreichend kleinem Abstand $|x-y|$. Dies zeigt, dass $\partial^* E$ in $C^{1,\alpha}$ liegt. Diese Symmetrie wird aber noch eingehender in Abschnitt 4.2 behandelt werden. Darüber hinaus beachte man, dass nach (4.14) ein lokales Minimum E eines Funktionals $\mathcal{F}_H$ mit $H \in L^p_{\text{loc}}(\Omega), \ p > n$, ebenfalls ein entsprechendes $\alpha(t)$ besitzt.

4.1.3 Das Hindernisproblem für Minimalfächen

Ein weiteres Beispiel für fast minimale Flächen ergibt sich bei der Problemstellung, dass unsere Lösung E ein vorgegebenes Hindernis vermeiden soll. Genauer gesagt:

Definition 4.1.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $E, L \subset \mathbb{R}^n$ seien Caccioppoli-Mengen in Ω. Dann ist E minimal in Ω bezüglich des Hindernisses L, wenn*

$$L \cap \Omega \subset E \ \textit{und} \ |D\chi_E|(A) \le |D\chi_F|(A) \tag{4.18}$$

für alle $A \Subset \Omega$ und alle $F : F \triangle E \Subset A$ mit $L \cap A \subset F$.

Bevor wir fortfahren, benötigen wir noch folgendes kleines Lemma.

Lemma 4.1.7 *Seien E_1, E_2 Caccioppoli-Mengen in Ω. Dann gilt für jede offene Menge $A \subset \Omega$:*

$$|D\chi_{E_1 \cup E_2}|(A) + |D\chi_{E_1 \cap E_2}|(A) \le |D\chi_{E_1}|(A) + |D\chi_{E_2}|(A) \tag{4.19}$$

Beweis: Seien zuerst f, g glatte Funktionen mit $0 \le f \le 1, \ 0 \le g \le 1$ und sei

$$\phi := f + g - f \cdot g \quad \text{und} \quad \psi := f \cdot g \ .$$

Dann gilt

$$|D\phi| \le (1 - f)|Dg| + (1 - g)|Df| \quad \text{und} \quad |D\psi| \le f|Dg| + g|Df| \, ,$$

und damit

$$\int_A |D\phi| + \int_A |D\psi| \le \int_A |Df| + \int_A |Dg| \ .$$

Wir wählen nun zwei Folgen glatter Funktionen in A, $\{f_j\}, \{g_j\}$, die in $L_1(A)$ gegen χ_{E_1} und χ_{E_2} konvergieren mit

$$\int_A |Df_j| \to |D\chi_{E_1}|(A) \quad \text{und} \quad \int_A |Dg_j| \to |D\chi_{E_2}|(A).$$

Solche Funktionen existieren nach Theorem 3.1.5. Da $\phi_j \to \chi_{E \cup F}$ und $\psi_j \to \chi_{E \cap F}$ folgt (4.19) aus der Unterhalbstetigkeit bei L^1_{loc}-Konvergenz (Theorem 3.1.3). □

Bemerkung 4.1.8 Da es sich in (4.19) um Radonmaße handelt, gilt diese Ungleichung auch für beliebige Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$.

Für eine Caccioppoli-Menge F in Ω setzen wir für $A \subset \Omega$

$$\Psi_0(F, A) := |D\chi_F|(A) - \inf\{|D\chi_G|(A) : G \triangle F \Subset A,\ G \subset L\}\,, \tag{4.20}$$

womit insbesondere $\Psi_0(F, A) \leq \Psi(F, A)$ ist. Wenn wir wieder (4.18) betrachten, erhalten wir für $A \Subset \Omega$ und $F : F \triangle E \Subset A$ (wir verlangen nicht $L \cap A \subset F$!):

$$|D\chi_E|(A) \leq |D\chi_{F\cup L}|(A), \tag{4.21}$$

da $F \cup L$ eine zulässige Variation von E ist, das heißt $L \cap A \subset F \cup L$. Zusammen mit (4.19) ergibt sich

$$|D\chi_E|(A) - |D\chi_F|(A) \leq |D\chi_L|(A) - |D\chi_{F\cap L}|(A) \leq \Psi_0(L, A)\,, \tag{4.22}$$

woraus dann

$$\Psi(E, A) \leq \Psi_0(L, A) \leq \Psi(L, A) \tag{4.23}$$

folgt. Dies bedeutet, dass die Abweichung von der Minimalität von E durch die Abweichung von der Minimalität von L kontrolliert wird! Zusammen erhalten wir damit aus Theorem 4.1.3, (4.23) und (4.17):

Proposition 4.1.9 *Sei E minimal in Ω bezüglich des Hindernisses L, wobei*

$$\Psi_0(L, B_\rho(x)) \leq c\,\rho^{n-1+2\alpha}$$

für alle $B_\rho(x) \Subset \Omega$ gelte, mit $\alpha \in (0,1)$ und $c > 0$ einer lokalen Konstante. (Für diese Bedingung ist es sicherlich hinreichend, dass ∂L in $C^{1,\alpha}$ ist, siehe (4.17)). Dann ist $\partial^* E \cap \Omega$ eine $C^{1,\alpha}$-Hyperfläche und $\mathcal{H}^k((\partial E \setminus \partial^* E) \cap \Omega) = 0$ für alle $k > n - 8$.

Über den Rand ∂E lässt sich folgende weitergehende Aussage treffen

Proposition 4.1.10 *Sei E minimal in Ω bezüglich des Hindernisses L, wobei ∂L in $C^{1,\alpha}$ sei. Dann ist ∂E ebenfalls in $C^{1,\alpha}$ in einer Umgebung von $\partial L \cap \Omega$.*

Beweis: Aufgrund der vorhergehenden Diskussion genügt es zu zeigen, dass $\partial E = \partial^* E$ in einer Umgebung von $\partial L \cap \Omega$ ist. Dafür sei o.B.d.A. $0 \in \partial L \cap \partial E \cap \Omega$, und setze $E_h := \rho_h^{-1} E$, $L_h := \rho_h^{-1} L$ mit einer Nullfolge $\{\rho_h\}$. Anhand von Proposition 4.3.4 erhalten wir eine Teilfolge $\{E_{h'}\}$, die lokal gegen einen minimalen Kegel C konvergiert. Andererseits konvergiert $\{L_{h'}\}$ gegen den durch den Tangentialraum an ∂L in 0 definierten Halbraum M. Da aber $L \cap \Omega \subset E$ ist, ist $M \subset C$ und $0 \in \partial C \cap \partial L$. $\tilde{C} := \mathbb{R}^n \setminus C$ ist ebenfalls ein minimaler Kegel und $\tilde{C} \subset \tilde{M} := \mathbb{R}^n \setminus M$. Nach [Giu84] Theorem 15.5 gilt $\tilde{C} = \tilde{M}$ und somit $C = M$. Insbesondere ist $0 \in \partial^* C$. Aus Theorem 4.1.3 folgt, dass $0 \in \partial^* E$ ist, und somit auch eine kleine Umgebung von 0. $\square$

Bemerkung 4.1.11 Seien wieder $E, L \subset \mathbb{R}^n$ Caccioppoli-Mengen in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $H \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. Dann bezeichnen wir E als lokales Minimum von $\mathcal{F}_H$ in Ω (siehe (4.8)) bezüglich des Hindernisses L, falls

$$L \cap \Omega \subset E \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_H(E, A) \leq \mathcal{F}_H(F, A)$$

für alle $A \Subset \Omega$ und alle $F : F \triangle E \Subset A$ mit $L \cap A \subset F$. Dann erhalten wir aus (4.10) und analog zu (4.21) und (4.22):

$$\Psi(E, A) \leq \Psi_0(L, A) + \int_A |H| \, dx \ .$$

Wenn wir nun entsprechende Bedingungen an L wie in Proposition 4.1.9 stellen und voraussetzen, dass $H \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $p > n$ ist, erhalten wir entsprechende Ergebnisse wie in Proposition 4.1.9 und 4.1.10.

4.2 Ein erster Teilregularitätsbeweis und der Excess

In diesem Abschnitt wollen wir einen Teilregularitätsbeweis vorstellen und anhand dessen auf eine 'natürliche' Weise Techniken und Konzepte einführen, die dem Beweis des Haupttheorems zugrunde liegen.

Im vorherigen Kapitel hatten wir gesehen, dass gilt

$$\begin{aligned} \partial E \in C^{1,\alpha} &\Rightarrow \Psi(E, B_t(x)) \leq c\, t^{n-1+2\alpha} \,, \\ \Psi(E, B_t(x)) \leq c\, t^{n-1+2\alpha} &\Rightarrow \partial^* E \in C^{1,\alpha} \,, \end{aligned}$$

(siehe (4.17), Bemerkung 4.1.5). Es ist leider unvermeidlich, dass in der zweiten Implikation die Reduced Boundary $\partial^* E$ anstelle von ∂E auftritt, wie Beispiele singulärer, minimaler Kegel zeigen. Im Falle aber, dass ∂E in C^1 vorausgesetzt wird, erhalten wir folgendes Resultat:

Proposition 4.2.1 *Sei E eine Caccioppoli-Menge in Ω. ∂E ist genau dann lokal in $C^{1,\alpha}$ mit $\alpha \in (0, 1/2]$, wenn ∂E in C^1 ist und eine positive lokale Konstante c existiert mit*

$$\Psi(E, B_t(x)) \leq c\, t^{n-1+2\alpha}$$

für jedes $x \in \partial E$ und jedes hinreichend kleine $t > 0$.

