Selbstähnliche Lösungen des mittleren Krümmungsflußes

DIPLOMARBEIT

vorgelegt von

Ralf Otto Rigger

betreut von

Prof. Dr. G. Huisken

an der mathematischen Fakultät
der Eberhard–Karls–Universität Tübingen

Tübingen, im März 1996

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Wir werden uns in dieser Arbeit mit einer in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathbf{N}^{n+1}$ glatt immersierten Familie von Hyperflächen beschäftigen. Diese Hyperflächenfamilie soll einer Evolutionsgleichung der Form

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F} = h\boldsymbol{\nu} \qquad (\boldsymbol{\nu} \text{ Normalenvektor zu } \mathbf{F}(\mathbf{M}^n)) \tag{1.1}$$

genügen. Die Funktion $h : \mathbf{M}^n \to \mathbb{R}$ gibt also die Flußgeschwindigkeit in Normalenrichtung an. Von Bedeutung sind hierbei bestimmte, von der Geometrie der Mannigfaltigkeit abhängende Flußgeschwindigkeiten. Unter 'Geometrie' ist dabei die Änderung der Normalen in verschiedene Richtungen der Raumes zu verstehen. Diese Änderung kann durch die Differentialrechnung mathematisch präzise gefaßt werden, und wird mit dem Begriff 'Krümmung' bezeichnet. Genauer soll in unserem Fall $h = -H$ gelten, wobei H die 'mittlere' Krümmung von $\mathbf{M}^n$ bezüglich des umgebenden Raumes ist. Wir erhalten dann als Evolutionsgleichung den mittleren Krümmungsfluß (MKF).
Das Interesse, den MKF zu untersuchen, rührt von der Tatsache, daß die mittlere Krümmung der Euler-Lagrange-Operator des Variationsproblems der Oberflächenminimierung der Hyperfläche $\mathbf{F}(\mathbf{M}^n)$ ist. Wir folgen also beim MKF dem Gradienten dieses Funktionals. Ist zum Beispiel $\mathbf{F}_t$ als Graph einer Funktion über einem Gebiet im $\mathbb{R}^n$ mit festen Randwerten gegeben, so ist zu erwarten, daß $\mathbf{M}^n_t$ gegen eine Minimalfläche konvergiert ($\mathbf{H} \equiv 0$). In diesem Fall treten einige mathematische Probleme auf. So ist z.B. nicht klar, ob und wie lange $\mathbf{M}^n$ ein Graph bleibt und ob $\mathbf{M}^n$ glatt bleibt (vgl. [Br]).
Diese Problematik ist eng mit der Langzeitexistenz einer Lösung für die Evolutionsgleichung verbunden.
Uns interessiert in bezug auf die 'Startfläche' ein allgemeinerer Rahmen: Kompakte Mannigfaltigkeiten ohne Rand. Wobei sich durch das Fehlen eines Randes vieles vereinfacht. Probleme, die in Verbindung mit der Langzeitexistenz auftreten, sind Singularitäten der Krümmung. Dabei beschränkt sich diese Problematik nicht auf den MKF. Man könnte auch einen, dem MKF verwandten Fluß betrachten. Für h könnte man $h = H - \int H d\nu$ einsetzen. Damit würde das eingeschlossene

Volumen konstant gehalten. Dies ist ein sehr gegeignetes Modell für Oberflächenspannungen, wie sie in der Physik z.B. bei Kapilarflächen oder Seifenblasen häufig auftreten.
Uns interessieren also Singularitäten des MKF.
In seiner Arbeit [Hu1] betrachtet Huisken zum ersten Mal das Verhalten konvexer Hyperflächen unter dem oben geschilderten MKF und erhält Aussagen über deren Verhalten in Singularitäten. Diese konvexen Flächen 'verschwinden' in einem 'runden Punkt'. Später gelingt es ihm mit Hilfe einer Monotonieformel (vgl. Kapitel 3), Aussagen über die approximative Gestalt einer Hyperfläche in einer Singularität in $\mathbb{R}^{n+1}$ zu machen. In Kapitel 3 verallgemeinern wir diese Ergebnisse für Einbettungen in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathbf{N}^{n+1}$. Dort werden wir sehen, daß auch in diesem Fall für eine bestimmte Art von Singularitäten (Typ1) die Gleichung

$$\mathbf{H}_\infty = \langle \mathbf{F}_\infty, \boldsymbol{\nu}_\infty \rangle, \tag{1.2}$$

in $\mathbf{N}^{n+1}$ gilt. Man kann dann auf dem Tangentilaraum arbeiten, hierbei ist $\mathbf{F}$ der Positionsvektor und $\boldsymbol{\nu}$ der Normalenvektor der Fläche. Der Index ∞ deutet an, daß es sich um eine Art 'Grenzfläche' handelt. Erfüllt nun bereits die 'Startfläche' diese Gleichung, so ändert diese ihre geometrische Form unter dem MKF nicht, sondern bewegt sich selbstähnlich.
Mit Hilfe dieser Formel werden wir in Kapitel 5 dann Aussagen über rotationssymmetrische selbstähnliche Lösungen des MKF herleiten.
Nicht für alle Singularitäten gilt die Gleichung 1.2. Das Grenzverhalten der anderen, sogenannten Typ2-Singularitäten ist in der Forschung noch weitgehend offen. Es treten Grenzflächen auf, für welche die Evolution einer Translation entspricht, z.B. für den sogenannten 'Grim Reaper' (vgl. [Mu]). Diese Kurve tritt z.B. bei Singularitäten von sich selbst schneidenden Kurven in $\mathbb{R}^2$ auf. In diesem Fall erhält man dann:

$$\mathbf{H}_\infty = \langle \mathbf{F}_\infty, \mathbf{e}_{n+1} \rangle. \tag{1.3}$$

Jedoch sind bis heute nur sehr wenige dieser Lösungen bekannt.
Da man den Fluß über eine eventuell auftretende Singularität hinaus fortsetzen möchte, werden zum Verständniss homothetischer Lösungen des MKF große Anstrengungen unternommen.
Für Typ1-Singularitäten kennt man hingegen inzwischen eine ganze Reihe Lösungen: Im Fall von Kurven wurde das Problem von Mullin [Mu] und später von Abresch und Langer [AL] gelöst. Huisken hat für kontrahierende Flächen mit positiver mittlerer Krümmung eine vollständige Klassifikation aufgestellt. Angenent hat die Existenz eines eingebetteten Torus bewiesen. Angenents Methode zeigt überdies, wie eine Vielzahl weiterer rotationssymmetrischer Lösungen aussieht. Chopp [Ch] hat ferner mit einer Symmetrisierungsmethode numerisch ebenfalls einige homothetische Lösungen gefunden (vgl. Kapitel 4).

Im letzten Kapitel wenden wir uns der Stabilität homothetischer Lösungen zu und erhalten dabei die ersten beiden Eigenwerte des Stabilitätsoperators, sowie das Stabilitätsverhalten der Sphäre. Ferner stellt sich heraus, daß der Schwerpunkt der selbstähnlichen Lösungen in einer Metrik $\overline{g}$, in welcher sich diese Minimalflächen darstellen, immer im Ursprung liegt.
Wir greifen in der ganzen Arbeit gelegentlich auf die Arbeiten von Hamilton, Huisken und vielen anderen zurück. Da die Gleichung 1.1 eine quasilineare parabolische Differentialgleichung ist, werden bei all diesen Überlegungen auch viele Techniken der partiellen Differentialgleichungen verwendet. Hierbei ist vor allem das Maximumsprinzip zu nennen.
Die Lösung der hier betrachteten parabolischen Differentialgleichung ist immer analytisch. Daher darf man das Modell des mittleren Krümmungsflußes nicht völlig unkritisch für die Modellierung physikalischer Phänomene übernehmen. Hat man z.B. in einer Hyperfläche ein Gebiet, auf welchem $H \equiv 0$ gilt, so ändert sich dies instantan unabhängig von der Größe der Gebiets, was einer unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit entspricht. Inwieweit der MKF daher als Modell für unterschiedliche physikalische Probleme verwendet werden kann, hängt von der jeweiligen Fragestellung ab. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf das Gebiet der Geometrie und zeigt dabei Eigenschaften des MKF als rein mathematischem Modell.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Professor Huisken für die Betreuung dieser Arbeit, für seine Anregungen und kritischen Bemerkungen, sowie für seine Hilfsbereitschaft bedanken.
Ferner sei Axel Stahl für die Hilfe zu Beginn der Arbeit, sowie Alexander Polden für die vielen Stunden mathematischer (und nicht mathematischer) Gespräche, sowie seiner Hilfe, die Daten meiner Arbeit in den Katakomben der SiliconGraphics Rechner wieder zu finden, gedankt. Nicht zuletzt gilt mein Dank Volker Christ und Michael Holder für die ab und an nötigen Aufmunterungen und Problemdiskussionen. Was natürlich nicht vergessen werden darf, ist die 'Zwischendurchverpflegung' mit Keksen und Kaffee in unserem Sekretariat bei Frau Schimmel.
Schließlich möchte ich meiner Mutter Wilma Rigger, meiner Schwester Karin und ihrem Mann Birger danken, die mich während dieser Arbeit und während meines ganzen Studiums unterstützt haben.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Bezeichnungen

Wir werden uns in dieser Arbeit mit Immersionen $\mathbf{F}(\mathbf{M}^n)$ einer Mannigfaltigkeit als Hyperfläche in $\mathbb{R}^{n+1}$ beziehungsweise in eine weitere Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\mathbf{N}^{n+1}, g)$ beschäftigen:

$$\mathbf{F} : \mathbf{M}^n \to \mathbb{R}^{n+1}/\mathbf{N}^{n+1}.$$

Die Metrik ist in Koordinaten $\{y_\alpha\}_{\alpha=1..n+1}$ gegeben durch:

$$g_{\alpha\beta} \;=\; \langle \frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\beta} \rangle_g.$$

Für die auf $\mathbf{M}^n$ induzierte Metrik gilt dann $g_{ij} = \langle \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j} \rangle_g$ (die Koordinaten auf $\mathbf{M}^n$ bezeichnen wir mit $\{x_i\}_{i=1..n}$). Man beachte, daß wir für die Indizes der Koordinaten im Falle von $\mathbf{M}^n$ lateinische - diese laufen von 1 bis n - und im Falle von $\mathbb{R}^{n+1}/\mathbf{N}^{n+1}$ griechische Indizes - diese laufen bis n+1 - verwendet haben. Der zugehörige Levi-Civita Zusammenhang wird mit ${}^g\nabla$ oder, falls die Metrik eindeutig ist, einfach mit ∇ bezeichnet. Die Christoffelsymbole werden als Γ_{ij}^k geschrieben, und für $\nabla_{\mathbf{e}_i}$ werden wir auch kurz ∇_i schreiben. Ist zwischen der Ableitung auf der Untermannigfaltigkeit und der umgebenden Mannigfaltigkeit zu unterscheiden, so kennzeichnen wir dies durch ∇ und $\overline{\nabla}$. Wir machen von der Einsteinschen Summenkonvention $\sum_{i=1}^n \nu_i \nu^i = \nu_i \nu^i$ Gebrauch, und werden auch die **erweiterte Summenkonvention** benutzen:

$$\nu_i \nu_i \;=\; g^{ij} \nu_i \nu_j = \sum_{i,j} g^{ij} \nu_i \nu_j.$$

Indizes werden also durch die Multiplikation mit g_{ij} bzw. g^{ij} nach oben bzw. nach unten verschoben. Die Krümmung von Hyperflächen relativ zum umgebenden Raum wird durch die zweite Fundamentalform beschrieben:

Definition 2.1 *Sei* $\mathbf{M}^n$ *eine Untermannigfaltigkeit in* $\mathbf{N}^{n+1}$. *Sei* $N_\mathbf{P}\mathbf{M}^n$ *der Orthogonalraum von* $\mathbf{M}^n$ *in* $\mathbf{N}^{n+1}$ *im Punkte P. Dann heißt*

$$\begin{aligned} B &: T_\mathbf{P}\mathbf{M}^n \times T_\mathbf{P}\mathbf{M}^n \to N_\mathbf{P}\mathbf{M}^n \\ B(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &:= (\nabla_\mathbf{X}\mathbf{Y})^\perp \end{aligned}$$

die **zweite Fundamentalform** *von* $\mathbf{M}^n$ *in* $\mathbf{N}^{n+1}$. *Wählt man als Orientierung das Einheitsnormalenvektorfeld* $\boldsymbol{\nu}$ *(z.B. die äußere Normale), so wird die durch* $B(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -A(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\boldsymbol{\nu}$ *gegebene Abbildung*

$$\begin{aligned} A &: T_\mathbf{P}\mathbf{M}^n \times T_\mathbf{P}\mathbf{M}^n \to \mathbb{R} \\ A(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &:= \langle (\nabla_\mathbf{X}\mathbf{Y})^\perp, \boldsymbol{\nu}\rangle = -|(\nabla_\mathbf{X}\mathbf{Y})^\perp| \end{aligned}$$

ebenfalls als zweite Fundamentalform bezeichnet. In Koordinaten läßt sich A *durch eine symmetrische Matrix* $\{h_{ij}\}$ *darstellen. Man nennt dann* $\{h_i^j\}$ *die Weingartenabbildung. Diese ist ebenfalls symmetrisch, und in geeigneten Koordinaten gilt:*

$$A \quad = \quad \{h_{ik}g^{kj}\} = \{h_i^j\} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ & \dots \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Die λ_i *werden auch Hauptkrümmungen der Hyperfläche genannt. Mit* H *bezeichnen wir die mittlere Krümmung* $(H = \mathrm{tr}\,(A) = \sum \lambda_i)$.

Es gelten dann für ein adaptiertes orthonormales n-Bein $\{\mathbf{e}_i\}$ auf $\mathbf{M}^n$ mit $\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_j(\mathbf{P}) = 0$ die Weingartengleichungen in der Form:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_j &= (\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_j)^\perp + (\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_j)^\top = -h_{ij}\boldsymbol{\nu} \\ \nabla_{\mathbf{e}_i}\boldsymbol{\nu} &= \sum_j \langle \nabla_{\mathbf{e}_i}\boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_j\rangle \mathbf{e}_j + \langle \nabla_{\mathbf{e}_i}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}\rangle\boldsymbol{\nu} = -\sum_j \langle \boldsymbol{\nu}, \nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_j\rangle \mathbf{e}_j = h_{ij}\mathbf{e}_j \end{aligned}$$

(da für ein Einheitsvektorfeld $0 = \nabla_\mathbf{X}\langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}\rangle = 2\langle \nabla_\mathbf{X}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}\rangle$ gilt).
Zur Definition und Erläuterung weiterer Grundbegriffe aus der Differentialgeometrie sei auf [Do1],[Do2] oder [Sp] verwiesen.

2.2 Analytische Hilfsmittel

In diesem Abschnitt wollen wir Evolutionsgleichungen für geometrische Größen herleiten. Ferner werden wir uns mit dem Laplace-Operator auf Mannigfaltigkeiten beschäftigen.

Lemma 2.2 *Sei* $h : \mathbf{M}^\mathbf{n} \to \mathbb{R}$ *eine beliebige glatte Funktion. Sei* $\mathbf{F}_t : \mathbf{M}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ *eine 1-Parameterfamilie von Immersionen mit*

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}_t(\mathbf{P}) = -h(t, \mathbf{P})\boldsymbol{\nu}(\mathbf{F}_t(\mathbf{P}, t)) = -h(\mathbf{P}, t)\boldsymbol{\nu}(\mathbf{P}, t).$$

Dann gilt für die Metrik, das Oberflächenmaß und die zweite Fundamentalform:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} &= -2hh_{ij} \\
\frac{\partial}{\partial t} d\mu_M &= -hH d\mu_M \\
\frac{\partial}{\partial t} h_{ij} &= -\nabla_i \nabla_j h - h(h_{ik}h_{kj} + \overline{\mathrm{Riem}}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_i, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_j)).
\end{aligned}$$

Beweis:
Wir verwenden die Weingartengleichungen und die Tatsache, daß $\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{F} = \mathbf{e}_i$ ist. Damit folgt für die Metrik:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} &= \frac{\partial}{\partial t}\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{F}, \frac{\partial}{\partial x_j}\mathbf{F}\rangle \\
&= \langle \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{F}, \frac{\partial}{\partial x_j}\mathbf{F}\rangle + \langle \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{F}, \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_j}\mathbf{F}\rangle \\
&= \langle \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}, \frac{\partial}{\partial x_j}\mathbf{F}\rangle + \langle \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{F}, \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}\rangle \\
&= \langle \frac{\partial}{\partial x_i}(-h\boldsymbol{\nu}), \frac{\partial}{\partial x_j}\mathbf{F}\rangle + \langle \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{F}, \frac{\partial}{\partial x_j}(-h\boldsymbol{\nu})\rangle \\
&= -\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(h)\boldsymbol{\nu}, \frac{\partial}{\partial x_j}\mathbf{F}\rangle - \langle h\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{\nu}), \frac{\partial}{\partial x_j}\mathbf{F}\rangle - \langle \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{F}, \frac{\partial}{\partial x_j}(h)\boldsymbol{\nu}\rangle \\
&\quad -\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{F}, h\frac{\partial}{\partial x_j}(\boldsymbol{\nu})\rangle \\
&= -h(\langle h_{jk}\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i\rangle + \langle h_{jk}\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i\rangle) = -2hh_{ij}.
\end{aligned}$$

Für die erste Variation des Oberflächenmaßes $d\mu_M$ läßt sich nun zusammen mit der bekannten Gleichung $\frac{\partial}{\partial t}\det g_{ij} = \det g_{ij}\ \mathrm{tr}\,(g^{lm}\frac{\partial}{\partial t}g_{mk})$ weiter folgern:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} d\mu_M &= \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\det g_{ij}}\, dx^n \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\det g_{ij}}}\det g_{ij}\mathrm{tr}\,(g^{lm}\frac{\partial}{\partial t}g_{mk}))dx^n \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\det g_{ij}}\mathrm{tr}\,(g^{lm}(-2hh_{mk}))dx^n \\
&= -\sqrt{\det g_{ij}}hH dx^n = -hH d\mu_M.
\end{aligned}$$

Für die weiteren Beweisschritte wird die koordinatenfreie Schreibweise gewählt. Dazu benutzen wir ein adaptiertes orthonormales n-Bein $\{\mathbf{e}_i\}$, für welches die kovarianten Ableitungen der Tangentialvektoren $\mathbf{e}_i$ im Punkte $\mathbf{P}$ verschwinden ($\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_j(\mathbf{P}) = 0$). Wir ergänzen dieses mit dem Vektorfeld $\mathbf{X}$ zu einer Basis von $T_{\mathbf{P}}\mathbf{N}^{n+1}$ und beachten, daß wir jede Basis des Tangentialraumes entlang eines

Vektorfeldes $\mathbf{X}$ durch 'Lie-dragging' verschieben können. Dadurch ist dann (für t=0) die jeweilige Lie-Klammer des Ortsvektors $\mathbf{X}$ mit den Basisvektoren von $T_{\mathbf{P}}\mathbf{M}^n$ gleich Null, d.h. $[\mathbf{X}, \mathbf{e}_i] = 0 \; \forall\, i = 1...n$. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} h_{ij} &= \overline{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathrm{h_{ij}} = \overline{\nabla}_{\mathbf{X}}(-\langle \overline{\nabla}_{\mathrm{e_i}} \mathbf{e}_{\mathrm{j}}, \boldsymbol{\nu}\rangle) \\
&= -\langle \overline{\nabla}_{\mathbf{X}} \overline{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_j, \boldsymbol{\nu}\rangle - \langle \overline{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_j, \overline{\nabla}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\nu}\rangle \\
&= -\langle \overline{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \overline{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{e}_j, \boldsymbol{\nu}\rangle - \langle \overline{\mathrm{Riem}}(\mathbf{X}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_j, \boldsymbol{\nu}\rangle - \langle \mathbf{H}, \overline{\nabla}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\nu}\rangle.
\end{aligned}$$

Der Normalenanteil der Ableitung $\overline{\nabla}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\nu}$ entfällt, d.h. der letzte Term in der Gleichung fällt also weg ($\mathbf{H} = H\boldsymbol{\nu}$). Setzen wir nun für $\mathbf{X}$ das Variationsfeld $h\boldsymbol{\nu}$ ein und verwenden $\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\, \mathbf{e}_i - \overline{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{X} \; = [\mathbf{X}, \mathbf{e}_i] \equiv 0$ auf $\mathbf{M}^n$ $(t = 0)$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} h_{ij} &= -\langle \overline{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \overline{\nabla}_{\mathbf{e}_j}(h\boldsymbol{\nu}), \boldsymbol{\nu}\rangle + \langle \overline{\nabla}_{\mathbf{e}_i}[h\boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_j], \boldsymbol{\nu}\rangle - \langle \overline{\mathrm{Riem}}(h\boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_j, \boldsymbol{\nu}\rangle \\
&= -\langle \overline{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \overline{\nabla}_{\mathbf{e}_j}(h)\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}\rangle - \langle \overline{\nabla}_{\mathbf{e}_i}(h\overline{\nabla}_{\mathbf{e}_j}\boldsymbol{\nu}), \boldsymbol{\nu}\rangle - \langle \overline{\mathrm{Riem}}(h\boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_j, \boldsymbol{\nu}\rangle \\
&= -\langle \nabla_{\mathbf{e}_i} \nabla_{\mathbf{e}_j}(h)\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}\rangle - \langle \overline{\nabla}_{\mathbf{e}_i}(h h_{ik}\mathbf{e}_k), \boldsymbol{\nu}\rangle - h\langle \overline{\mathrm{Riem}}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_j, \boldsymbol{\nu}\rangle \\
&= -\nabla_{\mathbf{e}_i} \nabla_{\mathbf{e}_j}(h) - h(h_{ik}\langle \overline{\nabla}_{\mathbf{e}_j}\mathbf{e}_k, \boldsymbol{\nu}\rangle + \langle \overline{\mathrm{Riem}}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_j, \boldsymbol{\nu}\rangle) \\
&= -\nabla_{\mathbf{e}_i} \nabla_{\mathbf{e}_j}(h) - h(h_{ik}h_{kj} + \langle \overline{\mathrm{Riem}}(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_j, \boldsymbol{\nu}\rangle). \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Womit das Lemma bewiesen ist. □

Bemerkung: Durch Kontraktion der letzten Gleichung ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial t} H = -\Delta^{\mathbf{M}^n} h - h\{|A|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu})\}.$$

Ferner erkennt man sofort aus der Gleichung für das Oberflächenmaß die Bedeutung der mittleren Krümmung:

Korollar 2.3 (1.Variationsformel)

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} |\mathbf{M}^n| \;=\; -\int_{\mathbf{M}^n} hH\, d\mu_{\mathbf{M}^n},$$

wobei $|\mathbf{M}^n|$ *den Oberflächeninhalt von* $\mathbf{M}^n$ *bezeichnet, und wir eine Variation der Form* $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F} = -h\,\boldsymbol{\nu}$ *verwendet haben.* h *ist hierbei eine beliebige, glatte Funktion.*

Beweis: Wir berechnen die Ableitung:

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} |\mathbf{M}^n| \;=\; \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \int_{\mathbf{M}^n} d\mu_{\mathbf{M}^n} = \int_{\mathbf{M}^n} \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} (d\mu_{\mathbf{M}^n}).$$

Nun ist, was in Lemma 2.2 bewiesen wurde, $\frac{\partial}{\partial t}\, d\mu_{\mathbf{M}^n} \;=\; -hH\, d\mu_M$, woraus die Behauptung folgt. □

Wir wollen noch zwei weitere Folgerungen aus Lemma 2.2 angeben. Zunächst wollen wir den Term $\nabla_i\nabla_j(h)$ in der Evolutionsgleichung für h_{ij} durch einen Laplace-Term ersetzen. Dadurch kann man die analytische Struktur dieser Gleichung erkennen, und z.B. das Maximumprinzip für Tensoren anwenden:

Lemma 2.4 (Simons Identität) *Es gilt:*

$$\begin{aligned}\Delta h_{ij} &= \nabla_i\nabla_j H + Hh_{il}h^l{}_j - |A|^2 h_{ij} + H\overline{R}_{0i0j} \\ &\quad - h_{ij}\overline{R}_{0l0}{}^l + h_{jl}\overline{R}^l{}_{mi}{}^m - 2h_{lm}\overline{R}^l{}_i{}^m{}_j + \overline{\nabla}_l\overline{R}_{0ij}{}^l.\end{aligned}$$

Satz 2.5 *Für den mittleren Krümmungsfluß in $\mathbf{N}^{n+1}$ gelten die folgenden Evolutionsgleichungen:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}h_{ij} &= \Delta h_{ij} - 2Hh_{il}g^{im}h_{mj} + |A|^2 h_{ij} + h_{ij}\overline{R}_{0l0}{}^l \\ &\quad - h_{jl}\overline{R}^l{}_{mi}{}^m - h_{il}\overline{R}^j{}_{mj}{}^m + 2h_{lm}\overline{R}^l{}_i{}^m{}_j - \overline{\nabla}_i\overline{R}_{0ij}{}^l \quad \textit{und} \\ \frac{\partial}{\partial t}|A|^2 &= \Delta|A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2|A|^2(|A|^2 = \overline{\mathrm{Ric}}(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})) \\ &\quad - 4(h^{ij}h_j{}^m\overline{R}_{mli}{}^l - h^{ij}h^{lm}\overline{R}_{milj}) \\ &\quad - 2h^{ij}(\overline{\nabla}_j\overline{R}_{0li}{}^l + \overline{\nabla}_l\overline{R}_{0ij}{}^l).\end{aligned}$$

Beweis: Einsetzen der Simons Identität in 2.1 (vgl. [Hu4]). □

Bemerkung: Im flachen $\mathbb{R}^{n+1}$ fallen die äußeren Riemannterme weg, und es gilt u.a.

$$\frac{\partial}{\partial t}|A|^2 = \Delta|A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2|A|^4. \tag{2.2}$$

Als nächstes wollen wir uns mit dem Laplace-Operator beschäftigen. Die Umrechnung des Laplace-Operators von einer Mannigfaltigkeit auf eine Untermannigfaltigkeit wird später (Kapitel 3 und 6) noch öfter von Bedeutung sein.

Theorem 2.6 *Sei $\mathbf{N}^{n+k}$ eine (n+k)-dimensionale Mannigfaltigkeit und $\mathbf{M}^n$ eine immersierte n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann gilt (lokal), daß sich der induzierte Laplace-Operator auf $\mathbf{M}^n$ darstellen läßt als*

$$(\Delta^{\mathbf{N}^{n+k}}f)\Big|_{\mathbf{M}^n} = \Delta^{\mathbf{M}^n}(f\Big|_{\mathbf{M}^n}) + (\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}f)\Big|_{\mathbf{M}^n} - \langle\mathbf{H},\overline{\nabla}f\rangle\Big|_{\mathbf{M}^n}.$$

H ist die mittlere Krümmung von $\mathbf{M}^n$ in $\mathbf{N}^{n+k}$ und $\{\boldsymbol{\nu}_\alpha\}$ eine Basis des Orthogonalraumes $N_{\mathbf{P}}\mathbf{M}^n$. Es sei darauf hingewiesen, daß mit $\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}f = \overline{\mathrm{Hess}}(f)(\boldsymbol{\nu}_\alpha,\boldsymbol{\nu}_\alpha)$ gemeint ist, im Unterschied zu $\overline{\nabla}_{\mathbf{Y}}(\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}f) = \mathrm{Hess}(f)(\mathbf{Y},\mathbf{X}) + \overline{\nabla}_{\overline{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}}(f)$.