Für den Beweis benötigen wir noch etwas Vorbereitung.

Definition 4.2.2 (Campanato-Räume) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $p \geq 1$, $\lambda \geq 0$. Dann ist u ein Element des Campanato-Raums $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$, wenn*

$$u \in L^p(\Omega) \quad \textit{und} \quad \sup_{\substack{x \in \Omega \\ 0 < t < diam\, \Omega}} \left(t^{-\lambda} \int_{\Omega \cap B_t(x)} |u(y) - u_{x,t}|^p \, dy \right) < +\infty \,,$$

wobei

$$u_{x,t} := \{u\}_{x,t} := |B_t(x)|^{-1} \int_{B_t(x)} u(y) \, dy \,.$$

Bemerkung 4.2.3 Eine der grundlegenden Eigenschaften der Campanato-Räume ist, dass $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ isomorph ist zu $C^{0,(\lambda-n)/p}(\Omega)$, vorausgesetzt, dass $\lambda \in (n, n+p]$ und $\partial\Omega$ hinreichend regulär (das heißt Lipschitz-stetig) ist. Siehe dazu [Giu78], Chapter 4, Theor. 1.6.

Es sollen nun kurz einige weitere Resultate vorgestellt werden, die für den Beweis von Prop. 4.2.1 wichtig sind.

Für Mittelwerte von Funktionen gilt Folgendes:
Sei $A \Subset \mathbb{R}^n$, $u \in L^2(A)$ und $u_A := |A|^{-1} \int_A u\,dx$, dann gilt

$$\int_A |u - u_A|^2\,dx = \int_A \left(|u|^2 - |u_A|^2\right)\,dx \le \int_A |u-\lambda|^2\,dx \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{4.24}$$

Man sieht dies leicht, indem man das Minimum des Funktionals auf der rechten Seite berechnet.

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gelten folgende Ungleichungen:

$$a^2 - b^2 \le 2\sqrt{1+a^2}\,\left(\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+b^2}\right)\,, \tag{4.25}$$

$$a^2 - b^2 \le 2\sqrt{1+b^2}\left(\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+b^2}\right) + \frac{1}{2}(a^2-b^2)^2\,. \tag{4.26}$$

Die Ungleichung (4.25) erhalten wir leicht aus der Taylorentwicklung von $\sqrt{1+x^2}$ um a^2

$$\sqrt{1+b^2} - \sqrt{1+a^2} - \frac{(b^2-a^2)}{2\sqrt{1+a^2}} = -\frac{(b^2-a^2)^2}{8(1+\xi^2)^{3/2}}$$

mit ξ zwischen a und b. Um (4.26) zu erhalten, sei angemerkt, dass wir mit (4.25) nur noch

$$2\left(\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+b^2}\right)^2 \le \frac{1}{2}(a^2-b^2)^2$$

zeigen müssen, was aus

$$4\left(\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+b^2}\right)^2 \le \left(\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2}\right)^2 \left(\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+b^2}\right)^2 = (a^2-b^2)^2$$

folgt. Nun noch einige Eigenschaften harmonischer Funktionen:

Lemma 4.2.4 *Sei $B = B_R(x) \subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^1(\overline{B})$, und sei v die Lösung der Laplacegleichung mit $\Delta v = 0$ in B und $v = u$ auf ∂B. Dann gilt*

$$\int_B \langle Du, Dv\rangle\,dy = \int_B |Dv|^2\,dy \le \int_B |Du|^2\,dy\,, \tag{4.27}$$

$$\int_B |Du - Dv|^2\,dy = \int_B \left(|Du|^2 - |Dv|^2\right)\,dy\,, \tag{4.28}$$

$$\{Du\}_{x,R} = \{Dv\}_{x,r} \quad \forall\; r \in (0,R] \quad \textit{und,} \tag{4.29}$$

$$r^{-n-2}\int_{B_r(x)} |Dv - \{Dv\}_{x,r}|^2\,dy \quad \textit{ist eine monoton wachsende Funktion in} \quad r \in (0,R]. \tag{4.30}$$

Beweis: (4.27)-(4.29) sind einfache Folgerungen aus den Theoremen von Gauß, den Green'schen Formeln und den Mean Value Formulas für harmonische Funktionen. Der Beweis von (4.30) ist etwas schwieriger, er basiert auf der gleichmäßigen Approximation harmonischer Funktionen durch homogene harmonische Polynome. Siehe dazu [Giu84] Lemma 6.1. □

Nun noch ein letztes technisches Lemma; danach können wir zum Beweis der Proposition übergehen.

Lemma 4.2.5 *Seien $a > 0$ und $\alpha > \beta > 0$ fest gewählt und sei $\omega : (0, T) \to [0, +\infty)$ mit $T > 0$ eine monoton wachsende Funktion. Dann existieren Konstanten $\varepsilon = \varepsilon(a, \alpha, \beta) > 0$ und $c = c(a, \alpha, \beta) > 0$, so dass, falls*

$$\omega(s) \le a((s/t)^\alpha + \varepsilon)\, \omega(t) + b\, t^\beta \tag{4.31}$$

für ein $T > 0$ und ein $b \ge 0$ und für alle $0 < s < t < T$ erfüllt ist, gilt:

$$\omega(s) \le c\,((s/t)^\beta\, \omega(t) + b\, s^\beta) \tag{4.32}$$

für alle s, t mit $0 < s < t < T$.

Beweis: Sei $\gamma \in (\beta, \alpha)$ und $\tau \in (0, 1)$ so gewählt, dass $2\, a\, \tau^\alpha < \tau^\gamma$ist und setze

$$\varepsilon := \tau^\alpha \ , \text{ und } \ c^{-1} := \tau^\beta(\tau^\beta - \tau^\gamma) \ .$$

Es sei s, t mit $0 < s < t < T$ und sei $t' := t$ und $s' := \tau t$. Anhand von (4.31) erhalten wir

$$\omega(\tau t) \le a\, (\tau^\alpha + \varepsilon)\omega(t) + b\, t^\beta \le \tau^\gamma \omega t + b\, t^\beta \ ,$$

und per Induktion

$$\omega(\tau^{k+1} t) \le \tau^{(k+1)\gamma}\, \omega(t) + b\, t^\beta\, \tau^{k\beta} \sum_{j=0}^{k} \tau^{j(\gamma-\beta)} \quad \forall k \ge 0 \, ,$$

woraus

$$\omega(\tau^k t) \le \tau^{k\beta}\, (\tau^\beta - \tau^\gamma)^{-1}\, (\omega(t) + b\, t^\beta) \quad \forall k \ge 0 \tag{$*$}$$

folgt. Da aber $0 < s < t$ ist, existiert ein eindeutiges $k \ge 0$ mit $\tau^{k+1} t \le s \le \tau^k t$, was $\tau^k \le \tau^{-1}(s/t)$ impliziert. Anhand von $(*)$ erhalten wir

$$\omega(s) \le \omega(\tau^k t) \le c\,((s/t)^\beta\, \omega t + b\, s^\beta) \, ,$$

unter Zuhilfenahme der Monotonie von ω und aufgrund der Wahl von c. □

Beweis von Prop. 4.2.1: Die eine Inklusion haben wir schon in (4.17) gezeigt, wir betrachten nun den umgekehrten Fall. Sei $u \in C^1(B'_{2T})$ und sei

$$p := \sup\{|Du(x')| : x' \in B'_{2T}\} < 1 \ . \tag{4.33}$$

Dann wählen wir $x' \in B'_T$, $0 < s < t < T$ und definieren für $r > 0$ den Zylinder

$$Q_r := \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^n : |y' - x'| < r,\ |y_n - u(x')| < r\} \ .$$

Sei $E := \operatorname{epi}(u)$ über B'_{2T} und sei v die harmonische Funktion auf $B'_t(x')$ mit $v = u$ auf $\partial B'_t(x')$.

Durch sukzessives Anwenden von (4.24),(4.28),(4.29),(4.30),(4.26),(4.28)(4.25),(4.28), (4.27),(4.29) erhalten wir: (Wir schreiben $\int_s$ als Abkürzung für $\int_{B'_s(x')}$)

$$\begin{aligned}
\int_s |Du - \{Du\}_s|^2 &\le \int_s |Du - \{Du\}_t|^2 \le 2\int_s |Du - Dv|^2 + 2\int_s |Dv - \{Du\}_t|^2 \\
&\le 2\int_t \left(|Du|^2 - |Dv|^2\right) + 2\int_s |Dv - \{Dv\}_s|^2 \\
&\le 2\int_t \left(|Du|^2 - |\{Du\}_t|^2\right) + 2\int_t \left(|\{Du\}_t|^2 - |Dv|^2\right) + 2\big(\frac{s}{t}\big)^{n+1}\int_t |Dv - \{Dv\}_t|^2 \\
&\le 4\sqrt{1 + |\{Du\}_t|^2}\int_t \left(\sqrt{1 + |Du|^2} - \sqrt{1 + |\{Du\}_t|^2}\right) + \int_t \left(|Du|^2 - |\{Du\}_t|^2\right)^2 + \\
&\quad + 2\big(\frac{s}{t}\big)^{n+1}\int_t \left(|Dv|^2 - |\{Dv\}_t|^2\right) + 4\sqrt{1 + |\{Du\}_t|^2}\int_t \left(\sqrt{1 + |\{Du\}_t|^2} - \sqrt{1 + |Dv|^2}\right) \\
&\le 4\sqrt{1 + |\{Du\}_t|^2}\int_t \left(\sqrt{1 + |Du|^2} - \sqrt{1 + |Dv|^2}\right) + 4p^2\int_t |Du - \{Du\}_t|^2 + \\
&\quad + 2\big(\frac{s}{t}\big)^{n+1}\int_t \left(|Du|^2 - |\{Du\}_t|^2\right) \ ,
\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Abschätzung noch

$$\left(|Du|^2 - |\{Du\}_t|^2\right)^2 = \langle Du + \{Du\}_t \ ,\ Du - \{Du\}_t\rangle^2 \le 4p^2\, |Du - \{Du\}_t|^2 \tag{4.34}$$

benutzt haben, was aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und (4.33) hervorgeht. Damit erhalten wir unter Verwendung von (4.33) und (4.24):

$$\int_{B'_s(x')} |Du - \{Du\}_s|^2 \le 4\sqrt{1 + p^2}\ \Psi(E, Q_t) + 2\Big(\big(\frac{s}{t}\big)^{n+1} + 2p^2\Big)\int_{B'_t(x')} |Du - \{Du\}_t|^2 \ . \tag{4.35}$$