Beweis: Sei $\{\mathbf{e}_i\}$ bzw. $\{\boldsymbol{\nu}_\alpha\}$ ein orthonormales n-Bein von $T_\mathbf{P}\mathbf{M}^n$ bzw. von $N_\mathbf{P}\mathbf{M}^n$ in $\mathbf{N}^{n+k}$, so daß $\{\mathbf{e}_i, \boldsymbol{\nu}_\alpha\}$ ein orthonormales n-Bein von $T_\mathbf{P}\mathbf{N}^{n+k}$ darstellt ($\mathbf{e}_{n+\alpha} = \boldsymbol{\nu}_\alpha$). Ferner sei diese Basis im Punkte P so gewählt, daß $\nabla_{\boldsymbol{\nu}_\beta}\boldsymbol{\nu}_\alpha(P) = 0$ ist. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
(\Delta^{\mathbf{N}^{n+k}} f)\Big|_{\mathbf{M}^n} &= \operatorname{div}_{\mathbf{N}^{n+k}}(\operatorname{grad}^{\mathbf{N}^{n+k}}(f)) = \sum_{i=1}^{n+k}\langle\, \overline{\nabla}_{\mathbf{e}_i}(\overline{\nabla} f),\ \mathbf{e}_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle\, \overline{\nabla}_{\mathbf{e}_i}\ \{(\overline{\nabla} f)^\top + (\overline{\nabla} f)^\perp\},\ \mathbf{e}_i\rangle + \sum_{\alpha=1}^{k}\langle\, \overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}\overline{\nabla}(f),\ \boldsymbol{\nu}_\alpha\ \rangle \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\langle\, \overline{\nabla}_{\mathbf{e}_i}(\nabla f),\ \mathbf{e}_i\ \rangle}_{=\ \Delta^{\mathbf{M}^n}(f|_{\mathbf{M}^n})} + \sum_{i=1}^{n}\langle\, \overline{\nabla}_{\mathbf{e}_i}(\overline{\nabla} f)^\perp,\ \mathbf{e}_i\rangle + \sum_{\alpha=1}^{k}\langle\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}(\overline{\nabla} f),\ \boldsymbol{\nu}_\alpha\rangle.
\end{aligned}
$$

Hierbei haben wir die Tatsache verwendet, daß die Projektion des Gradienten in $\mathbf{N}^{n+k}$ gleich dem Gradienten auf $\mathbf{M}^n$ ist, d.h. $(\overline{\nabla} f)^\top = \nabla f$ gilt. Wegen $\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\beta}\boldsymbol{\nu}_\alpha(P) = 0$ ist

$$
\langle\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}(\overline{\nabla} f),\ \boldsymbol{\nu}_\alpha\ \rangle = \overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}\langle\,\overline{\nabla} f,\ \boldsymbol{\nu}_\alpha\ \rangle = \overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}(f).
$$

Und aus $\langle(\nabla f)^\perp, \mathbf{e}_i\,\rangle \equiv 0$ zusammen mit $\mathbf{H} \in N_\mathbf{P}\mathbf{M}^n$ folgt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\langle\ \overline{\nabla}_{\mathbf{e}_i}(\nabla f)^\perp, \mathbf{e}_i\rangle &= -\sum_{i=1}^{n}\langle\ (\nabla f)^\perp, \overline{\nabla}_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_i\rangle \\
&= -\ \langle(\nabla f)^\perp, \mathbf{H}\rangle = -\ \langle\nabla f, \mathbf{H}\rangle.
\end{aligned}
$$

Hieraus ergibt sich die behauptete Gleichung, wenn wir beachten, daß P beliebig ist. $\square$

Als Spezialfall ergibt sich für eine Hyperfläche:

Korollar 2.7 *Sei* $\mathbf{N}^{n+1}$ *eine (n+1)- dimensionale Mannigfaltigkeit und* $\mathbf{M}^n$ *eine immersierte n-dimensionale Hyperfläche. Dann gilt (lokal), daß sich der induzierte Laplace-Operator auf* $\mathbf{M}^n$ *darstellen läßt als*

$$
(\Delta^{\mathbf{N}^{n+1}} f)\Big|_{\mathbf{M}^n} = \Delta^{\mathbf{M}^n}(f\Big|_{\mathbf{M}^n}) + (\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{\nu}^2}f)\Big|_{\mathbf{M}^n} + H(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}f)\Big|_{\mathbf{M}^n}.
$$

H bezeichnet wiederum die mittlere Krümmung von $\mathbf{M}^n$ *in* $\mathbf{N}^{n+1}$. $\square$

Ferner erhalten wir für eine Sphäre mit dem Radius R in $\mathbb{R}^{n+1}$:

Korollar 2.8 *Für den Laplace-Operator auf der Sphäre* $\mathbf{S}^{n}{}_{R}$ *gilt*

$$(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} f)\Big|_{\mathbf{S}^{n}{}_{R}} = \Delta^{\mathbf{S}^{n}{}_{R}}(f\Big|_{\mathbf{S}^{n}{}_{R}}) + (\frac{\partial^2}{\partial r^2} f)\Big|_{\mathbf{S}^{n}{}_{R}} + \frac{n}{R}(\frac{\partial}{\partial r} f)\Big|_{\mathbf{S}^{n}{}_{R}},$$

wobei r *die Radialkoordinate in* $\mathbb{R}^{n+1}$ *ist.*

Beweis: Der einzige Term, welcher nicht sofort aus der Gleichung in obigem Theorem ersichtlich ist, ist $-\frac{n}{R}(\frac{\partial}{\partial r} f)|_{\mathbf{S}^{n}{}_{R}}$. Dies ergibt sich aber gerade aus $H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n\frac{1}{R}$. $\square$

Bemerkung: In der Literatur wird der Laplace-Operator oft auch als '$-\Delta$' definiert, so daß dort die Zusatzterme ein anderes Vorzeichen haben.

Kapitel 3

Singularitäten

In den Arbeiten von [EH] und [Ha5] werden die Kurz - und Langzeitexistenz der Lösung des MKF bewiesen. Danach existiert die Lösung genau bis zu dem Zeitpunkt, an welchem die zweite Fundamentalform divergiert ($|A|^2 \to \infty$). **Dieser Zeitpunkt, der das maximale Existenxintervall kennzeichnet, wird mit** T **bezeichnet.** Als einführendes Beispiel betrachten wir zunächst das Verhalten der Sphäre unter dem mittleren Krümmungsfluß. Da die mittlere Krümmung der Sphäre nur von deren Radius r abhängt, also auf ganz $\mathbf{S}^n$ konstant ist, bleibt die geometrische Form erhalten. Für die Sphäre gilt ferner, daß $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{P}) \parallel \mathbf{F}(\mathbf{P})\ \forall \mathbf{P} \in \mathbf{S}^n$ ist. D.h. die Evolutionsgleichung $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F} = \mathbf{H}$ vereinfacht sich mit $\mathbf{F} = r(t, \mathbf{P})\boldsymbol{\nu}$ zu

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} r(t, \mathbf{P})\boldsymbol{\nu} = -H(t, \mathbf{P})\boldsymbol{\nu}$$

$$\text{bzw.} \qquad \frac{\partial}{\partial t} r(t, \mathbf{P}) = -H(t, \mathbf{P}) \quad d.h. \quad \frac{\partial}{\partial t} r(t) = -H(t) = -\frac{n}{r(t)}.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist $r(t) = \sqrt{n}\sqrt{2(T-t)}$. Wir wählen $T = \frac{1}{2}$, und erhalten dann für den Radius der 'Startsphäre' $\sqrt{n}$. Hier ist T auch der Zeitpunkt, an welchem $r(T) = 0$ gilt, an welchem also die Sphäre zu einem Raumpunkt kollabiert. Für die Gesamtkrümmung $|A|^2$ errechnen wir:

$$|A|^2 = \frac{n}{r(t)^2} = \frac{1}{2(T-t)} \to \infty \text{ für } t \to T.$$

Diese drei Charakteristika, das Entwickeln einer Singularität, das Explodieren der Krümmung und die selbstähnliche Evolution, sind entscheidende Merkmale des MKF. Um dies zu verdeutlichen, geben wir einige Ergebnisse zu den ersten beiden Eigenschaften an. In den folgenden Abschnitten widmen wir uns dann dem Begriff der 'selbstähnlichen Lösung' des MKF.

Theorem 3.1 (Disjointness Theorem) *Seien* $\mathbf{M}_t^1$ *und* $\mathbf{M}_t^2$ *zwei klassische Lösungen des MKF, von denen mindestens eine eine kompakte Mannigfaltigkeit beschreibt. Ist dann* $\mathbf{M}_0^1 \cap \mathbf{M}_0^2 = \emptyset$, *so folgt* $\mathbf{M}_t^1 \cap \mathbf{M}_t^2 = \emptyset$ *für alle Zeiten* $t < T :=$

$\min(\mathrm{T}_{\mathbf{M}^1}, \mathrm{T}_{\mathbf{M}^2})$. *D.h. sind die Hyperflächen zu Beginn der Evolution disjunkt, dann bleibt dies für die Zeit bis zu einer Singularität so (vgl. z.B. [Hu1]).*

Folgerung: Wenn wir eine kompakte klassische Lösung $\mathbf{M}_t$ betrachten, so läßt sich immer eine Kugel mit genügend großem Radius $\overline{R}$ finden, in welcher diese Lösung liegt. Da diese Kugel in endlicher Zeit 'verschwindet', folgt aus dem Theorem, daß jede kompakte Mannigfaltigkeit in endlicher Zeit 'verschwindet'. Genauer ist mit $R(t)^2 = 2n(T-t) = 2nT(\overline{R}) - 2nt = \overline{R} - 2nt$ die Zeit $T_{\mathbf{M}^n}$ bis zu dieser Singularität von $\mathbf{M}^n$ kleiner als $\overline{R}/2n$.
Für die Krümmung gilt, daß diese auch im allgemeinen Fall unbeschränkt ist. Aus Abschnitt 2.2 ist die Gleichung für die Evolution der Krümmung bekannt:

$$\frac{\partial}{\partial t}|A|^2 \;=\; \Delta|A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2|A|^4.$$

Lemma 3.2 (Maximumslemma) *Sei* $g : (0,T)\times\mathbf{M}_t \to \mathbb{R}$ *eine glatte Funktion und* $\mathbf{M}^n$ *kompakt, dann ist* $\max\limits_{M_t}\, g(t,\mathbf{P})$ *Lipschitz-stetig, und es gilt:*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\max_{\mathbf{P}\in M_t}\, g(t,\mathbf{P})) \;\leq\; \sup\{\, g(t,\mathbf{P})|\mathbf{P} \textit{ mit } g(t,\mathbf{P}) = \max_{M_t}\, g(t,\mathbf{P})\}\ ,$$

wobei $\frac{\partial}{\partial t}f \leq C$ *für eine Lipschitz-stetige Funktion definiert ist durch:*

$$\limsup_{h\searrow 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \leq C \qquad\qquad \textit{(vgl. z.B. [Ha2]).}$$

Sei $B := \max_{M_t}|A|^2$ und $\mathbf{P}_t$ ein Punkt, in dem $|A|^2$ sein Maximum zum Zeitpunkt t annimmt, dann gilt in diesem Punkt $\nabla|A|^2 = 0$ und $\Delta|A|^2 \leq 0$, woraus sich $\frac{\partial}{\partial t}|A(\mathbf{P}_t)|^2 \leq 2|A(\mathbf{P}_t)|^4$ ergibt. Und zusammen mit dem Maximumslemma erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}B \;&\leq\; \sup\{\frac{\partial}{\partial t}|A|^2(\mathbf{P}_t) \;|\;\; |A|^2(\mathbf{P}_t) = \max|A|^2\}\\ &\leq\; \sup\{2|A|^4(\mathbf{P}_t) \;|\;\; |A|^2(\mathbf{P}) = \max|A|^2\} = B^2.\end{aligned}$$

'Trennung der Variablen' liefert schließlich:

$$2\int_t^T \geq \int_{B(t)}^{B(T)} \frac{dB}{B^2} \quad \text{und daraus} \quad 2(T-t) \leq \frac{1}{B(T)} - \frac{1}{B(t)}.$$

Da $A(T) = \infty$ gilt [Hu1], folgt:

Lemma 3.3 $\max_{M_t}|A|^2 \geq \frac{1}{2(T-t)}$.

Diese untere Schranke motiviert die folgende Definition.

Definition 3.4 *Eine Lösung des MKF hat in T eine* **Typ1-Singularität**, *falls*

$$\max_{M_t^n} |A|\sqrt{2(T-t)} \leq C \quad \forall\, t \leq T.$$

Eine Lösung des MKF hat in T eine **Typ2-Singularität**, *falls*

$$\lim_{t \to T} \max_{M_t} |A|\sqrt{2(T-t)} = \infty.$$

Die Eigenschaft, daß die Sphäre sich selbstähnlich unter dem MKF bewegt, gilt sicherlich nicht für alle Lösungen, da z.B. konvexe Lösungen in einem 'runden' Punkt verschwinden (vgl. [Hu1]). Im Fall einer Typ1-Singularität stellt sich jedoch heraus, daß sich der Fluß asymptotisch einer selbstähnlichen Lösung des MKF nähert. Dies ist der Inhalt des restlichen Kapitels. Als entscheidendes Hilfsmittel benötigen wir dazu eine Monotonieformel, welche wir im nächsten Abschnitt herleiten. Ferner sind für die Konvergenz zu einer Grenzfläche Krümmungsschranken nötig. Da sich der betrachtete Fluß auf eine Singularität zubewegt, führen wir zusätzlich eine Reskalierung durch. Dies behandeln wir in den Abschnitten 3.2, 3.3 und 3.4. Schließlich konstruieren wir in Abschnitt 3.5 die Grenzflächen, und werden in den letzten Paragraphen 3.6 und 3.7 zur Geometrie zurückkehren, und die Ergebnisse so formulieren, wie wir sie im weiteren verwenden.

3.1 Monotonieformel

Anhand der ersten Variationsformel erkennt man, daß die Oberfläche unter dem MKF immer abnimmt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\det g} \;=\; \frac{1}{2\sqrt{\det g}} \det g \;\mathrm{tr}\,(g^{ij}(-2Hh_{ij})) = -H^2\sqrt{\det g}.$$

Die folgenden Monotonieformeln besagen - grob gesprochen -, daß darüber hinaus auch der mit einem Wärmeleitungskern gewichtete Oberflächeninhalt monoton fällt. Wir betrachten hierzu Immersionen $\mathbf{F}_t : \mathbf{M}^n \to \mathbf{N}^{n+l}$ einer Lösung des MKF:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}(t, \mathbf{P}) = \mathbf{H}. \tag{3.1}$$

Man beachte, daß wir hier sogar allgemeine Untermannigfaltigkeiten, und nicht nur den Spezialfall einer Hyperfläche betrachten. Weiter sei $k = k(t, \mathbf{P})$ eine glatte Lösung der rückwärtigen Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{d}{dt}k = -\Delta^{\mathbf{N}^{n+l}} k. \tag{3.2}$$

Theorem 3.5 (Monotonie-Formel (vgl. [Hu3])) *Sei* $\mathbf{M}_t$ *eine Lösung von 3.1 in* $\mathbf{N}^{n+l}$*, und* $k(t,\mathbf{P})$ *eine Lösung von 3.2. Dann gilt:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{(2(T-t))^{l/2}\int_{\mathbf{M}_t} k\,d\mu_t\right\} = -(2(T-t))^{l/2}\Big\{\int_{\mathbf{M}_t} k|\mathbf{H}+\frac{\overline{\nabla}^{\perp}k}{k}|^2 d\mu_t$$
$$+\int_{\mathbf{M}_t}(\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}k-\frac{\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}k}{k}+\frac{lk}{2(T-t)})\,d\mu_t\Big\},$$

wobei $\perp$ *die Normalkomponente eines Vektors bezüglich* $\mathbf{M}^n$ *ist und* $\{\boldsymbol{\nu}_\alpha\}$ *eine Basis von* $N_{\mathbf{P}}\mathbf{M}^n$ *in* $\mathbf{N}^{n+l}$.