Wenn wir jetzt voraussetzen, dass

$$\Psi(E, Q_t) \le c_1\, t^{n-1+2\alpha} \quad \text{mit} \quad 0 < \alpha < 1 \text{ ist} \tag{4.36}$$

und definieren:

$$\omega(r) := \int_{B'_r(x')} |Du - \{Du\}_r|^2 \,, \tag{4.37}$$

wobei nach (4.24) $\omega : (0, T) \to [0, +\infty)$ eine monoton wachsende Funktion ist, ergibt sich wegen $p < 1$ und der Voraussetzung an $\Psi(E, Q_t)$

$$\omega(s) \le 4\sqrt{2}\, c_1\, t^{n-1+2\alpha} + 2\Big(\big(\frac{s}{t}\big)^{n+1} + 2p^2\Big)\, \omega(t) \qquad \forall\ s, t : 0 < s < t < T \ .$$

Unter der Voraussetzung, dass p hinreichend klein ist, erfüllt $\omega(s)$ die Bedingung (4.31), und Lemma 4.2.5 ergibt

$$\omega(s) \leq c_2\big(\big(\frac{1}{t}\big)^{n-1+2\alpha}\omega(t) + 4\sqrt{2}\,c_1\big)\, s^{n-1+2\alpha} \leq \text{const}\cdot s^{n-1+2\alpha} \quad \forall s \in (0,T). \tag{4.38}$$

Wenn nun

(i) (4.36) gleichmäßig für jeden Zylinder Q_t mit Zentrum in $(x', u(x'))$, Radius $t \in (0,T)$ und $|x'| < T$ gilt;

(ii) p hinreichend klein ist, so dass (abhängig von α) Lemma 4.2.5 gilt,

dann ist

$$\int_{B'_t(x')} |Du - \{Du\}_t|^2 \leq \text{const}\cdot t^{n-1+2\alpha} \qquad \forall\ x' : |x'| < T,\ \forall\ t \in (0,T). \tag{4.39}$$

Aus Bemerkung 4.2.3, und damit der Isomorphie zwischen $\mathcal{L}^{2,n-1+2\alpha}$ und $C^{0,\alpha}$ (beachte $u : B'_{2T} \supset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$) , ergibt sich $u \in C^{1,\alpha}(B'_{T/2})$.

Wir können durch entsprechende Wahl unseres Koordinatensystems und, indem wir (in Abhängigkeit von α) T klein genug wählen, immer erreichen, dass (i) und (ii) erfüllt sind, womit die Proposition 4.2.1 bewiesen ist. $\square$

Wie wir im vorhergehenden Beweis gesehen haben, ist die Größe

$$\omega(r) := \int_{B'_r(x')} |Du - \{Du\}_r|^2$$

ein wichtiger Regularitätsparameter. Darüber hinaus gilt aber auch mit (4.25) und (4.33)

$$2\sqrt{1+p^2}\int_{B'_r(x')} \Big(\sqrt{1+|Du|^2} - \sqrt{1+|\{Du\}_r|^2}\Big) \leq \int_{B'_r(x')} \big(|Du|^2 - |\{Du\}_r|^2\big)\ , \tag{$*$}$$

und mit (4.33),(4.26) und (4.34)

$$\begin{aligned}\int_{B'_r(x')} \big(|Du|^2 - |\{Du\}_r|^2\big) \leq 2\sqrt{1+p^2}\int_{B'_r(x')} \Big(\sqrt{1+|Du|^2} - \sqrt{1+|\{Du\}_r|^2}\Big) + \\ + \frac{1}{2}\int_{B'_r(x')} \big(|Du|^2 - |\{Du\}_r|^2\big)^2\ ,\end{aligned}$$

wobei man für den zweiten Term auf der rechten Seite bekommt:

$$\frac{1}{2}\int_{B'_r(x')} \big(|Du|^2 - |\{Du\}_r|^2\big)^2 \leq 2\,p^2 \int_{B'_r(x')} \big(|Du|^2 - |\{Du\}_r|^2\big)\,,$$

und damit insgesamt für $p < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\int_{B'_r(x')} \big(|Du|^2 - |\{Du\}_r|^2\big) \leq 2\frac{\sqrt{1+p^2}}{1-2p^2}\int_{B'_r(x')} \Big(\sqrt{1+|Du|^2} - \sqrt{1+|\{Du\}_r|^2}\Big)\ . \tag{$**$}$$

Hiermit ist $\omega(r)$ für $p < 2^{-1/2}$ anhand von $(*)$ und $(**)$ kontrolliert durch

$$\int_{B'_r(x')} \left(\sqrt{1+|Du|^2} - \sqrt{1+|\{Du\}_r|^2}\right).$$

Man kann diesen Ausdruck in Größen von E schreiben. ($E = \mathrm{epi}(u)$, mit $u \in C^1$ und $p < 1$). Nach (3.16) gilt $D\chi_E = \nu\, d\mathcal{H}^{n-1}$ auf ∂E, wobei ν die innere Einheitsnormale bezeichnet. Zusätzlich kann man leicht nachprüfen, dass

$$\nu_i(x) = \frac{-D_i u(x')}{\sqrt{1+|Du(x')|^2}}, \quad \nu_n = \frac{1}{\sqrt{1+|Du(x')|^2}} \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1 \quad ,$$

womit sich ergibt

$$\begin{aligned} D_i\chi_E(Q_r) = D_i\chi_E(B'_r \times \mathbb{R}) &= \int_{B'_r\times\mathbb{R}} \nu_i\, |D\chi_E| = \\ &= \int_{B'_r} \frac{-D_i u(x')}{\sqrt{1+|Du(x')|^2}} \sqrt{1+|Du(x')|^2}\, dx' = -\int_{B'_r} D_i u(x')\, dx' \quad i = 1, \dots, n-1 \quad , \end{aligned}$$

und analog

$$D_n\chi_E(Q_r) = \mathcal{H}^{n-1}(B'_r) \ .$$

Dies zeigt dann zusammengenommen:

$$\int_{B'_r(x')} \left(\sqrt{1+|Du|^2} - \sqrt{1+|\{Du\}_r|^2}\right) \ = \ |D\chi_E|(Q_r) - |D\chi_E(Q_r)| \, ,$$

was die folgende Definition motiviert:

Definition 4.2.6 (Excess) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und E eine Caccioppoli-Menge in Ω, $A \Subset \Omega$, dann definieren wir das Radonmaß*

$$\omega(E, A) := |D\chi_E|(A) - |D\chi_E(A)| \ .$$

Die Größe $t^{n-1}\omega(E, B_t(x))$ wird als der Excess *von E in x bezeichnet.*

So wie Ψ ein Maß für die Minimalität von ∂E ist, ist ω ein Maß für die 'Flachheit' von $\partial^* E$. Falls ∂E flach ist in der einer Umgebung von $x \in \partial E$, so ist klar, dass auch $\omega(E, B_t(x)) = 0$ ist für alle hinreichend kleinen t. Darüber hinaus kann man umgekehrt zeigen, dass wenn $x \in \partial E$ ist und $\omega(E, B_T(x)) = 0$ ist, der Rand ∂E in einer Umgebung von x flach ist. (siehe [Tam84] S.39).