Beweis: Mit der Kettenregel und den Evolutionsgleichungen folgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}k(t,\mathbf{P}) &= \frac{\partial}{\partial t}k(t,\mathbf{P})+\langle\overline{\nabla}k,\,\frac{d}{dt}\mathbf{X}_t\rangle\\ &= -\Delta^{\mathbf{N}^{n+l}}k(t,\mathbf{P})+\langle\overline{\nabla}k,\,\mathbf{H}\,\rangle.\end{aligned}$$

Ferner ist aus Lemma 2.2 bekannt, daß $\frac{d}{dt}d\mu=-H^2d\mu$ gilt. Damit ist:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big\{(2(T-t))^{l/2}\int_{\mathbf{M}_t}k\,d\mu_t\Big\}\\ &= -(2(T-t))^{l/2}\frac{l}{2(T-t)}\int_{\mathbf{M}_t}k\,d\mu_t\\ &\quad+(2(T-t))^{l/2}\int_{\mathbf{M}_t}(-\Delta^{\mathbf{N}^{n+l}}k(t,\mathbf{P})+\langle\overline{\nabla}k,\,\mathbf{H}\,\rangle)d\mu_t\\ &\quad-(2(T-t))^{l/2}\int_{\mathbf{M}_t}kH^2d\mu.\end{aligned}$$

Wir wählen ein orthonormales n-Bein, so daß wir mit Theorem 2.6 für den Laplace-Term

$$\Delta^{\mathbf{N}^{n+l}}k=\Delta^{\mathbf{M}^n}k\ +\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}\ -\langle\mathbf{H},\overline{\nabla}k\rangle$$

erhalten. Also insgesamt:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big\{(2(T-t))^{l/2}\int_{\mathbf{M}_t}k\,d\mu_t\Big\}\\ &=(2(T-t))^{l/2}\Big\{\int_{\mathbf{M}_t}\frac{lk}{2(T-t)}d\mu_t-\int_{\mathbf{M}_t}kH^2d\mu_t\\ &\quad+\int_{\mathbf{M}_t}(\Delta^{\mathbf{M}^n}k-\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}k+\langle\mathbf{H},\overline{\nabla}k\rangle+\langle\overline{\nabla}k,\mathbf{H}\rangle)d\mu_t\Big\}.\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Stokes löst sich das Integral über den Laplace-Term auf.

Zusammengefaßt ergibt sich, wenn wir noch einen Term einschieben:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big\{ & (2(T-t))^{l/2}\int_{\mathbf{M}_t} k\, d\mu_t\Big\} \\
=&-(2(T-t))^{l/2}\Big\{\int_{\mathbf{M}_t}\Big(\frac{lk}{2(T-t)}+\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}k-\langle\frac{(\overline{\nabla}k)^\perp}{k},\frac{(\overline{\nabla}k)^\perp}{k}\rangle k\Big)\, d\mu_t \\
&\qquad -\int_{\mathbf{M}_t}\Big(k\langle\mathbf{H},\mathbf{H}\rangle+2\langle\mathbf{H},(\overline{\nabla}^k)^\perp\rangle+\langle\frac{(\overline{\nabla}k)^\perp}{k},\frac{(\overline{\nabla}k)^\perp}{k}\rangle k\Big)\, d\mu_t\Big\} \\
=&-(2(T-t))^{l/2}\int_{\mathbf{M}_t}\Big(\frac{lk}{2(T-t)}+\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}k \\
&\qquad\qquad -\frac{\overline{\nabla}^{\mathbf{N}^{n+l}}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}\overline{\nabla}^{\mathbf{N}^{n+1}}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}k}{k}+k\,|\mathbf{H}+\frac{(\overline{\nabla}k)^\perp}{k}|^2\Big)d\mu_t.
\end{aligned}
$$

Womit das Theorem bewiesen ist. $\square$

Auf $\mathbb{R}^{n+1}$ wählen wir für k nun die spezielle Lösung

$$k=\{4\pi(T-t)\}^{-(n+1/2)}\exp\Big(\frac{-|\mathbf{F}|^2}{4(T-t)}\Big).$$

Dies ist die einzige rotationssymmetrische Lösung von $\frac{\partial}{\partial t}f=-\Delta f$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$. In Analogie zum MKF ($\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}=\Delta\mathbf{F}$) erscheint es als eine gute Idee, das Oberflächenfunktional mit dieser Lösung zu gewichten.
Ferner sei

$$\rho:=\{4\pi(T-t)\}^{-n/2}\exp\Big(\frac{-|\mathbf{F}|^2}{4(T-t)}\Big).$$

Dann ergibt sich:

Korollar 3.6 (Monotonie-Formel für den MKF in $\mathbb{R}^{n+1}$) *Sei $\mathbf{M}_t$ eine homothetische Lösung des MKF. Dann gilt:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbf{M}_t}\rho\, d\mu_t \;=\; -\int_{\mathbf{M}_t}\rho|\mathbf{H}-\frac{1}{2\tau}\mathbf{F}^\perp|^2 d\mu_t,$$

wobei $\mathbf{F}^\perp$ die Normalkomponente von $\mathbf{F}$, und $\tau=2(T-t)$ ist.

Beweis: Ziehen wir das obige Theorem in Betracht, so haben wir lediglich zu zeigen, daß der zweite Term auf der rechten Seite wegfällt. Dies läßt sich leicht nachrechnen:

$$\nabla_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}\rho(\mathbf{x},t) \;=\; -\rho\langle\mathbf{X},\boldsymbol{\nu}_\alpha\rangle,$$

daraus folgt

$$\begin{aligned}
\nabla_{\nu_\alpha}\nabla_{\nu_\alpha}\rho(\mathbf{x},t) &= \nabla_{\nu_\alpha}(-\rho\langle\mathbf{X},\boldsymbol{\nu}_\alpha\rangle) \\
&= \langle\mathbf{X},\boldsymbol{\nu}_\alpha\rangle^2\rho(\mathbf{x},t) + \langle\partial_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}\mathbf{X},\boldsymbol{\nu}_\alpha\rangle\rho(\mathbf{x},t) + \langle-\mathbf{X},\underbrace{\nabla_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}\boldsymbol{\nu}_\alpha}_{=0}\rangle \\
&= (\langle\mathbf{X},\boldsymbol{\nu}_\alpha\rangle^2 + \langle\boldsymbol{\nu}_\alpha,\boldsymbol{\nu}_\alpha\rangle)\rho(\mathbf{x},t) \\
&= (\langle\mathbf{X},\boldsymbol{\nu}_\alpha\rangle^2 + l)\rho(\mathbf{x},t).
\end{aligned}$$

Dies eingesetzt ergibt die Behauptung. □

Die nächste Frage, mit der wir uns beschäftigen wollen, ist nun, wie das genaue Verhalten in einem singulären Punkt aussieht. Um dies zu untersuchen, wird der Maßstab derart 'vergrößert', daß die Krümmung gerade noch beschränkt bleibt. Steht, wie im Falle der Typ1-Singularitäten, die Abschätzung $\max|A|^2 \leq \frac{C}{2(T-t)}$ zur Verfügung, dann ist der benötigte Reskalierungsfaktor bekannt:

$$f(t)^2 = \frac{L}{2(T-t)} \qquad \text{mit} \quad L \in [1, C].$$

Dabei bietet es sich an, $L = 1$ zu setzen. Dann hat die Sphäre den Radius $\sqrt{n}$, und der Zylinder den Radius $\sqrt{n-1}$. Wir werden alle reskalierten Größen mit einer Tilde bezeichnen. Sei also:

$$\tilde{\mathbf{F}}(t,\mathbf{P}) := f(t)\mathbf{F}(t,\mathbf{P})$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{F}}(t,\mathbf{P}) &= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2(T-t)}^3}2\mathbf{F}(t,\mathbf{P}) + f(t)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}(t,\mathbf{P}) \\
&= f(t)\mathbf{H}(t,\mathbf{P}) - f(t)^3\mathbf{F}(t,\mathbf{P}). \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Wir führen einen neuen Zeitparameter $s(t) = \frac{1}{2}\log(T-t)$ ein. Dieser hat die Eigenschaft, daß $\frac{\partial}{\partial t}s = \frac{1}{2(T-t)} = f(t)^2$ ist, woraus wir

$$\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\mathbf{F}}(s,\mathbf{P}) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{F}}(t,\mathbf{P})\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{1}{f(t)}\mathbf{H}(t,\mathbf{P}) - f(t)\mathbf{F}(t,\mathbf{P}) = \tilde{\mathbf{H}}(s,\mathbf{P}) + \tilde{\mathbf{F}}(s,\mathbf{P})$$

($\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{g}^{ij}\tilde{h}_{ij} = \frac{1}{f^2}g^{ij}fh_{ij}$) erhalten. Dies bedeutet insbesondere, daß der reskalierte Fluß **kein** MKF mehr ist. Die Monotonieformel nimmt dann folgende Gestalt an:

Korollar 3.7 (Reskalierte Monotonie-Formel) *Sei $\tilde{\mathbf{M}}_s$ eine Hyperfläche des reskalierten Flußes, und*

$$\tilde{k}(\mathbf{X},s) = (2(t-t))^{(n+l)/2}k((2(t-t)^{1/2}\mathbf{X},t) \quad \textit{mit} \quad s = -\frac{1}{2}\log(T-t).$$

Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_{\tilde{\mathbf{M}}_s}\tilde{k}\,d\tilde{\mu}_s = -\int_{\tilde{\mathbf{M}}_s}\tilde{k}|\mathbf{H} - \frac{\overline{\nabla}^\perp\tilde{k}}{\tilde{k}}|^2 d\tilde{\mu}_s - \int_{\tilde{\mathbf{M}}_s}(\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}\tilde{k} - \frac{\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}\tilde{k}\,\overline{\nabla}_{\boldsymbol{\nu}_\alpha}\tilde{k}}{\tilde{k}} + l\tilde{k})\,d\tilde{\mu}_s.$$

Beweis: Analog zu Theorem 3.5. $\square$

Die ρ entsprechende Lösung der 'reskalierten' Wärmeleitungsgleichung ist $\tilde{\rho}(\mathbf{x}) := e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2}$. In $\mathbb{R}^{n+1}$ erhalten wir damit:

Korollar 3.8 *Sei $\tilde{\rho}(\mathbf{x}) = e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2}$. Falls $\tilde{\mathbf{M}}_s$ die Evolutionsgleichung 3.3 in $\mathbb{R}^{n+1}$ erfüllt, so gilt:*

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_{\tilde{\mathbf{M}}_s}\tilde{\rho}\,d\tilde{\mu}_s = -\int_{\tilde{\mathbf{M}}_s}\tilde{\rho}|\tilde{\mathbf{H}}+\tilde{\mathbf{F}}^\perp|^2 d\tilde{\mu}_s.$$

Beweis: Wir rechnen dies nach (analog zum unskalierten Fall):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\int_{\tilde{\mathbf{M}}_s}\tilde{\rho}\,d\tilde{\mu}_s &= \int_{\tilde{\mathbf{M}}_s}\tilde{\rho}\frac{\partial}{\partial s}d\tilde{\mu}_s + \int_{\tilde{\mathbf{M}}_s}(\underbrace{\frac{\partial}{\partial s}(\tilde{\rho})}_{=0}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{\rho})\frac{\partial x^i}{\partial s})d\tilde{\mu}_s \\ &= \int_{\tilde{\mathbf{M}}_s}\tilde{\rho}\,(n-\tilde{\mathbf{H}}^2)d\tilde{\mu}_s + \int_{\tilde{\mathbf{M}}_s}\tilde{\rho}\,(-\langle\tilde{\mathbf{F}},\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\mathbf{F}}\rangle)d\tilde{\mu}_s \\ &= -\int_{\tilde{\mathbf{M}}_s}\tilde{\rho}(\tilde{\mathbf{H}}^2-n+|\tilde{\mathbf{F}}|^2+\langle\tilde{\mathbf{F}},\tilde{\mathbf{H}}\rangle)d\tilde{\mu}_s.\end{aligned}$$

Mit $\langle\tilde{\mathbf{F}},\tilde{\mathbf{H}}\rangle = \langle\mathbf{F},\mathbf{H}\rangle$ und der ersten Variationsformel folgt:

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{\mathbf{M}}_s}\langle\tilde{\mathbf{F}},\tilde{\mathbf{H}}\rangle\tilde{\rho}d\tilde{\mu}_s &= -\int_{\tilde{\mathbf{M}}_s}(\langle\operatorname{grad}\tilde{\rho},\tilde{\mathbf{F}}\rangle + \operatorname{div}\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\rho})\,d\tilde{\mu}_s \\ &= -\int_{\tilde{\mathbf{M}}_s}-|\tilde{\mathbf{F}}^\top|^2 + n\,\tilde{\rho}\,d\tilde{\mu}_s.\end{aligned}$$

Somit:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\int_{\tilde{\mathbf{M}}_s}\tilde{\rho}\,d\tilde{\mu}_s &= -\int_{\tilde{\mathbf{M}}_s}\tilde{\rho}\,(\tilde{\mathbf{H}}^2+|\tilde{\mathbf{F}}|^2-|\tilde{\mathbf{F}}^\top|^2+2\langle\tilde{\mathbf{F}},\tilde{\mathbf{H}}\rangle)\,d\tilde{\mu}_s \\ &= -\int_{\tilde{\mathbf{M}}_s}\tilde{\rho}|\tilde{\mathbf{H}}+\tilde{\mathbf{F}}^\perp|^2\,d\tilde{\mu}_s.\end{aligned}$$

$\square$

Da $\tilde{\rho}$ stets positiv ist, nimmt $\int\tilde{\rho}$ so lange ab, bis $\mathbf{F}^\perp = \mathbf{H}$ ist. In 3.6 werden wir dies genauer beschreiben. In [Ha3] und [Ha4] zeigt Hamilton nun, daß man auch unter verhältnismäßig schwachen Voraussetzungen an die umgebende Mannigfaltigkeit eine Monotonie oder zumindest eine gleichmäßige Beschränktheit erhält:

Theorem 3.9 *Sei $\mathbf{M}_t^n$ eine Lösung des MKF auf $[0,T)$, und sei k eine positive Lösung der rückwärtigen Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbf{N}^{n+l}$, so daß $\int_{\mathbf{N}^{n+l}} k = 1$ ist. Dann gilt, daß*

$$Z(t) = (T-t)^{l/2}\int_{\mathbf{M}^n} k$$

monoton fällt, wenn $\mathbf{N}^{n+l}$ *Ricci-parallel ist, d.h.* $\nabla \mathrm{Ric} \equiv 0$ *erfüllt, und nur nicht negative Schnittkrümmung besitzt. Während im allgemeinen Fall gilt, daß*

$$Z(t) \leq CZ(\tau) + C(t-\tau)A_0 \qquad \textit{für} \quad T-1 \leq \tau \leq t \leq T,$$

wobei A_0 *die Oberfläche von* $\mathbf{M}^n$ *zum Zeitpunkt* $t=0$ *und* C *eine Konstante ist, welche nur von der Geomertie von* $\mathbf{M}^n$ *abhängt. Ferner gilt für*

$$W(t) = (T-t)^{l/2} \int_{\mathbf{M}^n} |H - (\frac{Dk}{k})^{\perp}|^2 k \, d\mu,$$

daß

$$\int_t^T W(t)dt \leq C(Z(\tau) + A_0). \qquad \square$$

Bemerkung: Im Beweis dieses Theorems geht entscheidend die von Hamilton in [Ha3] gefundene Harnackungleichung für die Hessematrix der Funktion k ein. Wie die Arbeit von P. Li und S.T. Yau [LJ] zeigt, ist dieses Ergebnis von Hamilton sehr entscheidend (sein Beweis dabei verblüffend einfach).
Wir interessieren uns für das Verhalten des MKF in der Nähe von Singularitäten. Dies bedeutet insbesondere, daß wir oBdA $T-1=0$ wählen können, daß also die Größe Z(t) auch in allgemeinen Mannigfaltigkeiten (für uns oBdA durch ihren 'Startwert' auf $\mathbf{M}_0^n$) beschränkt ist. Wir werden diese Tatsache in Abschnitt 3.6 benötigen.