Lemma 4.2.7 *Sei E eine Caccioppoli-Menge in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dann gilt*

$$0 \le t^{1-n}\Psi(E, B_t(x)) \le t^{1-n}\omega(E, B_t(x)) \le t^{1-n}|D\chi_E|(B_t(x)) \tag{4.40}$$

für alle $x \in \Omega$ und alle $t < dist(x, \partial\Omega)$. Für $t \to 0^+$ gilt zusätzlich

$$t^{1-n}\omega(E, B_t(x)) = o(1) \quad \forall\, x \in \partial^* E \, . \tag{4.41}$$

Beweis: Sei $B = B_t(x)$ mit t klein genug gewählt, so dass $B \Subset \Omega$ ist, und sei $F : F \triangle E \Subset B$. Wir bezeichnen die Spur von χ_E auf ∂B mit φ. Da $F \triangle E \Subset B$ ist, ist φ auch die Spur von χ_F auf ∂B. Nach Theorem 3.1.11 gilt:

$$\int_B \chi_E \operatorname{div} g \, dx = - \int_B \langle g, D\chi_E \rangle + \int_{\partial B} \varphi \langle g, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \forall \, g \in C_0^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n).$$

Wähle nun g, so dass $g_i = \delta_{ij}$ auf B. Dies führt zu

$$D_j \chi_E(B) = \int_B D_j \chi_E = \int_{\partial B} \varphi \, \nu_j \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_B D_j \chi_F = D_j \chi_F(B) \,,$$

und damit

$$|D\chi_E|(B) - |D\chi_E(B)| = |D\chi_E|(B) - |D\chi_F(B)| \geq |D\chi_E|(B) - |D\chi_F|(B) \,,$$

was (4.40) ergibt. Sei nun $x \in \partial^* E$, damit existiert

$$\nu_E(x) = \lim_{\rho \searrow 0} (|D\chi_E|(B_\rho(x)))^{-1} D\chi_E(B_\rho(x))$$

und hat Länge 1. Da $\Theta^n(|D\chi_E|, x) = 1$ sieht man (4.41) leicht aus

$$t^{1-n} \omega(E, B_t(x)) = t^{1-n} |D\chi_E|(B_t(x)) \left(1 - \frac{|D\chi_E(B_t(x))|}{|D\chi_E|(B_t(x))} \right) . \qquad \square$$

4.3 Das Regularitätstheorem

4.3.1 Einige vorläufige Ergebnisse und das Hauptlemma

In diesem Abschnitt sollen noch einige Vorbereitungen für den Beweis des Haupttheorems getroffen werden, es wird unter anderem das Hauptlemma vorgestellt werden. Für den Beweis dieses zentralen Lemmas werden wir auf [Tam84] verweisen, es werden aber alle für dieses Lemma nötigen Vorbereitungen erbracht werden, so dass der Beweis direkt zugänglich wird.

Nun noch einige weitere Schreibweisen und Definitionen:

Falls E eine Caccioppoli-Menge in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist, setzen wir für $A \subset \Omega$

$$\nu(E, A) := \frac{D\chi_E(A)}{|D\chi_E|(A)} \,, \tag{4.42}$$

womit für den 'inneren Einheitsnormalenvektor' ν_E an ∂E folgt, ($x \in \partial^* E$):

$$\nu_E(x) = \lim_{\rho \to 0^+} \nu(E, B_\rho(x)). \tag{4.43}$$

Desweiteren sei wie in Kapitel 3 angenommen, dass wir immer für eine Caccioppoli-Menge E den entsprechenden Repräsentanten wählen. (Siehe Prop. 3.2.1).
Da für jeden Punkt $x \in \partial^* E$ die Dichte $\Theta^n(\mu_E, x) = 1$ ist, haben wir

$$\lim_{t \to 0^+} t^{1-n} |D\chi_E|(B_t(x)) = \omega_{n-1} \,. \tag{4.44}$$

In Anknüpfung an den letzten Abschnitt werden im nächsten Lemma zwei hilfreiche Ungleichungen bewiesen, die Zusammenhänge zwischen Ψ und ω herstellen.

Lemma 4.3.1 *Seien E_1, E_2 Caccioppoli-Mengen in $\mathbb{R}^n$, und B eine beliebige n-Kugel, dann gilt:*

$$\Psi(E_1,B) - \Psi(E_2,B) \leq |D\chi_{E_1}|(B) - |D\chi_{E_2}|(B) + \int_{\partial B} |\varphi_{E_1} - \varphi_{E_2}| \, d\mathcal{H}^{n-1} \,, \tag{4.45}$$

$$\Psi(E_1,B) - \Psi(E_2,B) \leq \omega(E_1,B) - \omega(E_2,B) + 2\int_{\partial B} |\varphi_{E_1} - \varphi_{E_2}| \, d\mathcal{H}^{n-1} \,, \tag{4.46}$$

wobei φ_{E_i} die innere Spur von χ_{E_i} auf ∂B bezeichne.

Beweis: Sei F eine Caccioppoli-Menge in $\mathbb{R}^n$, $B = B_t(x)$, und für $\tau \in (0,1)$ definiere die folgende Caccioppoli-Menge:

$$F_\tau := (F \cap B_{\tau t}(x)) \cup (E_2 \setminus B_{\tau t}(x)) \,,$$

so dass gilt (siehe Bem. 3.1.13)

$$\begin{aligned} |D\chi_{F_\tau}|(B_t(x)) \leq & |D\chi_F|(B_t(x)) - \big(|D\chi_F| - |D\chi_{E_2}|\big)(B_t(x) \setminus B_{\tau t}(x)) + \\ & + \int_{\partial B_{\tau t}(x)} |\varphi_{E_1} - \varphi_{E_2}| \, d\mathcal{H}^{n-1} \,. \end{aligned}$$

Wenn wir annehmen, dass $F \triangle E_1 \Subset B_t(x)$ ist, erhalten wir für τ nahe bei 1

$$\begin{aligned} |D\chi_{E_1}|(B) - |D\chi_F|(B) \leq & \, |D\chi_{E_1}|(B) - |D\chi_{E_2}|(B) + \Psi(E_2,B) - \\ & - \big(|D\chi_F| - |D\chi_{E_2}|\big)(B_t(x) \setminus B_{\tau t}(x)) + \int_{\partial B_{\tau t}(x)} |\varphi_{E_1} - \varphi_{E_2}| d\mathcal{H}^{n-1} \,. \end{aligned}$$

Indem wir nun $\tau \nearrow 1$ gehen lassen und das Supremum über verschiedene solcher F's nehmen, erhalten wir

$$\Psi(E,B) \leq |D\chi_{E_1}|(B) - |D\chi_{E_2}|(B) + \Psi(E_2,B) + \int_{\partial B} |\varphi_{E_2} - \varphi_{E_1}| \, d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{4.47}$$

was (4.45) ergibt. Im Beweis von Lemma 4.2.7 hatten wir gezeigt, dass für jede Caccioppoli-Menge F in $\mathbb{R}^n$

$$D\chi_F(B) = \int_{B_t(x)} D\chi_F = \int_{\partial B_t(x)} \varphi_F(y) \, \frac{y-x}{t} \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) \,, \tag{4.48}$$

womit folgt, dass

$$|D\chi_{E_1}(B)| - |D\chi_{E_2}(B)| \leq \int_{\partial B} |\varphi_{E_1} - \varphi_{E_2}| \, d\mathcal{H}^{n-1} \,. \tag{4.49}$$

Indem wir nun (4.47) und (4.49) verwenden, erhalten wir (4.46). □

Lemma 4.3.2 *Sei E eine Caccioppoli-Menge in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $G_1 \subset G_2 \subset \Omega$ seien Borelmengen mit $|D\chi_E|(G_2) > 0$. Dann gilt*

$$|\nu(E,G_1) - \nu(E,G_2)| \leq 2\left(\frac{\omega(E,G_2)}{|D\chi_E|(G_1)}\right)^{\frac{1}{2}} \,. \tag{4.50}$$

Beweis: Sei

$$u := \nu(E, G_1) \quad \text{und} \quad v := \nu(E, G_2)\,,$$

dann haben wir

$$|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2\langle u, v\rangle \leq 2(1 - \langle u, v\rangle).$$

Das nicht-negative Maß $\mu := |D\chi_E| - \langle v, D\chi_E\rangle$ ist wohldefiniert, und somit gilt:

$$\mu(G_1) \leq \mu(G_2) \;\Rightarrow\; |D\chi_E|(G_1) - \langle v, D\chi_E(G_1)\rangle \leq |D\chi_E|(G_2) - |D\chi_E(G_2)|\,,$$

und folglich

$$-\langle v, u\rangle \leq \frac{|D\chi_E|(G_2) - |D\chi_E(G_2)| - |D\chi_E|(G_1)}{|D\chi_E|(G_1)} = \frac{\omega(E, G_2)}{|D\chi_E|(G_1)} - 1\,,$$

was dann ergibt:

$$|u - v|^2 \leq 2\left(\frac{\omega(E, G_2)}{|D\chi_E|(G_1)}\right). \qquad \square$$

Anhand der folgenden Ungleichung werden wir später einige wichtige Schranken für verschiedene Flächen- und Volumendichteverhältnisse erhalten.

Lemma 4.3.3 *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine Caccioppoli-Menge in B_R und $0 < s < t < R$, dann gilt*

$$\begin{aligned}\left(\int_{\partial B_1} |\varphi_E(sx) - \varphi_E(tx)|\, d\mathcal{H}^{n-1}(x)\right)^2 &\leq \\ \leq 2\left(\frac{|D\chi_E|(B_t)}{t^{n-1}} - \frac{|D\chi_E|(B_s)}{s^{n-1}} + (n-1)\int_s^t \frac{|D\chi_E|(B_r)}{r^n}\, dr\right) &\times \\ \times \left(\frac{|D\chi_E|(B_t)}{t^{n-1}} - \frac{|D\chi_E|(B_s)}{s^{n-1}} + (n-1)\int_s^t \frac{\Psi(E, B_r)}{r^n}\, dr\right)&.\end{aligned} \tag{4.51}$$

Beweis: Siehe [MM84] 2.5.1.