3.2 Die Ableitungen der Krümmung

Wir berechnen in diesem Paragraphen zunächst Evolutionsgleichungen für die höheren Ableitungen der zweiten Fundamentalform, welche wir später in reskalierter Form verwenden werden, um die gleichmäßige Beschränktheit dieser Ableitungen zu zeigen. Für die höheren Ableitungen der Krümmung verwenden wir eine Interationsmethode (vgl. [Hu3]). Wir teilen dies in mehrere Lemmata auf. Dabei müssen wir lediglich auf die Größenordnung der Ableitungen achten. Wir verwenden daher die Bezeichnung $A * B$, um eine Linearkombination von A und B (welche mit Hilfe der Metrik kontrahiert werden) zu beschreiben.

Lemma 3.10 *Für einen Tensor auf einer Hyperfläche, welche sich unter dem mittleren Krümmungsfluß bewegt, gilt die Evolutionsgleichung:*

$$\begin{aligned}(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)(\nabla T) &= \nabla((\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)T) + (\overline{\mathrm{Riem}} + A * A) * \nabla T \\ &\quad + (\overline{\mathrm{Riem}} * A + \overline{\nabla \mathrm{Riem}} + \nabla A * A) * T.\end{aligned}$$

Beweis:
Zunächst ist $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla T) = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial}{\partial x_i}T + \Gamma T) = \nabla(\frac{\partial}{\partial t}T) + (\frac{\partial}{\partial t}\Gamma)T$. Wählt man die Koordinaten so, daß $\Gamma = 0$ in einem Punkt gilt, dann folgt aus

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}g^{km}\{\nabla_j g'_{mi} + \nabla_i g'_{mj} + \nabla_m g'_{ij}\} \\ &= \frac{1}{2}g^{km}\{\nabla_j(-2Hh_{mi}) + \nabla_i(-2Hh_{mj}) + \nabla_m(-2Hh_{ij})\} \\ &= \sum \nabla A * A\end{aligned}$$

die Gleichung $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla T) = \nabla(\frac{\partial}{\partial t}T) + \sum \nabla A * A * T$. Man beachte, daß hier die Art der Evolution der Hyperfläche eingeht. Für die Vertauschung der kovarianten Ableitung mit den Laplace-Operator gilt:

$$\begin{aligned}\Delta\{\nabla_i T\} &= g^{pq}\nabla_p\nabla_q\{\nabla_i T_{j_1..j_m}^{i_1..i_n}\} = g^{pq}\nabla_p\nabla_i\nabla_q T_{j_1..j_m}^{i_1..i_n} \\ &\quad + g^{pq}\nabla_p\{\sum_{a=1}^m R_{qi}{}^{i_a}{}_l T_{j_1..j_m}^{i_1..l..i_n} - \sum_{a=1}^m R_{qi}{}^l{}_{j_a} T_{j_1..l..j_m}^{i_1..i_n}\} \\ &= g^{pq}\nabla_i\nabla_p\nabla_q T_{j_1..j_m}^{i_1..i_n} \\ &\quad + g^{pq}\nabla_p\{\sum_{a=1}^m R_{qi}{}^{i_a}{}_l T_{j_1..j_m}^{i_1..l..i_n} - \sum_{a=1}^m R_{qi}{}^l{}_{j_a} T_{j_1..l..j_m}^{i_1..i_n} \\ &\quad + R_{pi}{}^l{}_q \nabla_l T_{j_1..j_m}^{i_1..i_n}\} \\ &\quad + g^{pq}\{\sum_{a=1}^m R_{pi}{}^{i_a}{}_l \nabla_q T_{j_1..j_m}^{i_1..l..i_n} - \sum_{a=1}^m R_{pi}{}^l{}_{j_a}\nabla_q T_{j_1..l..j_m}^{i_1..i_n}\} \\ &= \nabla_i\Delta T + \nabla\mathrm{Riem} * T + \mathrm{Riem} * \nabla T.\end{aligned}$$

Die Gaußgleichungen stellen nun einen Zusammenhang zwischen der zweiten Fundamentalform und dem Riemannschen Krümmungstensor her:

$$\mathrm{Riem}_{ijkl} = \overline{\mathrm{Riem}}_{ijkl} + h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Riem} = \overline{\mathrm{Riem}} + A * A.$$

Für die Ableitungen ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned}\nabla\mathrm{Riem} &= \nabla\overline{\mathrm{Riem}} + \nabla A * A \quad \text{bzw.} \\ \nabla\overline{\mathrm{Riem}} &= \overline{\nabla\mathrm{Riem}} + \overline{\mathrm{Riem}} * A.\end{aligned}$$

Also $\nabla\mathrm{Riem} = \overline{\nabla\mathrm{Riem}} + \overline{\mathrm{Riem}} * A + \nabla A * A$. Und somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\Delta\nabla_i T &= \nabla_i\Delta T + \nabla A * A * T + A * A * \nabla T \\ &\quad + \overline{\mathrm{Riem}} * \nabla T + \overline{\nabla\mathrm{Riem}} * T \\ &\quad + \overline{\mathrm{Riem}} * A * T.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich nun die behauptete Gleichung. □

Ziel ist es, die Evolution der Ableitungen der zweiten Fundamentalform so darzustellen, daß nur die zweite Fundamentalform selbst und äußere Größen, welche abgeschätzt werden können, auftreten. Wir wollen dazu die Ableitungen des Riemanntensors bezüglich des Zusammenhangs auf $\mathbf{M}^n$ als Ableitungen bezüglich des Zusammenhangs auf $\mathbf{N}^{n+1}$ darstellen:

Lemma 3.11

$$\nabla\overline{\nabla}^m\overline{\mathrm{Riem}} \;=\; \overline{\nabla}\overline{\nabla}^m\overline{\mathrm{Riem}} + \overline{\nabla}^m\overline{\mathrm{Riem}} * A.$$

Beweis:
Sei $\{\mathbf{e}_i\}$ ein orthonormales n-Bein des Tangentialraumes mit $\mathbf{e}_{n+1} = \boldsymbol{\nu}$.
Da $\overline{\nabla}^m\overline{\mathrm{Riem}}(\mathbf{e}_{i_p}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)$ eine Funktion auf $\mathbf{M}^n$ ist, gilt

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla - \overline{\nabla})(\overline{\nabla}^m\overline{\mathrm{Riem}}(\mathbf{e}_{i_p}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)) \\
&= ((\nabla - \overline{\nabla})\overline{\nabla}^m\overline{\mathrm{Riem}})(\mathbf{e}_{i_p}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) \\
&\qquad + \overline{\nabla}^m\overline{\mathrm{Riem}}((\nabla - \overline{\nabla})\mathbf{e}_{i_p}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)... \\
&= ((\nabla - \overline{\nabla})\overline{\nabla}^m\overline{\mathrm{Riem}})(\mathbf{e}_{i_p}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) \\
&\qquad + \overline{\nabla}^m\overline{\mathrm{Riem}}(A * \mathbf{e}_{i_p}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)... \\
&= ((\nabla - \overline{\nabla})\overline{\nabla}^m\overline{\mathrm{Riem}})(\mathbf{e}_{i_p}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) \\
&\qquad + \sum \overline{\nabla}^m\overline{\mathrm{Riem}} * A.
\end{aligned}$$

Wobei zu beachten ist, daß für alle $i = 1...n+1$ gilt $(\nabla - \overline{\nabla})\mathbf{e}_i = A * \mathbf{e}_i$. □

Korollar 3.12 *Für die zweite Fundamentalform gilt*

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)\nabla^m A &= \sum_{i+j+k=m} \nabla^i A * \nabla^j A * \nabla^k A + \sum_{i+j=m} \overline{\nabla}^i\overline{\mathrm{Riem}} * \nabla^j A \\
&\qquad + \overline{\nabla}^{m+1}\overline{\mathrm{Riem}},
\end{aligned}$$

wobei wir $A^0 := 1$ gesetzt haben.

Beweis: Induktion.
(IA) m = 0: Nach Satz 2.5 gilt für die zweite Fundamentalform die Evolutionsgleichung

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)A = A * A * A + \overline{\mathrm{Riem}} * A + \overline{\nabla\mathrm{Riem}}.$$

Dabei geht nun die Evolutionsgleichung von A (vgl. Lemma 2.2), und die Simons Identität ein.

(IS) m $\to$ m+1 : mit Lemma 3.10 folgt

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta)\nabla^{m+1}A \;=\; & \nabla(\overbrace{\sum_{i+j+k=m}\nabla^i A*\nabla^j A*\nabla^k A+\sum_{i+j=m}\overline{\nabla}^i\overline{\mathrm{Riem}}*\nabla^j A+\overline{\nabla}^m\overline{\mathrm{Riem}}}^{(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta)\nabla^m A}) \\
& +\sum(\overline{\mathrm{Riem}}+A*\nabla A)*\nabla^m A \\
& +\sum(\overline{\mathrm{Riem}}*A+\overline{\nabla\mathrm{Riem}}+\nabla A*A)\nabla^m A \\
= & \sum_{i+j+k=m+1}\nabla^i A*\nabla^j A*\nabla^k A+\sum_{i+j=m+1}\overline{\nabla}^i\overline{\mathrm{Riem}}*\nabla^j A \\
& +\nabla\overline{\nabla}^{m+1}\overline{\mathrm{Riem}}.
\end{aligned}
$$

Mit Lemma 3.11 folgt nun die Behauptung. □

Wir können hieraus die Evolution von $|\nabla^m A|^2$ berechnen:

$$
\frac{\partial}{\partial t}|\nabla^m A|^2 \;=\; 2\langle\frac{\partial}{\partial t}\nabla^m A,\nabla^m A\rangle+A*A*\nabla^m A*\nabla^m A,
$$

wobei $\frac{\partial}{\partial t}g_{ij}=-2Hh_{ij}=A*A$ verwendet wurde. Ferner ist

$$
\Delta|\nabla^m A|^2 \;=\; 2\Delta(\nabla^m A)*A+2|\nabla^{m+1}A|^2.
$$

und somit

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta)|\nabla^m A|^2 &= 2\langle(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta)\nabla^m A,\nabla^m A\rangle-2|\nabla^{m+1}A|^2+A*A*\nabla^m A*\nabla^m A \\
&= \sum_{i+j+k=m}\nabla^i A*\nabla^j A*\nabla^k A*\nabla^m A+\sum_{i+j=m}\overline{\nabla}^i\overline{\mathrm{Riem}}*\nabla^j A*\nabla^m A \\
&\quad +\overline{\nabla}^{m+1}\overline{\mathrm{Riem}}*\nabla^m A-2|\nabla^{m+1}A|^2+A*A*\nabla^m A*\nabla^m A.
\end{aligned}
$$

Womit wir bewiesen haben:

Theorem 3.13 *Für die Evolution der m-ten Ableitung der zweiten Fundamentalform gilt:*

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta)|\nabla^m A|^2 = & \sum_{i+j=m}\overline{\nabla}^i\overline{\mathrm{Riem}}*\nabla^j A*\nabla^m A+\overline{\nabla}^{m+1}\overline{\mathrm{Riem}}*\nabla^m A \\
& +\sum_{i+j+k=m}\nabla^i A*\nabla^j A*\nabla^k A*\nabla^m A\;-2|\nabla^{m+1}A|^2.
\end{aligned}
$$

□

Korollar 3.14 *Für die Evolution der m-ten Ableitung der zweiten Fundamentalform gilt folgende Abschätzung:*

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta)|\nabla^m A|^2 \leq\; & C\;(1+|\nabla^l A|+\sum_{i+j+k=m}|\nabla^i A|*|\nabla^j A|*|\nabla^k A|)*|\nabla^m A| \\
& -2|\nabla^{m+1}A|^2.
\end{aligned}
$$

wobei C von den äußeren Ableitungen der äußeren Krümmung, der Dimension n und dem Ableitungsgrad m abhängt: $C = C(n, m, \overline{\nabla}^i \overline{\mathrm{Riem}})$. $\square$

3.3 Reskalierung

Wir wollen nun die von Huisken gefundene Monotonieformel (Abschnitt 3.1) für Singularitäten in allgemeinen 'Hintergrundmannigfaltigkeiten' benutzen, um zu zeigen, daß auch in diesem Fall die Gleichung $H_\infty = \langle \mathbf{X}_\infty, \boldsymbol{\nu}_\infty \rangle$ gilt (vgl. [Hu3]). Hierfür benötigen wir aber eine geeigntete Konstruktion, um reskalieren zu können. Wie im Euklidischen benötigen wir den Begriff einer Blow-up Folge.

Definition 3.15
Sei (x_k, t_k) eine Folge in $\mathbf{M}^n \times [0, T_C)$ mit $t_k \nearrow T_C$.

(i) (x_k, t_k) *heißt* **Blow-up Folge** *, falls $\forall k$ gilt*
$|A|^2(x_k, t_k) = max\{\ |A|^2(x, t) : x \in \mathbf{M}^n\}$.
(ii) (x_k, t_k) *heißt* **essentielle Blow-up Folge** *,EBF, falls sogar $\forall k$ gilt:*
1. $|A|^2(x_k, t_k) = max\{\ |A|^2(x, t) : x \in \mathbf{M}^n\}$;
2. $\exists\, 1 < m \leq M$ *so, daß* $m \leq \frac{|A|^2(x_{k+1}, t_{k+1})}{|A|^2(x_k, t_k)} \leq M\ \forall k \in \mathbf{N}$.