Proposition 4.3.4 *Sei E eine Caccioppoli-Menge in $\mathbb{R}^n$ und $\alpha : (0,1) \to [0, +\infty)$, so dass:*

$$\int_0^1 t^{-1}\alpha(t)\, dt < +\infty\,. \tag{4.52}$$

Falls für ein x und ein $t \in (0,1)$ gilt, dass

$$\Psi(E, B_t(x)) \leq \alpha(t)\, t^{n-1}\,, \tag{4.53}$$

dann gilt auch für die gleichen x, t:

$$t^{1-n}|D\chi_E|(B_t(x)) \leq \alpha(t) + \frac{n\omega_n}{2}. \tag{4.54}$$

Wenn (4.53) für alle $t \in (0, T_0)$ gilt, mit $T_0 \in (0,1)$ fest, dann ist

$$t^{1-n}|D\chi_E|(B_t(x)) + (n-1)\int_0^t r^{-1}\alpha(r)\,dr \tag{4.55}$$

eine monoton wachsende Funktion auf $(0, T_0)$. Unter der zusätzlichen Annahme, dass (4.53) für alle $x \in B_{T_0}(x_0)$ und $t \in (0, T_0)$ gilt, erhält man

$$t^{1-n}|D\chi_E|(B_t(x)) \geq \omega_{n-1} - (n-1)\int_0^t \frac{\alpha(r)}{r}\,dr \quad \textit{und} \tag{4.56}$$

$$t^{-n}\min\{|B_t(x)\cap E|, |B_t(x)\setminus E|\} \geq \frac{\omega_{n-1}}{n} - \int_0^t \frac{\alpha(r)}{r}\,dr\,, \tag{4.57}$$

für alle $x \in \partial E \cap B_{T_0}(x_0)$ und alle $t \in (0, T_0)$. Unter der weiteren Annahme, dass $\alpha(t)$ monoton wachsend ist, und $\alpha(t) = o(1)$ ist, konvergiert für

$$E_h := t_h^{-1}(E - x) \tag{4.58}$$

mit $x \in \partial E \cap B_{T_0}(x_0)$ fest und einer Nullfolge $\{t_h\}$, eine Teilfolge von $\{E_h\}$ gegen einen minimalen Kegel $C \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 \in \partial C$.

Bemerkung 4.3.5 Falls E fast minimal in Ω ist mit $x_0 \in \Omega$ und $\alpha(t)$, welches (4.52) genügt, kann man sicherlich ein passendes T_0 wählen, so dass (4.53) gilt für alle $x \in B_{T_0}(x_0)$ und für alle $t \in (0, T_0)$. Damit gelten (4.54)-(4.57) für alle $x \in \partial E \cap B_{T_0}(x_0)$ und für alle $t \in (0, T_0)$. Zusätzlich beachte man, dass (α_4) (4.52) impliziert.

Beweis:
Zu (4.53):
Wir erhalten für alle $\tau \in (0,1)$, beachte Bem. 3.1.13

$$\begin{aligned}
\alpha(t)t^{n-1} &\geq |D\chi_E|(B_t(x)) - \min\{|D\chi_{E\cup B_{\tau t}(x)}|(B_t(x)), |D\chi_{E\setminus B_{\tau t}(x)}|(B_t(x))\} \\
&\geq |D\chi_E|(B_t(x)) - |D\chi_E|(B_t(x)\setminus B_{\tau t}(x)) - \\
&- \min\{\int_{\partial B_{\tau t}(x)} |\varphi_E|\,d\mathcal{H}^{n-1}, \int_{\partial B_{\tau t}(x)} |1-\varphi_E|\,d\mathcal{H}^{n-1}\} \\
&\geq |D\chi_E|(B_{\tau t}(x)) - \frac{n}{2}\omega_n(\tau t)^{n-1}\,,
\end{aligned}$$

woraus wir (4.53) durch $\tau \nearrow 1$ erhalten.

Zu (4.54):
Es gilt für $0 < s < t < T_0$

$$\begin{aligned}
(n-1)\int_s^t r^{-n}|D\chi_E|(B_r(x))\,dr &\geq (n-1)|D\chi_E|(B_s(x))\int_s^t r^{-n}\,dr \\
&\geq s^{1-n}|D\chi_E|(B_s(x)) - t^{1-n}|D\chi_E|(B_t(x))\,,
\end{aligned}$$

woraus sich

$$t^{1-n}|D\chi_E|(B_t(x)) - s^{1-n}|D\chi_E|(B_s(x)) + (n-1)\int_s^t r^{-n}|D\chi_E|(B_r(x))\,dr \geq 0 \tag{$*$}$$

ergibt. Gleichheit in $(*)$ gilt nur dann, wenn $|D\chi_E|(B_r(x))$ konstant auf (s,t) ist, was $|D\chi_E|(B_t(x)\setminus \overline{B}_s(x)) = 0$ impliziert. Analog zum Beweis von Prop 3.3.11 (i) erhalten wir, dass $\partial E \cap (B_t(x)\setminus \overline{B}_s(x)) = \emptyset$ und somit χ_E entweder 0 oder 1 ist auf $B_t(x)\setminus \overline{B}_s(x)$. Damit zeigt man wie im obigen Beweis von (4.53), dass

$$r^{n-1}\alpha(r) \geq |D\chi_E|(B_r(x)) \quad \forall\, r \in (s,t) \text{ ist,}$$

und damit

$$\Big(\frac{|D\chi_E|(B_t(x))}{t^{n-1}} + (n-1)\int_0^t \frac{\alpha(r)}{r}\,dr\Big) - \Big(\frac{|D\chi_E|(B_s(x))}{s^{n-1}} + (n-1)\int_0^s \frac{\alpha(r)}{r}\,dr\Big) \geq 0.$$

Falls in $(*)$ die strikte Ungleichung gilt, erhalten wir (4.54) einfach aus (4.51) und (4.53).

Zu (4.56):
Dies folgt für $x \in \partial^* E \cap B_{T_0}(x_0)$ aus (4.55) zusammen mit (4.44), für $x \in \partial E \cap B_{T_0}(x_0)$ folgt dies dann durch Approximation aus $\overline{\partial^* E} = \partial E$ (Proposition 3.3.11).

Zu (4.57):
Anhand von (4.56) und analog zum Beweis von (4.53) erhalten wir

$$\omega_{n-1} - (n-1)\int_0^{t'} \frac{\alpha(r)}{r}\,dr \leq \alpha(t') + (t')^{1-n}\min\{\int_{\partial B_{t'}(x)} |\varphi_E|\, d\mathcal{H}^{n-1}, \int_{\partial B_{t'}(x)} |1-\varphi_E|\, d\mathcal{H}^{n-1}\}.$$

Integration von 0 bis t liefert (Man beachte 3.17):

$$\begin{aligned}
\min\{|B_t(x)\cap E|, |B_t \setminus E|\} &\geq \int_0^t \Big(\omega_{n-1} - (n-1)\int_0^s \frac{\alpha(r)}{r}\,dr - \alpha(s)\Big)\, s^{n-1}\,ds \\
&= \frac{\omega_{n-1}}{n} t^n + (\frac{1}{n} - 1)t^n \int_0^t \frac{\alpha(r)}{r}\,dr - \frac{1}{n}\int_0^t r^{n-1}\alpha(r)\,dr \\
&\geq \Big(\frac{\omega_{n-1}}{n} - \int_0^t \frac{\alpha(r)}{r}\,dr\Big)\, t^n\,.
\end{aligned}$$

Nun zur letzten Behauptung:
Sei E_h wie in (4.58) definiert, $r > 0$ und h hinreichend groß gewählt, so dass $rt_h < T_0$ ist. Aufgrund von (4.54) und den zusätzlichen Voraussetzungen an $\alpha(t)$ gilt

$$|D\chi_{E_h}|(B_r) = t_h^{1-n}|D\chi_E|(B_{rt_h}(x)) \leq r^{n-1}(\alpha(T_0) + n\,\frac{\omega_n}{2})\,. \tag{i}$$

Damit konvergiert wegen Theorem 3.1.7 (unter Verwendung eines Diagonalverfahrens) eine Teilfolge von $\{E_h\}$ (die wir wieder mit $\{E_h\}$ bezeichnen) lokal in $\mathbb{R}^n$ gegen eine Grenzmenge C. Andererseits gilt

$$\Psi(E_h, B_r) = t_h^{1-n}\Psi(E, B_{rt_h}) \leq \alpha(rt_h)\, r^{n-1}\,, \tag{ii}$$

und damit (siehe Prop 3.2.5)

$$\Psi(C, B_r) = 0 \quad \forall\, r > 0\,, \tag{iii}$$

was besagt, dass C minimal in $\mathbb{R}^n$ ist. Aus (ii), (iii) und Prop. 3.2.5 ergibt sich

$$|D\chi_{E_h}|(B_r) \to |D\chi_C|(B_r) \ \text{ für fast alle } r > 0,$$

oder anders formuliert (siehe (i))

$$(rt_h)^{1-n}|D\chi_E|(B_{rt_h}(x)) \to r^{1-n}|D\chi_C|(B_r) \ \text{ für fast alle } r > 0.$$

Wir setzen

$$b := \lim_{t\to 0^+} (t^{1-n}|D\chi_E|(B_t(x)))\,.$$

Dabei zeigt (4.55), dass der Limes existiert; (4.54) und (4.56) geben obere und untere Schranken an b:

$$r^{1-n}|D\chi_C|(B_r) = b \in [\omega_{n-1}, \frac{n\omega_n}{2}] \ \text{ für fast alle } r > 0. \tag{iv}$$

Durch einsetzen von (iii) und (iv) in (4.51) ergibt sich (man beachte wiederum (3.17))

$$\int_{\partial B_1} |\chi_C(sy) - \chi_C(ty)|\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = 0\,,$$

für fast alle $t > 0$ und fast alle $s \in (0,t)$, womit C äquivalent ist zu einem minimalen Kegel. Wegen (iv) ist $0 \in \operatorname{supp}|D\chi_C|$ und da $\operatorname{supp}|D\chi_C| = \partial C$ ist, folgt $0 \in \partial C$. □

Wir wollen nun das Hauptlemma vorstellen, welches eine Verallgemeinerung des Lemmas von De Giorgi ist. Der Beweis folgt durch den Vergleich von E mit Niveauflächen L einer passen gewählten Glättung von χ_E. Anhand der vorhergenenden Resultate kann man dann zeigen, dass L 'hinreichend nahe' an ∂E ist um die entsprechenden Abschätzungen aus dem glatten Fall zu übertragen.

Lemma 4.3.6 (Hauptlemma) *Für jedes $n \geq 2$ und α das $(\alpha_1) - (\alpha_4)$ erfüllt und jedes $\tau \in (0, 2^{-4})$ existiert eine Konstante $\sigma^* = \sigma^*(n,\alpha,\tau) \in (0,1)$ für die die folgende Aussage zutrifft:*
Sei $\beta(t) : (0,1) \to [0,+\infty)$ eine monoton wachsende Funktion mit $0 \leq \beta(t) \leq \alpha(t)$, (kurz $\beta \prec \alpha$), und F eine Caccioppoli-Menge in B_2, für die

$$\Psi(F, B_t(x)) \leq \beta(t)t^{n-1} \quad \forall\, x \in B_1,\ \forall t \in (0,1) \quad \textit{und} \tag{H_1}$$

$$\omega(F, B_1) \leq \sigma \tag{H_2}$$

für ein $\sigma \in (0, \sigma^*]$ gilt. Dann gilt auch

$$\omega(F, B_\tau) \leq c_1\, \beta(1) + c_2\, \sigma\tau^{n+1}\,, \tag{4.59}$$

wobei c_1, c_2 positive Konstanten sind, die nur von der Dimension n abhängen.

Den Beweis dieses Lemmas kann man in [Tam84], S.61-75 nachlesen.

4.3.2 Der Beweis des Regularitätstheorems

In diesem letzten Abschnitt wollen wir den Beweis von Theorem 4.1.3 vorstellen. Zuerst zeigen wir die Regularität der Reduced Boundary einer fast minimalen Caccioppoli-Menge, daraufhin betrachten wir Folgen von gleichmäßig fast minimalen Rändern, und zum Ende untersuchen wir noch die Hausdorff-Dimension der singulären Menge.

Da die Resultate des Haupttheorems von rein lokalem Charakter sind, können wir unsere Betrachtungen auf eine kleine Umgebung eines Punktes von Ω beschränken. Unsere Annahme wird im Folgenden sein

$$\Psi(E, B_t(x)) \leq \alpha(t)t^{n-1} \quad \forall\, x \in B_{T_0}(x_0) \text{ und } \forall t \in (0, T_0)\,,$$

wobei $\alpha(t)$ den Voraussetzungen $(\alpha_1) - (\alpha_4)$ genüge. Man beachte dabei Bemerkung 4.3.5.

<u>1. Schritt:</u>

Sei $n \geq 1$ und α genüge $(\alpha_1) - (\alpha_4)$. Sei τ so gewählt, dass $0 < \tau < \min\{2^{-4}, 1/(2c_2)\}$ ist, wobei c_2 die Konstante aus (4.59) ist. Sei $\sigma^* \in (0, 1)$ die Konstante, deren Existenz durch Lemma 4.3.6 gesichert ist. Sei nun $E \subset \mathbb{R}^n$ eine Caccioppoli-Menge in Ω, $x_0 \in \partial E \cap \Omega$, $R_0 \in (0, 1)$ und $\sigma_0 \in (0, \sigma^*]$ so gewählt, dass $B_{R_0}(x_0) \subset \Omega$ und

$$\int_0^{R_0} t^{-1}\alpha(t)\, dt \leq \frac{\omega_{n-1}}{2(n-1)}\,, \tag{4.60}$$

$$\alpha(R_0) \leq \frac{\sigma_0}{4} c_1 \tau^n\,, \tag{4.61}$$

$$\Psi(E, B_t(x_0)) \leq \alpha(t)t^{n-1} \quad \forall\, x \in B_{R_0}(x_0) \text{ und } \ \forall\, t \in (0, R_0)\,, \tag{4.62}$$

$$\omega(E, B_{R_0}(x_0)) \leq \sigma_0 R_0^{n-1} \tag{4.63}$$

gelte. Indem wir nun das Hauptlemma iterativ anwenden, wollen wir zu Beginn zeigen, dass für alle $h \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\omega(E, B_{R_h}(x_0)) \leq \sigma_h R_h^{n-1}\,, \tag{4.64}$$

wobei

$$\begin{aligned} R_h &:= \tau^h R_0\,, \\ \sigma_h &:= c_3 \sum_{i=1}^{h} c_4^{i-1}\, \alpha(R_{h-i}) + c_4^h\, \sigma_0\,, \\ c_3 &:= c_1\, \tau^{1-n}\ ,\ c_4 := c_2\tau^2 \end{aligned} \tag{4.65}$$

und c_1, c_2 die Konstanten aus (4.59) sind.
Dies sieht man wie folgt: Für $h = 0$ ist (4.64) gerade (4.63). Der Rest folgt anhand von vollständiger Induktion: Nehmen wir an, (4.64) gelte für ein $h \geq 0$, und setzen

$$F_h = R_h^{-1}(E - x_0)\ ,\ \beta_h = \alpha(R_h t) \ \text{ für } t \in (0, 1]\,.$$

Aus (4.62) und (4.64) erhalten wir

$$\begin{gathered} \Psi(F_h, B_t(x)) \leq \beta_h(t)t^{n-1} \quad \forall\, x \in B_1,\ \forall\, t \in (0, 1) \ \text{ und} \\ \omega(F_h, B_1) \leq \sigma_h\,. \end{gathered}$$

Klar ist $\beta_h \prec \alpha$ und es gilt ebenso $\sigma_h \le \sigma_0 \le \sigma^*$ für alle $h \ge 0$. Dies sieht man wie folgt:

$$\tau^i \, \alpha(R_{h-i}) \le \alpha(R_h) \quad \forall\, i = 0, \dots, h$$

da $t^{-1}\alpha(t)$ monoton fallend auf $(0,1)$ ist, siehe (α_3). Damit ergibt sich aus (4.65)

$$\begin{aligned}
\sigma_h &= c_3 \sum_{i=0}^{h} c_4^{i-1} \alpha(R_{h-i}) + c_4^h \sigma_0 \le c_1 \tau^{-n} \alpha(R_h) \sum_{i=1}^{h} (c_2\tau)^{i-1} + c_4^h \sigma_0 \\
&\le c_1 \tau^{-n} \frac{1-(c_2\tau)^h}{1-c_2\tau} \alpha(R_h) + c_4^h \sigma_0 \le c_1 \tau^{-n}\, 2\,(1-(c_2\tau)^h)\, \alpha(R_h) + (c_2\tau)^h \sigma_0 \tau^h \\
&\le 2 c_1 \tau^{-n} \alpha(R_h) + \tau^h \sigma_0 \le \frac{1}{2}\sigma_0 + \tau^h \sigma_0 \le \sigma_0 \qquad \forall\, h \ge 1\,,
\end{aligned} \tag{4.66}$$

mit Hilfe von (4.61) und wegen $\tau < \frac{1}{2c_2}$. Folglich ist das Hauptlemma anwendbar und wir bekommen:

$$\omega(F_h, B_\tau) \le c_1 \beta_h + c_2 \sigma_h \tau^{n+1} = (c_3\, \alpha(R_h) + c_4 \sigma_h) \tau^{n-1} = \sigma_{h+1} \tau^{n-1}\,,$$

wegen (4.65). Insgesamt zeigt dies

$$\omega(E, B_{R_{h+1}}(x_0)) \le \sigma_{h+1}\, R_{h+1}^{n-1}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass die Voraussetzungen (4.60) - (4.63) implizieren, dass $x_0 \in \partial^* E$ ist. Dazu betrachten wir $\{\nu(E, B_{R_h}(x_0))\}$, und zeigen mit Hilfe von (4.64) und (4.50), dass dies eine Cauchyfolge ist. Darauf folgend zeigen wir, dass der Grenzwert die Länge 1 hat, und damit dann, dass $x_0 \in \partial^* E$ ist.