Wir reskalieren den in $\mathbf{N}^{n+1}$ gegebenen MKF nach einer Methode von R.S. Hamilton. Die Idee ist folgende: Für eine Blow-up Folge vergrößert man die Hyperfläche ${\mathbf{M}^n}_{t_k}$, so daß $|\tilde{A}_k|^2_{g_k}(x_k, t_k) = 1$ gilt. Ändert man den Zeitparameter entsprechend, so erhält man wieder einen MKF. Man erhält so eine Folge von Flüssen, welche die Singularität in gewissem Sinne 'vergrößern', so daß jeder Fluß dieser Folge wieder ein MKF ist. Hierzu benötigt man eine **euklidische Vektorraumstruktur**.
Wir verwenden den Tangentialraum von $\mathbf{N}^{n+1}$ im Punkt $\mathbf{P}_0 := \lim \mathbf{F}(x_k)$, dem Grenzwert einer Blow-up Folge für die zu betrachtende Singularität. Mit Hilfe der Exponentialfunktion erhalten wir eine Familie von Immersionen $\overline{\mathbf{F}} := \exp_{-1} \circ \mathbf{F}$, und können diese nun wie im Euklidichen Fall reskalieren. Wir definieren die Abbildung $S_k : T_{\mathbf{P}_0}\mathbf{N}^{n+1} \to T_{\mathbf{P}_0}\mathbf{N}^{n+1}, \mathbf{P} \to S_k(\mathbf{P}) := \lambda_k(O_k\mathbf{P} + \mathbf{b}_k)$ mit $\lambda_k := |A|^2(x_k, t_k)$, $O_k \in SO(T_{\mathbf{P}_0}\mathbf{N}^{n+1})$, $\mathbf{b}_k \in T_{\mathbf{P}_0}\mathbf{N}^{n+1}$, und setzen:

$$^k\tilde{\mathbf{F}}(\cdot, \tau) := S_k \circ \overline{\mathbf{F}}$$

Dabei können wir O_k und $\mathbf{b}_k$ so wählen, daß $\forall k$ gilt:

$$\tilde{F}_k(x_k, 0) = \mathbf{0}$$
$$\tilde{\boldsymbol{\nu}}_k(x_k, 0) = \mathbf{e}_{n+1}.$$

Als weitere Größen setzen wir, wiederum wie im euklidischen Fall:

$$\begin{aligned}\alpha_k &:= -\lambda_k^2 t_k\\ T_k &:= \lambda_k^2(T_C - t_k)\\ \tau_k &:= \lambda_k^2(t - t_k)\\ \tilde{\mathbf{M}}_\tau^k &:= \tilde{F}_k(\mathbf{M}^n, \tau).\end{aligned}$$

Die Koordinaten auf dem gewählten Tangentialraum $T_{\mathbf{P}_0}\mathbf{N}^{n+1}$ bezeichnen wir mit $\{y_\alpha\}$. Die Koordinaten auf $\mathbf{M}^n$ mit $\{x_i\}$. Bei der Skalierung geschieht nun folgendes:
Bei unveränderten Koordinaten definierten wir neue skalierte Größen (s.o.). Es fehlt lediglich noch die skalierte Metrik:

$$\tilde{g}^k(S_k(\mathbf{P})) := \tilde{g}(\mathbf{P}) \text{ bzw. } \tilde{g}^k_{\alpha\beta}(S_k(\mathbf{P})) := \tilde{g}_{\alpha\beta}(\mathbf{P}), \tag{3.4}$$

Zur besseren Übersicht stellen wir dies noch einmal in einem Diagramm dar:

$$(\mathbb{R}^n, g_{ij} \text{ bzw. } g^k_{ij}) \xrightarrow{\{x_i\}} (\mathbf{M}^n, g_{ind}) \xrightarrow{\mathbf{F}} (\mathbf{N}^{n+1}, g) \xleftarrow{\exp \mathbf{P}_0} (\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{g}_{\alpha\beta}) \xrightarrow{S_k} (\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{g}^k_{\alpha\beta})$$

Lemma 3.16 *Für $k \to \infty$ gilt, daß die Metrik g^k in einem festen Punkt $\mathbf{Q}$ gegen die Metrik des flachen Raumes $\delta_{\alpha\beta}$ konvergiert:*

$$\tilde{g}^k_{\alpha\beta}(\mathbf{Q}) \to \delta_{\alpha\beta}(\mathbf{Q}).$$

Beweis: Für Normalkoordinaten hat die Metrik im Koordinatenursprung die Form $\tilde{g}_{\alpha\beta}(\mathbf{0}) = \tilde{g}^k_{\alpha\beta}(\mathbf{0}) = \delta_{\alpha\beta}$. Ferner ist $\mathbf{N}^{n+1}$ eine glatte Mannigfaltigkeit, so daß sich die Metrik in einer Taylorreihe im Ursprung $\mathbf{0}$ entwickeln läßt:

$$\begin{aligned}\tilde{g}^k_{\alpha\beta}(\mathbf{Q}) &= \tilde{g}^k_{\alpha\beta}(\mathbf{0}) + D\tilde{g}^k_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{Q})\\ &= \tilde{g}^k_{\alpha\beta}(\mathbf{0}) + D(\tilde{g}_{\alpha\beta} \circ S_k^{-1})(\xi)(\mathbf{Q})\\ &= \tilde{g}^k_{\alpha\beta}(\mathbf{0}) + D(\tilde{g}_{\alpha\beta}) \circ D(S_k^{-1})(\xi)(\mathbf{Q})\\ &= \tilde{g}^k_{\alpha\beta}(\mathbf{0}) + D(\tilde{g}_{\alpha\beta}) \circ \frac{1}{\lambda_k} O_k^{-1}(\xi)(\mathbf{Q})\\ &= \tilde{g}^k_{\alpha\beta}(\mathbf{0}) + \frac{1}{\lambda_k} \underbrace{D(\tilde{g}_{\alpha\beta}) \circ O_k^{-1}(\xi)(\mathbf{Q})}_{\leq \text{C unabh. von k !}} \to \tilde{g}^k_{\alpha\beta}(\mathbf{0}).\end{aligned}$$

Hier ist C unabhängig von k beschränkt, da O_k eine orthonormale Abbildung ist. $\square$
Wie der Beweis zeigt, ist $\frac{\partial}{\partial y_\gamma}(\tilde{g}^k_{\alpha\beta}(\mathbf{Q})) = \frac{1}{\lambda_k}(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\tilde{g}_{\alpha\delta})(O_k^{-1})^\delta_\beta(S_k^{-1}(\mathbf{P}))$, woraus für

die Christoffelsymbole folgt (zur Vereinfachung der Notation wählen wir $O_k = ID$):

$$^k\tilde{\Gamma}^l_{ij}(\mathbf{P}) = \frac{1}{\lambda_k}\tilde{\Gamma}^l_{ij}(S_k^{-1}(\mathbf{P})), \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial}{\partial y_\gamma}\, {}^k\tilde{\Gamma}^l_{ij}(\mathbf{P}) = \frac{1}{\lambda_k^2}\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\, \tilde{\Gamma}^l_{ij}(S_k^{-1}(\mathbf{P})).$$

D.h. insbesondere, daß die kovariante Ableitung $\bar{\tilde{\nabla}}$ mit $\frac{1}{\lambda_k}$ transformiert: $^k\bar{\tilde{\nabla}} = \frac{1}{\lambda_k}\bar{\tilde{\nabla}}$. Damit ergibt sich für das Transformationsverhalten des Riemanntensors:

$$^k\overline{\text{Riem}}\,(\mathbf{P}) = \frac{1}{\lambda_k^2}\overline{\text{Riem}}\,(S_k^{-1}(\mathbf{P}))\ , \tag{3.5}$$

wobei die Stellung der Indizes aufgrund des Transformationsverhaltens der Metrik (vgl. 3.4) beliebig ist. Das bedeutet, daß die Krümmung von $\mathbf{N}^{n+1}$ bei dieser Skalierung für $\lambda_k \to \infty$ gegen Null konvergiert.

Nun können wir das Skalierungsverhalten der auf $\mathbf{M}^n$ induzierten Metrik g^k_{ij} berechnen. Wir haben hier also die Einbettungen $\tilde{\mathbf{F}}_t$, welche durch S_k auf das λ_k-fache vergrößert werden:

$$^k\tilde{\mathbf{F}}_t(\mathbf{M}^n) := S_k \circ \tilde{\mathbf{F}}_t(\mathbf{M}^n).$$

Damit erhalten wir für die induzierte Metrik:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{ij}(\mathbf{P}) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{\mathbf{F}}_t, \frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{\mathbf{F}}_t\rangle_{\bar{g}} \quad \to \quad \tilde{g}^k_{ij}(\mathbf{P}_k) &= \langle \frac{\partial}{\partial x_i}\, {}^k\tilde{\mathbf{F}}_t, \frac{\partial}{\partial x_j}\, {}^k\tilde{\mathbf{F}}_t\rangle_{\bar{g}_k(\mathbf{P}_k)} \\
&= \langle \frac{\partial}{\partial x_i} S_k \circ \tilde{\mathbf{F}}_t, \frac{\partial}{\partial x_j} S_k \circ \tilde{\mathbf{F}}_t\rangle_{\bar{g}_k(\mathbf{P}_k)} \\
&= \lambda_k^2 \langle O_k \frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{\mathbf{F}}_t, O_k \frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{\mathbf{F}}_t\rangle_{\bar{g}_k(\mathbf{P}_k)} \\
&= \lambda_k^2 \langle \frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{\mathbf{F}}_t, \frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{\mathbf{F}}_t\rangle_{\bar{g}_k(\mathbf{P}_k)} \\
&= \lambda_k^2\ \tilde{g}_{ij}(\mathbf{P}_k).
\end{aligned}$$

Da es sich um eine Tensorgleichung handelt, gilt dies unabhänig von den Koordinaten. Invariant geschrieben gilt also:

$$^k g_{ind} = \lambda_k^2 g_{ind}.$$

Alternativ läßt sich das Verhalten der geometrischen Größen über eine Koordinatenänderung beschreiben, welche von λ_k abhängt. Dabei ist zu beachten, daß dies keine Koordinatentransformation ist, die Geometrie wird verändert!

$$^k\tilde{\mathbf{F}}_t(x^1, ..., x^n) = S_k \circ \tilde{\mathbf{F}}_t(x^1, ..., x^n) = S_k \circ (y^1, ..., y^{n+1}) =: (y^1_k, ..., y^{n+1}_k).$$

Für die Ableitungen folgt somit:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}\,{}^k\tilde{\mathbf{F}}_t(x^1,...,x^n) &= D(S_k \circ \tilde{\mathbf{F}}_t(x^1,...,x^n))(\frac{\partial}{\partial x_i}) \\ &= \lambda_k O_k \circ \frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{\mathbf{F}}_t(x^1,...,x^n), \\ &\qquad\qquad \text{bzw. } \frac{\partial y_k^\delta}{\partial x^i} = \lambda_k O_k \circ \frac{\partial y^\delta}{\partial x^i}.\end{aligned}$$

Für die Weingartenabbildung ergibt sich ferner:

$${}^k\tilde{h}_i^j = -\langle \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\,{}^k\tilde{\mathbf{F}}_t\,, \boldsymbol{\nu}_k\rangle \tilde{g}^{kj} = -\lambda_k \langle O_k \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\tilde{\mathbf{F}}_t, O_k\boldsymbol{\nu}\rangle \tilde{g}^{kj} = \frac{1}{\lambda_k}\tilde{h}_i^j,$$

bzw. für deren Eigenwerte:

$${}^k\tilde{\kappa}_i = \frac{1}{\lambda_k}\kappa_i.$$

Wichtig für uns ist die Transformation der Ableitungen der zweiten Fundamentalform:

$$\begin{aligned}|{}^k\tilde{\nabla}^m \tilde{A}_k|_{g_k}^2 &= \langle {}^k\tilde{\nabla}^m \tilde{A}_k, {}^k\tilde{\nabla}^m \tilde{A}_k\rangle_{g_k} \\ &= \lambda_k^{-2}\lambda_k^{-2m}\langle \tilde{\nabla}^m \tilde{A}, \tilde{\nabla}^m \tilde{A}\rangle_g \\ &= \lambda_k^{-2(m+1)}\langle \tilde{\nabla}^m \tilde{A}, \tilde{\nabla}^m \tilde{A}\rangle_g = \lambda_k^{-2(m+1)}|\tilde{\nabla}^m \tilde{A}|^2.\end{aligned}$$

Insbesondere ist $|\tilde{A}_k|_{g_k}^2(x_k, t_k) = 1\ \forall\ k$.

Weiter fragen wir nach der transformierten Form der äußeren Ableitungen des äußeren Riemanntensors. Hier ist zunächst, wie im Falle der zweiten Fundamentalform klar, daß die kovarianten Ableitungen jeweils einen Skalierungsfaktor beisteuern (unabhängig von den Koordinaten ist ${}^k\tilde{\overline{\nabla}} = \frac{1}{\lambda_k}\tilde{\overline{\nabla}}$!). Wie sieht es aber mit dem Riemanntensor selbst aus? Die obige Koordinatenänderung liefert:

$$\begin{aligned}{}^k\tilde{\overline{R}}{}^i{}_{jkl} &= \frac{\partial x^i}{\partial y_k^\alpha}\frac{\partial y_k^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial y_k^\gamma}{\partial x^k}\frac{\partial y_k^\delta}{\partial x^l}\,{}^k\tilde{\overline{R}}{}^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} \\ &= \lambda_k^2\,{}^k\tilde{\overline{R}}{}^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}.\end{aligned}$$

Die Norm wird zu:

$$\begin{aligned}|{}^k\overline{\mathrm{Riem}}|^2 &= \langle {}^k\tilde{\overline{R}}{}^i{}_{jkl}, {}^k\tilde{\overline{R}}{}^i{}_{jkl}\rangle_{g^k_{ind}} \\ &= \langle {}^k\tilde{\overline{R}}{}^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}, {}^k\tilde{\overline{R}}{}^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\rangle_{g^k}.\end{aligned}$$

Dies gilt für andere mögliche Positionen der Indizes in analoger Weise. Ferner ist nach Gleichung 3.5 für jede beliebige Stellung der Indizes ${}^k\overline{\mathrm{Riem}}(\mathbf{P}_k) = \frac{1}{\lambda_k^2}\overline{\mathrm{Riem}}(S_k^{-1}(\mathbf{P}))$. Somit folgt:

$$|\overline{\mathrm{Riem}}_k|^2_{g^k_{ing}} = \frac{1}{\lambda_k^4}|\overline{\mathrm{Riem}}|^2_{g_{ind}} = \frac{1}{\lambda_k^4}|\overline{\mathrm{Riem}}|^2_g.$$

Insgesamt also:

$$|{}^k\tilde{\nabla}^m\overline{\mathrm{Riem}}_k|^2_{g^k_{ind}} = \lambda_k^{-2(m+2)}|\tilde{\nabla}^m\overline{\mathrm{Riem}}|^2_g.$$

Der Laplace-Operator transformiert (ebenfalls unabhängig von den Koordinaten) wie 'zweimal die Strecke':

$${}^k\tilde{\nabla}^k_\alpha\tilde{\nabla}_\beta\,{}^k\tilde{g}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\lambda_k^2}\tilde{\nabla}_\alpha\tilde{\nabla}_\beta\tilde{g}^{\alpha\beta}, \quad \text{bzw.} \quad {}^k\Delta = \frac{1}{\lambda_k^2}\Delta.$$

Wie bereits erwähnt, wählen wir nun einen neuen Zeitparameter, so daß die skalierte Gleichung wieder ein MKF ist:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{1}{\lambda_k^2}\frac{\partial}{\partial t}\,, \qquad \frac{\partial\tau}{\partial t} = \lambda_k^2.$$

Somit erhalten wir die reskalierten Evolutionsgleichungen aus dem eben Gezeigten, indem wir die Gleichung aus Theorem 3.13 mit $\lambda_k^{-2(m+2)}$ multiplizieren:

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial\tau} -{}^k\tilde{\Delta})|{}^k\tilde{\nabla}^m\tilde{A}_k|^2_{g_k} &= \lambda_k^{-2(m+2)}(\frac{\partial}{\partial t} - \tilde{\Delta})|\tilde{\nabla}^m\tilde{A}|^2_g \\
&= \sum_{i+j=m}\tilde{\overline{\nabla}}^i\,\overline{\mathrm{Riem}} * \tilde{\nabla}^j\tilde{A} * \tilde{\nabla}^m\tilde{A} + \tilde{\overline{\nabla}}^{m+1}\overline{\mathrm{Riem}} * \tilde{\nabla}^m\tilde{A} \\
&\quad + \sum_{i+j+k=m}\tilde{\nabla}^i\tilde{A} * \tilde{\nabla}^j\tilde{A} * \tilde{\nabla}^k\tilde{A} * \tilde{\nabla}^m\tilde{A} \;- 2|\tilde{\nabla}^{m+1}\tilde{A}|^2 \\
&= \sum_{i+j=m}{}^k\tilde{\overline{\nabla}}^i\,\overline{\mathrm{Riem}}_k *^k \tilde{\nabla}^j\tilde{A}_k *^k \tilde{\nabla}^m\tilde{A}_k \\
&\quad + \sum_{i+j+k=m}{}^k\tilde{\nabla}^i\tilde{A}_k *^k \tilde{\nabla}^j\tilde{A}_k *^k \tilde{\nabla}\tilde{A}_k *^k \tilde{\nabla}^m\tilde{A}_k \\
&\quad + {}^k\tilde{\overline{\nabla}}^{m+1}\overline{\mathrm{Riem}}_k *^k \nabla^m\tilde{A}_k - 2|{}^k\tilde{\nabla}^{m+1}\tilde{A}_k|^2.
\end{aligned}$$

Satz 3.17 *Für die reskalierte zweite Fundamentalform gilt;*

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial\tau} -{}^k\tilde{\Delta})|{}^k\tilde{\nabla}^m\tilde{A}_k|^2_{g_k} &= \sum_{i+j=m}{}^k\tilde{\overline{\nabla}}^i\,\overline{\mathrm{Riem}}_k *^k \tilde{\nabla}^j\tilde{A}_k *^k \tilde{\nabla}^m\tilde{A}_k \\
&\quad + \sum_{i+j+k=m}{}^k\tilde{\nabla}^i\tilde{A}_k *^k \tilde{\nabla}^j\tilde{A}_k *^k \tilde{\nabla}\tilde{A}_k *^k \tilde{\nabla}^m\tilde{A}_k \\
&\quad + {}^k\tilde{\overline{\nabla}}^{m+1}\overline{\mathrm{Riem}}_k *^k \nabla^m\tilde{A}_k \;-\; 2|{}^k\tilde{\nabla}^{m+1}\tilde{A}_k|^2. \quad \square
\end{aligned}$$

Korollar 3.18 *Für die Evolution der m-ten Ableitung der reskalierten zweiten Fundamentalform gilt folgende Abschätzung:*

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial\tau} -^k \Delta)|^k\tilde{\nabla}^m A|^2 \quad &\leq \quad -2|^k\tilde{\nabla}^{m+1}\tilde{A}_k|^2 \\
&C\ (1 + |^k\tilde{\nabla}^l_k\tilde{A}_k| + \sum_{i+j+k=m} |^k\tilde{\nabla}^i\tilde{A}_k| * |^k\tilde{\nabla}^j\tilde{A}_k| * |^k\tilde{\nabla}^k\tilde{A}_k|) * |^k\tilde{\nabla}^m\tilde{A}_k|,
\end{aligned}
$$

wobei C von den äußeren Ableitungen der äußeren Krümmung, der Dimension n und dem Ableitungsgrad m abhängt: $C = C(n, m, \overline{\nabla}^i\overline{\mathrm{Riem}})$ $\square$

Bemerkung: Da wir eine feste Hintergrundmannigfaltigkeit voraussetzen und in einer kompakten Umgebung eines Punktes arbeiten, können wir die Terme $\overline{\nabla}^i\overline{\mathrm{Riem}}$ als beschränkt ansehen.

3.4 Beschränkung der zweiten Fundamentalform und ihrer Ableitungen

Die Reskalierung wurde so durchgeführt, daß $|\tilde{A}_k|^2(x_k, t_k) = 1$ gilt. Nun ist zu zeigen, daß wir beliebig dicht an die Singularität herantreten können und dennoch eine Schranke für $|A_k|_{g_k}$ auf ganz $\mathbf{M}^n{}_k$ haben. Diese Schranke ist sogar unabhängig von k. Analog zu dem Vorgehen von Stahl in [St] beweisen wir eine gleichmäßige Krümmungsschranke für $|\tilde{A}_k|$ auf kompakten Teilmengen:

Lemma 3.19 *Sei $\overline{T} := \lim T_k$. Dann gilt:*

$$
\begin{aligned}
\textit{Typ1}\ :\ & \forall\, \delta > 0\ \ \exists k_0 = k_0(\delta)\ \textit{und}\ \ C = C(\delta)\ \textit{mit:} \\
& \forall\, k > k_0\ \textit{ist}\ \ |\tilde{A}_k| \leq C\ \ \textit{auf}\ \ \mathbf{M}^n \times [\alpha_{k_0}, \overline{T} - \delta]\ . \\
\textit{Typ2}\ :\ & \forall\, \tilde{T} > 0\ \ \exists k_0 = k_0(\tilde{T})\ \textit{und}\ \ C = C(\tilde{T})\ \textit{mit:} \\
& \forall\, k > k_0\ \textit{ist}\ \ |\tilde{A}_k| \leq C\ \ \textit{auf}\ \ \mathbf{M}^n \times [\alpha_{k_0}, \tilde{T}]\ .
\end{aligned}
$$

Beweis: Wir führen den Beweis nur für Typ1-Singularitäten durch, im Fall von Typ2-Singularitäten sei auf [St] S. 100 verwiesen.
Wir wählen eine Teilfolge $\hat{k}$, so daß $\alpha_{\hat{k}}$ bzw. $|\tilde{A}_{\hat{k}}|(y_{\hat{k}}, \tau_{\hat{k}})$ monoton gegen $-\infty$ bzw. ∞ konvergiert, und finden ein k_0, so daß $\overline{T} \leq \mathrm{T}_{\hat{k}} + \frac{\delta}{2}$ für $\hat{k} \geq k_0$, d.h. insbesondere $[\alpha_{\hat{k}_0}, \overline{T} - \delta] \subset [\alpha_{\hat{k}}, \mathrm{T}_{\hat{k}} - \frac{\delta}{2}]$ für $\hat{k} \geq k_0$. Man beachte, daß die von $\hat{k}$ unabhängige Schranke $\overline{T} - \delta$ durch die von $\hat{k}$ abhängigen Schranken $\mathrm{T}_{\hat{k}} - \frac{\delta}{2}$ ab einem bestimmten $\hat{k}$ abgeschätzt werden können. Nehmen wir an, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es eine Folge $(y_{\hat{k}}, \tau_{\hat{k}}) \in \mathbf{M}^n \times [\alpha_{k_0}, \overline{T} - \delta]$ mit $|\tilde{A}_{\hat{k}}|(y_{\hat{k}}, \tau_{\hat{k}}) \to \infty$. Es existiert nun also eine Folge $C_{\hat{k}}$ mit $C_{\hat{k}} \nearrow \infty$ für $\hat{k} \to \infty$, so daß

$$|\tilde{A}_{\hat{k}}|(y_{\hat{k}}, \tau_{\hat{k}}) \geq C_{\hat{k}}\ , \quad y_{\hat{k}} \in M^n\ , \quad \tau_{\hat{k}} \leq \mathrm{T}_{\hat{k}} - \tfrac{\delta}{2}.$$

Unskaliert bedeutet dies mit $\tilde{t}_{\hat{k}} := \lambda_{\hat{k}}^{-2}\,\tau_{\hat{k}} + t_{\hat{k}}$:

$$|A|(y_{\hat{k}}, \tilde{t}_{\hat{k}}) \geq \lambda_{\hat{k}}\, C_{\hat{k}}\,, \quad y_{\hat{k}} \in M^n\,, \quad 0 \leq \tilde{t}_{\hat{k}} \leq T - \lambda_{\hat{k}}^{-2}\,\tfrac{\delta}{2}\,.$$

Dabei wurde berücksichtigt, daß aus $\tau_{\hat{k}} \leq \mathrm{T}_{\hat{k}} + \frac{\delta}{2}$ folgt: $\tilde{t}_{\hat{k}} - t_{\hat{k}} \leq T - t_{\hat{k}} - \frac{\delta}{2}\lambda_{\hat{k}}^{-2}$. Bei Typ1-Singularitäten ist aber gerade $|\tilde{A}|^2(.,\tilde{t}_{\hat{k}}) \leq \frac{K}{T-\tilde{t}_{\hat{k}}} \leq \frac{2\,K}{\delta}\,\lambda_{\hat{k}}^2$, also

$$|\tilde{A}|(y_{\hat{k}}, \tilde{t}_{\hat{k}}) \leq \sqrt{\tfrac{2\,K}{\delta}}\,\lambda_{\hat{k}}\,.$$

Dies führt zu einen Widerspruch für $\hat{k} \to \infty$. $\square$

Wir haben die zweite Fundamentalform bis kurz vor der Singularität beschränkt: Bis $\overline{T} - \delta$, wobei wir δ beliebig klein wählen können.
Im nächsten Abschnitt benötigen wir die Beschränktheit der zweiten Fundamentalform und ihrer Ableitungen bezüglich der flachen Metrik des Tangentialraumes, in welchem wir die Flächen als Graphen darstellen. Dies ergibt sich nun ohne weitere Schwierigkeiten. Wegen Lemma 3.16 gilt in $\Omega \subseteq B_r(\mathbf{0}) \subseteq T_{\mathbf{P}_0}\mathbf{N}^{n+1}$:

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \;\; \forall\, \varepsilon \geq 0 \;\; \exists\, k_0 \in \mathbb{N}: \; |\,{}^k\tilde{g}_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}|_{C^m(\Omega)} \leq \varepsilon \;\forall k \geq k_0$$

(d.h. ε ist unabhängig von k). Damit läßt sich die zweite Fundamentalform der Hyperfläche $\mathbf{M}_t$ bezüglich der auf dem Tangentialraum gegebenen Metik $\delta_{\alpha\beta}$ abzuschätzen (aus Gründen der Eindeutigkeit führen wir dazu einstweilen die Indizes δ und g für die beiden verschiedenen Metriken ein). Wir haben dann:

$$C_0 \geq |({}^k h_g)_{ij}| = |\frac{\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f_k}{\sqrt{1 + |{}^k\nabla f_k|_{g_k}^2}}| \geq |\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f_k| = |\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tilde{F}_k^{\alpha}|,$$

da $\tilde{F}^\alpha = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$. Hier hängt C_0 nicht von k ab! Ferner ist:

$$\begin{aligned}
({}^k h_\delta)_{ij} &:= \langle \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\,{}^k\tilde{F}, \nu\rangle_\delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\,{}^k\tilde{F}^\alpha \nu^\beta \delta_{\alpha\beta}.\\
({}^k h_g)_{ij} &:= \langle \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\,{}^k\tilde{F}, \nu\rangle_g = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\,{}^k\tilde{F}^\alpha \nu^\beta\,{}^k\tilde{g}_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
|({}^k h_\delta)_{ij}|_{C^m(\Omega)} - |({}^k h_g)_{ij}|_{C^m(\Omega)} &\leq |({}^k h_\delta)_{ij} - ({}^k h_g)_{ij}|_{C^m(\Omega)}\\
&\leq |\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\tilde{F}_k||\nu^\beta||\underbrace{{}^k\tilde{g}_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}}_{\leq\varepsilon}|_{C^m(\Omega)} \leq C_0\,\varepsilon,
\end{aligned}$$

da $|\nu^\beta| \leq 1$ gilt. Daraus folgt für die Norm von ${}^k h_\delta$:

$$|({}^k h_\delta)_{ij}|_{C^m(\Omega)} \leq (1+\varepsilon)C_0 \qquad \forall\, k \;\text{ auf }\; [\alpha_k, \mathrm{T}_k - \delta].$$

Wir können nun durch ein Iterationsverfahren (vgl. [Hu3]) daraus die Beschränktheit aller Ableitungen $\nabla^m A$ herleiten:

Theorem 3.20

$$\begin{aligned}
\textit{Typ1}: &\quad \forall\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, \delta > 0\ \ \exists k_0 = k_0(\delta)\ \textit{und}\ \ C = C(\delta)\ \textit{mit:}\\
&\quad \forall\, k > k_0\ \textit{ist}\ \ |\nabla^m \tilde{A}_k| \le C\ \ \textit{auf}\ \ \mathbf{M}^n \times [\alpha_{k_0}, \overline{T} - \delta]\ .\\
\textit{Typ2}: &\quad \forall\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, \tilde{T} > 0\ \ \exists k_0 = k_0(\tilde{T})\ \textit{und}\ \ C = C(\tilde{T})\ \textit{mit:}\\
&\quad \forall\, k > k_0\ \textit{ist}\ \ |\nabla^m \tilde{A}_k| \le C\ \ \textit{auf}\ \ \mathbf{M}^n \times [\alpha_{k_0}, \tilde{T}]\ .
\end{aligned}$$

Beweis: Induktion.
(IA) Wegen Lemma 3.19 gilt: $\exists C_0 : |\nabla^m \tilde{A}_k| \le C_0$ auf $\mathbf{M}^n \times [\alpha_0, \overline{T} - \delta]$ bzw. auf $\mathbf{M}^n \times [\alpha_0, \tilde{T}]$.
(IS) Sei $|\nabla^s \tilde{A}_k| \le C(s)\ \forall s \le m$, dann läßt sich eine Konstante B finden (IV), so daß

$$\frac{\partial}{\partial \tau} |\nabla^{m+1} \tilde{A}_k|^2 \le \Delta |\nabla^{m+1} \tilde{A}_k|^2 + B(1 + |\nabla^{m+1} \tilde{A}_k|^2)$$

(beachte: $x \le 1 + x^2$ und Korollar 3.18). Für $|\nabla^m \tilde{A}_k|^2$ gilt - ebenfalls nach Korollar 3.18 - die Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(B|\nabla^m \tilde{A}_k|^2) \le \Delta(B|\nabla^m \tilde{A}_k|^2) - B|\nabla^{m+1} \tilde{A}_k|^2 + BB_1 |\nabla^m \tilde{A}_k|^2.$$

Zusammen ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(|\nabla^{m+1} \tilde{A}_k|^2 + B|\nabla^m \tilde{A}_k|^2) \le \Delta(|\nabla^{m+1} \tilde{A}_k|^2 + B|\nabla^m \tilde{A}_k|^2) - B|\nabla^{m+1} \tilde{A}_k|^2 + BB_1$$

$$\begin{aligned}
\text{bzw.}\quad \frac{\partial}{\partial \tau}(D) &\le \Delta(D) - B(\underbrace{|\nabla^{m+1} \tilde{A}_k|^2 - B_1}_{\substack{\text{oBdA } \ge 0, \text{ andernfalls}\\ \text{wäre } |\nabla^{m+1} \tilde{A}_k|^2 \le B_1}})\\
&\le \Delta(D)
\end{aligned}$$

mit $D := |\nabla^{m+1} \tilde{A}_k|^2 + B|\nabla^m \tilde{A}_k|^2$ und $B_1 = B_1(C(l), \mathbf{M}^n{}_0, \overline{\nabla}^i \overline{\mathrm{Riem}})$. Aus dem parabolischen Maximumsprinzip (vgl. [PW] Kap. 3 S. 160) folgt nun, daß $D(\mathbf{M}^n, \tau) \le D(\mathbf{M}^n, 0) =: C(\mathbf{M}^n{}_0, m)$ gilt.
Somit ist $|\nabla^{m+1} \tilde{A}_k|^2 \le C(\mathbf{M}^n{}_0, m)$ oder $\le B_1(C(l), \mathbf{M}^n{}_0, \overline{\nabla}^i \overline{\mathrm{Riem}})$. □

Bemerkung: Die Abschätzungen gelten also nun unabhänig davon, ob A die zweite Fundamentalform bezüglich g oder δ ist !