Wir erhalten aus (4.50)

$$\begin{aligned}
|\nu(E, B_{R_{h+k}}(x_0)) - \nu(E, B_{R_h}(x_0))| &\le \sum_{i=0}^{k-1} |\nu(E, B_{R_{h+i+1}}(x_0)) - \nu(E, B_{R_{h+1}}(x_0))| \\
&\le 2 \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\omega(E, B_{R_{h+i}}(x_0))}{|D\chi_E|(B_{R_{h+i+1}}(x_0))} \right)^{\frac{1}{2}} \le 2 \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\sigma_{h+i}\, \tau^{1-n}}{\omega_{n-1}/2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le 2^{\frac{3}{2}} (\omega_{n-1} \tau^{n-1})^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{k-1} \sigma_{h+i}^{\frac{1}{2}}\,,
\end{aligned} \tag{4.67}$$

wobei wir (4.64), (4.60) und (4.56) benutzt haben. Wegen (4.66) gilt

$$\sigma_{h+i} \le 2\, c_1\, \tau^{-n}\, \alpha(R_{h+i}) + \tau^{h+i}\, \sigma_0,$$

woraus sich

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-1} \sigma_{h+i}^{\frac{1}{2}} &\le (2\, c_1\, \tau^{-n})^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{\frac{1}{2}}(R_{h+i}) + (\tau^h \sigma_0)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{k-1} \tau^{\frac{i}{2}} \\
&\le (2\, c_1\, \tau^{-n})^{\frac{1}{2}} (1-\tau)^{-1} \int_{R_{h+k}}^{R_h} t^{-1} \alpha^{\frac{1}{2}}(t)\, dt \;+\; 2\tau^{\frac{h}{2}}\,,
\end{aligned} \tag{4.68}$$

ergibt, da $t^{-1}\alpha^{\frac{1}{2}}(t)$ ebenfalls monoton fallend ist (siehe α_3). Aus demselben Grund gilt auch

$$\int_0^{R_h} t^{-1}\alpha^{\frac{1}{2}}(t)\,dt \le \tau^{-k}\int_0^{R_{h+k}} t^{-1}\alpha^{\frac{1}{2}}(t)\,dt \quad \forall\ h,k \ge 0\,. \tag{4.69}$$

Indem wir nun (4.68) in (4.67) einsetzen ergibt sich für alle $h,k \ge 0$:

$$\begin{aligned}|\nu(E,B_{R_{h+k}}(x_0)) - \nu(E,B_{R_h}(x_0))| \le 4\Big(\frac{c_1}{\omega_{n-1}}\Big)^{\frac{1}{2}}\ \frac{\tau^{\frac{1}{2}-n}}{1-\tau}\ \int_0^{R_h} t^{-1}\alpha^{\frac{1}{2}}(t)\,dt\, + \\ + 2^{\frac{5}{2}}(\omega_{n-1}\tau^{n-1})^{-\frac{1}{2}}\cdot\tau^{\frac{h}{2}}\,,\end{aligned} \tag{4.70}$$

was zeigt, dass $\{\nu(E,B_{R_h}(x_0))\}$ eine Cauchy-Folge ist. Den Grenzwert dieser Folge bezeichnen wir mit ν und damit sieht man

$$0 \le 1 - |\nu| = \lim_{h\to\infty}\frac{\omega(E,B_{R_h}(x_0))}{|D\chi_E|(B_{R_h}(x_0))} \le \lim_{h\to\infty}(2\sigma_h/\omega_{n-1}) = 0\,,$$

analog zu (4.67). Sei $t \in (0,R_0)$ und sei $h \in \mathbb{N}_0$ die eindeutige Zahl mit

$$R_{h+1} \le t < R_h.$$

Dann ergibt sich wie oben (siehe (4.67),(4.68),(4.69) und (4.70)):

$$\begin{aligned}|\nu - \nu(E,B_t(x_0))| &\le |\nu - \nu(E,B_{R_h}(x_0))| + |\nu(E,B_{R_h}(x_0)) - \nu(E,B_t(X_0))| \\ &\le |\nu - \nu(E,B_{R_h}(x_0))| + 2\bigg(\frac{\omega(E,B_{R_h}(x_0))}{|D\chi_E|(B_t(x_0))}\bigg)^{\frac{1}{2}} \\ &\le |\nu - \nu(E,B_{R_h}(x_0))| + 2\bigg(\frac{\omega(E,B_{R_h}(x_0))}{|D\chi_E|(B_{R_{h+1}}(x_0))}\bigg)^{\frac{1}{2}} \\ &\le 8\Big(\frac{c_1}{\omega_{n-1}}\Big)^{\frac{1}{2}}\frac{\tau^{\frac{1}{2}-n}}{1-\tau}\int_0^{R_h} t^{-1}\alpha^{\frac{1}{2}}(t)\,dt + 2^{7/2}(\omega_{n-1}\tau^{n-1})^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{h}{2}} \\ &\le c_5\int_0^{R_{h+1}} t^{-1}\alpha^{\frac{1}{2}}(t)\,dt + c_6\,\tau^{\frac{h+1}{2}} \\ &\le c_5\int_0^{t} t^{-1}\alpha^{\frac{1}{2}}(t)\,dt + c_6\left(\frac{t}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

wobei c_5, c_6 nur von n und τ abhängen. Man erkennt $\nu = \nu_E(x_0)$, das heißt $x \in \partial^* E$.

Wir können auch zeigen, dass mit den Voraussetzungen (4.60)-(4.63), der Rand ∂E mit $\partial^* E$ in einer Umgebung von x_0 übereinstimmt.

Denn sei $N \ge 1$ so gewählt, dass $\sigma_N \le \sigma_0\tau^{n-1}$ (Da $\sigma_h \to 0$, siehe (4.66)) und setze

$$\delta = (1-\tau)\tau^N R_0 < R_0.$$

Dann gilt für jedes $x \in B_\delta(x_0)$, dass $B_{\tau^{N+1}R_0}(x) \subset B_{\tau^N R_0}(x_0)$ ist, und somit ist

$$\begin{aligned}(\tau^{N+1}R_0)^{1-n}\omega(E,B_{\tau^{N+1}R_0}(x)) &\le (\tau^N R_0)^{1-n}\ \tau^{1-n}\ \omega(E,B_{\tau^N R_0}(x)) \\ &\le \tau^{1-n}\sigma_N \le \sigma_0\,,\end{aligned}$$

was sich aus (4.64) ergibt. Damit sind für alle $x \in B_\delta \cap \partial E$ die Voraussetzungen (4.60)-(4.63) erfüllt, wobei wir dabei R_0 durch $R := \tau^{N+1} R_0 < R_0$ ersetzen müssen, was $B_\delta(x_0) \cap \partial E = B_\delta(x_0) \cap \partial^* E$ zeigt.

Insbesondere haben wir für alle $x \in B_\delta(x_0) \cap \partial E$ und jedes $t \in (0, R)$

$$|\nu_E(x) - \nu(E, B_t(x))| \leq c_5 \int_0^t t^{-1} \alpha^{\frac{1}{2}}(t)\, dt + c_6 \Big(\frac{t}{R}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.71}$$

Anhand dieser Abschätzung können wir nun leicht zeigen , dass ν_E sich in einer Umgebung von x_0 stetig auf ∂E verändert. Setze dazu $\delta_1 := \tau^2 R/2 < \delta/24$ und für $x, y \in \partial E \cap B_{\delta_1}(x_0)$ mit $x \neq y$ existiert genau ein $h \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\tau^{h+2} R \leq |x - y| < \tau^{h+1} R. \tag{4.72}$$

Dann setze $s := (1 - \tau)\, \tau^h\, R,\ t = \tau^h R$, so dass $B_s(x) \subset B_t(y)$ ist. Aus (4.50) ergibt sich wiederum

$$|\nu(E, B_s(x)) - \nu(E, B_t(y))| \leq \left(\frac{\omega(E, B_t(y))}{|D\chi_E|(B_s(x))} \right)^{\frac{1}{2}},$$

und wenn wir nochmals dieselben Schritte wie zuvor anwenden, ergibt sich mit (4.71)

$$|\nu_E(x) - \nu_E(y)| \leq c_7 \int_0^{|x-y|} t^{-1} \alpha^{\frac{1}{2}}(t)\, dt + c_8 \Big(\frac{t}{R}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

wobei wiederum c_7, c_8 nur von n und τ abhängen. Da aber $t = \tau_h R$ und somit $\tau^2 t \leq |x - y|$ erhält man mit (4.69)

$$|\nu_E(x) - \nu_E(y)| \leq c_7\, \tau^{-2} \int_0^{|x-y|} t^{-1} \alpha^{\frac{1}{2}}(t)\, dt + c_8\, \tau^{-1} \Big(\frac{|x - y|}{R}\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.73}$$

was die Stetigkeit von ν_E auf $\partial E \cap B_{\delta_1}(x_0)$ ergibt.

Den ersten Teil des Regularitätstheorems sieht man nun wie folgt:

Es genügt zu zeigen, dass für einen fast minmalen Rand ∂E in Ω und $x_0 \in \partial^* E \cap \Omega$, es möglich ist, R_0 und σ_0 so zu wählen, dass (4.60)-(4.63) erfüllt sind. Da E fast minimal ist und $(\alpha_1) - (\alpha_4)$ gelten, sind (4.60)-(4.62) kein Problem. Aus $x_0 \in \partial^* E$ und (4.41) sieht man dann auch, dass (4.63) kein Problem darstellt. Aus der Stetigkeit des Normalenvektors folgt dann mit [Giu84] Theorem 4.11, dass $\partial^* E$ in einer Umgebung von x_0 eine C^1-Hyperfläche ist.

2.Schritt:

Wir wollen nun den Fall betrachten, dass wir eine Folge von gleichmäßig fast minimalen Caccioppoli-Mengen E_h haben, die in L^1_{loc} gegen eine Caccioppoli-Menge E_∞ konvergieren. Konkret heißt dies: Sei eine Funktion $\alpha(t)$ gegeben, welche $(\alpha_1) - (\alpha_4)$ erfüllt, $T_0 \in (0, 1)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$, für die gilt

$$\Psi(E_h, B_t(x)) \leq \alpha(t) t^{n-1} \quad \forall\, x \in B_{T_0}(x_0),\ \forall\, t \in (0, T_0),\ \forall\, h \geq 1, \tag{4.74}$$

und konvergiere $E_h \to E_\infty$ in $L^1_{\text{loc}}(B_{2T_0}(x_0))$.

Sei $\{x_h\}$ eine Folge von Punkten mit $x_h \in \partial E_h$ für alle h, und zusätzlich konvergiere $x_h \to x_\infty \in B_{T_0}(x_0)$. Dann gilt $B_r(x_h) \cap E_h \to B_r(x_\infty) \cap E_\infty$ für alle $r \in (0,d)$ in $L^1_{\text{loc}}(B_{T_0}(x_0))$ wobei $d := T_0 - |x_0 - x_\infty|$ ist. Insbesondere ist $B_r(x_h) \subset B_d(x_\infty)$ für $r < d/2$ und hinreichend großes h. Damit erhalten wir aus (4.57), dass $x_\infty \in \partial E_\infty$ ist.

Nehmen wir jetzt an, dass $x_\infty \in \partial^* E_\infty$ ist, und wählen τ und σ^* wie im 1. Schritt. Nun können wir $r \in (0,d)$ und $h_0 \geq 1$ wählen, so dass für alle $h \geq h_0$ gilt:

$$\begin{gathered}\int_0^r t^{-1}\alpha(t)\,dt \leq \frac{\omega_{n-1}}{2(n-1)}\ ; \qquad \alpha(r) \leq \sigma^* \frac{\tau^n}{4c_1}\ ; \\ r^{1-n}\omega(E_\infty, B_r(x_\infty)) \leq 2^{-n-1}\sigma^*; \qquad |x_h - x_\infty| < r/2\ ; \\ r^{1-n}\int_{\partial B_r(x_\infty)} |\varphi_{E_h} - \varphi_{E_\infty}|\, d\mathcal{H}^{n-1} \leq 2^{-n-2}\sigma^*\,,\end{gathered} \tag{4.75}$$

wobei die letzte Forderung aufgrund von $\chi_{E_h} \to \chi_{E_\infty}$ in $L^1(B_{T_0}(x_0))$ und (3.17) erfüllbar ist. Da die E_h alle fast minimal sind und da wegen Prop. 3.2.5 (ii) die Grenzmenge E_∞ ebenfalls fast minimal ist, ergibt sich aus (4.46) zusammen mit (4.75)

$$\begin{aligned} r^{1-n}\omega(E_h, B_r(x_\infty)) &\leq r^{1-n}\omega(E_\infty, B_r(x_\infty)) + r^{1-n}\psi(E_\infty, B_r(x_\infty)) + \\ &\quad + 2r^{1-n}\int_{\partial B_r} |\varphi_{E_h} - \varphi_{E_\infty}|\, d\mathcal{H}^{n-1} \leq 2^{1-n}\sigma^*\,. \end{aligned}$$

Da aber $B_{r/2}(x_h) \subset B_r(x_\infty)$ ist für alle $h \geq h_0$ sieht man anhand der Monotonie von ω, dass

$$\omega(E_h, B_{r/2}(x_h)) \leq \sigma^* \Big(\frac{r}{2}\Big)^{n-1}\,,$$

womit wir für jedes E_h, x_h, $r/2$ und σ^* in der gleichen Situation wie im 1. Schritt sind. Anhand dessen erhalten wir $x_h \in \partial^* E_h$ für alle $h \geq h_0$. Zusätzlich gilt (siehe (4.71)):

$$|\nu_{E_h}(x_h) - \nu(E_h, B_t(x_h))| \leq c_5 \int_0^t t^{-1}\alpha^{\frac{1}{2}}(t)\,dt + c_6\Big(\frac{2t}{R}\Big)^{\frac{1}{2}} \quad \forall\ h \geq h_0,\ \forall\ t \in (0, r/2). \tag{4.76}$$

Ebenso erhalten wir dieselbe Ungleichung für E_∞, da E_∞ ebenfalls fast minimal ist. Wiederum gilt wegen $\chi_{E_h} \to \chi_{E_\infty}$ in $L^1(B_{r/2}(x_0))$ und 3.17, dass

$$\int_{\partial B_t(x_\infty)} |\varphi_{E_h} - \varphi_{E_\infty}|\, d\mathcal{H}^{n-1} \to 0 \ \text{ für fast alle } t \in (0, r/2)\,. \tag{4.77}$$

Um die Konvergenz von $\nu_{E_h}(x_h) \to \nu_{E_\infty}(x_\infty)$ zu zeigen, betrachten wir:

$$\begin{aligned} \limsup_{h\to\infty} |\nu(E_h, B_t(x_h)) - \nu(E_\infty, B_t(x_\infty))| &\leq \limsup_{h\to\infty}\Big|\nu(E_h, B_t(x_h)) - \frac{D\chi_{E_h}(B_t(x_\infty))}{|D\chi_{E_h}|(B_t(x_h))}\Big| \\ + \limsup_{h\to\infty}\Big|\frac{D\chi_{E_h}(B_t(x_\infty))}{|D\chi_{E_h}|(B_t(x_h))} - \nu(E_h, B_t(x_\infty))\Big| &+ \limsup_{h\to\infty}\Big|\nu(E_h, B_t(x_\infty)) - \frac{D\chi_{E_\infty}(B_t(x_\infty))}{|D\chi_{E_h}|(B_t(x_\infty))}\Big| \\ + \limsup_{h\to\infty}\Big|\frac{D\chi_{E_\infty}(B_t(x_\infty))}{|D\chi_{E_h}|(B_t(x_\infty))} - \nu(E_\infty, B_t(x_\infty))\Big|. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Summanden verschwinden für fast alle $r \in (0, r/2)$ da wir $|D\chi_{E_h}|(\partial B_r(x_h)) = |D\chi_{E_h}|(\partial B_r(x_\infty)) = |D\chi_{E_\infty}|(\partial B_r(x_\infty)) = 0$ für alle h und für fast alle $r \in (0, r/2)$ haben. Für den vorletzten Summanden erhalten wir mit (4.48)

$$\begin{aligned}
&\limsup_{h\to\infty} \Big| \nu(E_h, B_t(x_\infty)) - \frac{D\chi_{E_\infty}(B_t(x_\infty))}{|D\chi_{E_h}|(B_t(x_\infty))} \Big| \\
&\le \limsup_{h\to\infty} 2\,\omega_{n-1}^{-1}\, t^{1-n} \int_{\partial B_t(x_\infty)} |\varphi_{E_h} - \varphi_{E_\infty}|\, d\mathcal{H}^{n-1} \longrightarrow 0\,,
\end{aligned}$$

für fast alle $t \in (0, r/2)$. Für den letzten Term erhalten wir mit (4.45)

$$\begin{aligned}
&\limsup_{h\to\infty} \Big| \frac{D\chi_{E_\infty}(B_t(x_\infty))}{|D\chi_{E_h}|(B_t(x_\infty))} - \nu(E_\infty, B_t(x_\infty)) \Big| \\
&\le \limsup_{h\to\infty} \frac{\big||D\chi_{E_\infty}|(B_t(x_\infty)) - |D\chi_{E_h}|(B_t(x_\infty))\big|}{|D\chi_{E_h}|(B_t(x_\infty))} \\
&\le \limsup_{h\to\infty} 2\,\omega_{n-1}^{-1}\, t^{1-n} \Big(\Psi(E_\infty, B_t(x_\infty)) + \Psi(E_h, B_t(x_\infty)) + \int_{\partial B_t(x_\infty)} |\varphi_{E_h} - \varphi_{E_\infty}|\, d\mathcal{H}^{n-1} \Big) \\
&\le 4\,\omega_{n-1}^{-1}\, \alpha(t)\,,
\end{aligned}$$

für fast alle $t \in (0, r/2)$. Insgesamt ergibt dies

$$\limsup_{h\to\infty} |\nu(E_h, B_t(x_h)) - \nu(E_\infty, B_t(x_\infty))| \le c_9\, \alpha(t) \quad \text{für fast alle } t \in (0, r/2)\,, \tag{4.78}$$

was zusammen mit (4.76) und der darauffolgenden Bemerkung die Konvergenz von $\nu_{E_h}(x_h) \to \nu_{E_\infty}(x_\infty)$ zeigt.

<u>3.Schritt:</u>

Der Beweis, dass $\mathcal{H}^k((\partial E \setminus \partial^* E) \cap \Omega) = 0$ für $k > n - 8$ läuft völlig analog zur Beweisführung in Abschnitt 3.3.3, die dazu notwendigen Resultate finden sich im 1. und 2. Schritt dieses Beweises. $\square$

Literaturverzeichnis

[Ada75] R. A. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[EG92] L.C. Evans and R.F. Gariepy. *Measure Theory and fine Properties of Functions.* CRC Press, 1992.

[Fed70] H. Federer. The singular set of area minimizing rectifiable currents with codimension one and of area minimizing flat chains modulo two with arbitrary codimension. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76:767–771, 1970.

[Giu78] E. Giusti. *Equazioni ellittice del socondo ordine.* Pitagora Editrice, 1978.

[Giu84] E. Giusti. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation.* Birkhäuser, 1984.

[GMT83] E. Gonzales, U. Massari, and I. Tamanini. On the regularity of boundaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint. *Indiana Univ. Math. J.*, 32:25–37, 1983.

[MM84] U. Massari and M. Miranda. *Minimal Surfaces of Codimension one.* Notas de Matematica. North-Holland, 1984.

[Sim83] Leon Simon. *Lectures on Geometric Measure Theory.* Centre for Mathematical Analysis, Australian National Unversity, 1983.

[Tam82] I. Tamanini. Boundaries of Caccioppoli sets with Hölder - continious normal vector. *J. Reine Angew. Math.*, 334:27–39, 1982.

[Tam84] I. Tamanini. Regularity results for almost minimal oriented hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$. *Quaderni del Dipartimento di Matematica dell' Universita di Lecce*, 1984.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbständig und unter ausschließlicher Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Tübingen, im August 1999