3.5 Singularitäten in allgemeinen Mannigfaltigkeiten

Ziel ist es einen Grenzfluß für $k \to \infty$ konstruieren. Der Grundgedanke hierbei ist, die Mannigfaltigkeiten $\mathbf{M}^n{}_k$ lokal als Graphen über gemeinsamen Koordinaten - durch Funktionen f_k - darzustellen. Sind deren Ableitungen beschränkt, so erhält man nach dem Satz von *Arzela-Ascoli* Teilfolgen, welche gegen einen Grenzfluß konvergieren. Man kann auf diese Weise im allgemeinen jeweils nur einen kleinen Ausschnitt der Mannigfaltigkeiten ${\mathbf{M}^n}_k$ als Graph darstellen. Ferner ist sicherzustellen, daß diese Teilstücke der ${\mathbf{M}^n}_k$ auf einem für alle k gleich großen Koordinatensystem darstellbar sind. Wir können davon ausgehen, daß die zweite Fundamentalform auch bezüglich der Euklidischen Metrik auf dem Tangentialraum gleichmäßig auf $[\alpha_{k_0}, \overline{T} - \delta]$ beschränkt ist. Aus dieser Abschätzung läßt sich eine Gradientenschranke für die Funktionen f_k gewinnen:

Lemma 3.21 (vgl. [St] Kapitel 7.1) *Sei $\mathbf{M}^n$ eine immersierte Fläche in $\mathbb{R}^{n+1}$, welche die Krümmungsschranke $|A| \leq C_0$ erfüllt.*
Sei $\mathbf{P}_0 := \mathbf{F}(x_0)$ und $f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ die Graphendarstellung von $\mathbf{F}(\mathbf{M}^n)$ um $\mathbf{P}_0$ über dem Tangentialraum in $\mathbf{P}_0$. Sei $\mathbf{P} := \mathbf{F}(x) =: (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ mit $|\mathbf{x}| =: r < \eta$, und sei $\{ s\,\mathbf{x} \,:\, 0 \leq s \leq 1 \} \subset \mathcal{U}$. Dann gilt für $v = \langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega} \rangle^{-1} = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$:

$$v(x) < 1 + \left(\frac{r}{2\,\eta}\right)^2 .$$

Demnach existiert also in einer Umgebung von $\mathbf{P}_0$ eine Graphendarstellung von $\mathbf{M}^n$ mit gleichmäßig beschränktem Gradienten. Dabei ist zu beachten, daß der Radius für die mögliche Darstellung nur von der Krümmungsschranke selbst und der Dimension n abhängig ist. Für die betrachtete **Flächenfamilie** läßt sich somit eine Umgebung $\mathcal{U}$ finden, welche eine Kugel vom Radius $\eta = \frac{1}{4n^2 C_0}$ enthält, und in welcher Γ_{f_k} $\forall k \geq k_0$ ein Graph mit beschränktem Gradienten ist. Es ist ein Standardschluß, aus der Beschränktheit aller höheren Ableitungen der Krümmung gemeinsame, gleichmäßige Schranken für alle höheren Ableitungen der Funktionen f_k herzuleiten (vgl. Anhang B).

Theorem 3.22

Eine Teilfolge der reskalierten Flüsse $\tilde{F}_k$ konvergiert (bei geeigneter Umparametrisierung) gegen einen Grenzfluß $\tilde{F}_\infty : \mathbf{M}^n \times (-\infty, \overline{T}) \longrightarrow T_{\mathbf{P}_0}\mathbf{N}^{n+1}$ ($\overline{T} \in \mathbb{R}_+$); dabei gilt:

(i) $\tilde{F}_\infty$ genügt dem mittleren Krümmungsfluß;

(ii) Typ1-Singularitäten bleiben auch für diesen Grenzfluß erhalten, d.h. bildet $\tilde{\mathbf{F}}_k$ eine Typ1-Singularität aus, so auch $\tilde{\mathbf{F}}_\infty$. Man findet demnach das gleiche Singulartätenverhalten wie im Euklidischen Fall: Der Grenzfluß, und damit der Fluß selbst, konvergiert gegen eine homothetische Lösung (im Sinne der gegebenen Konstruktion auf dem Tangentialraum).

Beweis: Sei $R > 0$ und $\tau_- < 0 < \tau_+ < \overline{T}$ (Typ1) bzw. ∞ (Typ2). Wir zerlegen das Gebiet $\Omega := B_R(\mathbf{0}) \times [\tau_-, \tau_+]$ in endlich viele Teilstücke $A_m^{r,\delta} := B_r(\mathbf{P}_m) \times [\tau_m - \delta, \tau_m + \delta]$ (1≤ m≤ N), dies ist möglich, da Ω kompakt ist. Dabei sind die Punkte $\mathbf{P}_m$ fest in Ω, und r sowie δ so gewählt, daß Lemma 3.21 mit $\varepsilon = 1/2$

für alle k und m anwendbar ist. Da wir Immersionen betrachten, gibt es zu jeder Umgebung eines Punktes $\mathbf{P}_m$ nur endlich viele Urbilder $r(m)$. Wir zählen dann solche Punkte r-fach, haben also insgesamt $\overline{N} = \sum r(m)$ Punkte, können jedoch davon ausgehen, daß jeder dieser Punkte ein eindeutiges Urbild in $\mathbf{M}^n$ hat. Wir hatten so reskaliert, daß $\mathbf{F}(x_k, t_k) = \mathbf{0}$ und $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_k(x_k, t_k) = \mathbf{e}_{n+1}\ \forall k$ gilt. Insbesondere ist $T_{\mathbf{F}(x_k,t_k)}\mathbf{M}^n{}_k$ unabhängig von k, und wir können die Flächen $\mathbf{F}_k$ in $A_0^{r,\delta} := B_r(\mathbf{0}) \times [-\delta, \delta]$ als Graph über $T_{\mathbf{0}}\mathbf{F}_k$ darstellen. Da sich die Funktionen f_k und ihre Ableitungen auf Ω gleichmäßig beschränken lassen (vgl. Abschnitt 3.4), bilden sämtliche Ableitungen $D^m f_k$ gleichgradig stetige Funktionenfamilien für alle k:

$$|D^m f_k(\mathbf{x}) - D^m f_k(\mathbf{y})| \leq C(m)|\mathbf{x} - \mathbf{y}|\ \forall\ m \in \mathbb{N}.$$

Nach Arzela-Ascoli können wir für alle $m \in \mathbb{N}$ nun konvergente Teilfolgen finden. Eine Diagonalfolge konvergiert dann in C^∞.
Betrachtet man nun einen beliebigen Punkt $\mathbf{P}_m$, dann tritt das Problem auf, daß die Tangentialebenen an die Flächen $\mathbf{F}_t(\mathbf{M}^n)$ mit der Zeit t variieren. Nach Konstruktion existiert jedoch in jedem Punkt oBdA eine **eindeutige** Tangentialfläche. Ferner bilden die Normalenvektoren in diesen Punkten eine Folge auf $\mathbf{S}^{\mathrm{n}}$ in $T_{\mathbf{P}_m}\mathbf{M}^n$. Für eine Teilfolge haben wir somit eine 'Grenztangentialfläche'.
Ab einem bestimmten k_0 können wir also davon ausgehen (unter Umständen müssen wir r nochmal etwas verkleinern), daß die Tangentialflächen $T_{\mathbf{P}_m}\mathbf{F}_t(\mathbf{M}^n)$ dicht genug an dieser 'Grenztangentialfläche' liegen, und wir $\mathbf{F}_t(\mathbf{M}^n)$ dann über dieser 'Grenztangentialfläche' als Graphen darstellen können.
Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Monotonieformel (bzw. 3.9) garantiert, daß die Flächen $\mathbf{F}_t(\mathbf{M}^n)$ in jedem der betrachteten Teilgebiete eine endliche 'Masse' besitzen, so daß wir mit den endlich vielen $A_i^{r,\delta}$ tatsächlich auskommen. Wir können mit derselben Argumentation, wie wir sie im Fall von $A_0^{r,\delta}$ angewendet haben, die Konvergenz in $A_i^{r,\delta}$ (i beliebig) folgern (evtl. durch Übergang zu weiteren Teilfolgen - es gibt nur endlich viele $A_i^{r,\delta}$). Dabei gehen wir davon aus, daß unendlich viele der Flüsse $\mathbf{F}_k$ das Gebiet $A_i^{r,\delta}$ schneiden. Sollte dies nicht der Fall sein, so konvergiert die Folge trivialerweise auf $A_i^{r,\delta}$ gegen den 'leeren Fluß'.
Somit erhalten wir eine Teilfolge, welche in C^∞ gegen einen Grenzfluß konvergiert, wobei man auf die im allgemeinen divergierende Parametrisierung achten muß (gegebenenfalls geeignet umparametrisieren). Diese Konstruktion führt man nun für eine Folge

$$\begin{aligned}
&R_l \to +\infty \\
&\tau_-^l \to -\infty \\
&\tau_+^l \to \overline{T}\ \ \text{(Typ1) bzw. } \infty\ \ \text{(Typ2)}
\end{aligned}$$

durch und erhält für alle l eine konvergente Teilfolge von Flüssen. Wählt man schließlich nochmals eine Diagonalfolge, so erhält man den gewünschten Grenzfluß.

Es bleibt also lediglich zu zeigen, daß der Charakter einer Typ1-Singularität erhalten bleibt. Dies folgt unmittelbar aus der Skalierungsinvarianz des Produktes

$$max_{\mathbf{M}^n}|\tilde{A}|^2(\cdot,t)\cdot(T-t):$$

$$\begin{aligned}K \geq max_{\mathbf{M}^n}|\tilde{A}|^2(\cdot,t)(T-t) &= max_{\mathbf{M}^n}|\tilde{A}_k|^2(\cdot,\tau_k)\lambda_k^2((T-t_k)-(t-t_k)) \\ &= max_{\mathbf{M}^n}|\tilde{A}_k|^2(\cdot,\tau_k)(\lambda_k^2(T-t_k)-\lambda_k^2(t-t_k)) \\ &= max_{\mathbf{M}^n}|\tilde{A}_k|^2(\cdot,\tau_k)(\mathrm{T}_k-\tau_k).\end{aligned}$$

Mit $a_k(x) \leq b_k(x)\ \forall k \to a_\infty(x) \leq b_\infty(x)$ gilt dann im Limes auf $(-\infty,\overline{T})$:

$$max_{\mathbf{M}^n}|\tilde{A}_\infty|^2(\cdot,\tau_\infty)(\overline{T}-\tau_\infty) \leq K.$$

□

Bemerkung: Bei Typ2-Singularitäten könnte allerdings nicht 'standardmäßige' Reskalierung unter gewissen Umständen zu einer Typ1-Singularität führen. Ansonsten ist zu erwarten, daß man dieses Reskalierungsverfahren auch auf Typ2-Singularitäten anwenden kann und ein analoges Resultat erhält.

3.6 Homothetische Lösungen

Gilt für die Evolution einer Hyperfläche im $\mathbb{R}^{n+1}$, daß $\mathbf{M}^n{}_t = \lambda(t)\mathbf{M}^n{}_0$, so nennt man dies einen homothetischen Fluß.

Definition 3.23 *Eine Lösung des MKF heißt* **homothetisch***, falls diese zusätzlich eine Lösung eines homothetischen Flußes ist.*

Bemerkung: Im folgenden werden ausschließlich homothetisch schrumpfende Lösungen des MKF betracht. Solche Lösungen bewegen sich dann selbstähnlich auf einen singulären Punkt zu (vgl. Anhang D).

Vorbereitung:

Es sei an dieser Stelle an die Invarianz bzw. die Transformation der mit dem rückwärtigen Wärmeleitungskern gewichteten Oberflächenintegrale erinnert. Wir rechnen dies für beliebige Kodimension vor, auch wenn wir im Beweis des nächsten Theorems nur den Fall der Hyperfläche verwenden. Wie wir in Abschnitt 3.3 eingeführt haben, bezeichnen wir die mit S_k reskalierten Größen mit dem Index k:

$$\begin{aligned}\{2(T-t)\}^{l/2}\int_{\mathbf{M}^n} k\ d\mu &= \{2\lambda_k(T-t)\}^{l/2}\int_{\mathbf{M}^n}\{4\pi\lambda_k(T-t)\}^{-\frac{n+l}{2}}e^{-\frac{\lambda_k^2|\mathbf{x}|^2}{4\lambda_k^2(T-t)}}\lambda_k^n\ d\mu \\ &= \{2(\mathrm{T}_k-\tau_k)\}^{l/2}\int_{\mathbf{M}^n{}_k}\{4\pi(\mathrm{T}_k-\tau_k)\}^{-\frac{n+l}{2}}e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4(\mathrm{T}_k-\tau_k)}}\ d\mu_k \\ &= \{2(\mathrm{T}_k-\tau_k)\}^{l/2}\int_{\mathbf{M}^n{}_k} k_k\ d\mu_k\end{aligned}$$

und mit $\alpha(t) := \{2(T-t)\}^{-1/2}, \tilde{\mathbf{F}} = \alpha(t)\mathbf{F}$ bzw. $\tilde{\mathbf{M}}_t = \alpha(t)\mathbf{M}_t$:

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{\mathbf{M}}_{s_0}} \tilde{\rho}\, d\tilde{\mu}_{s_0} &= \int_{\alpha(t)\mathbf{M}_t} e^{-\frac{|\mathbf{X}|^2}{2}}\, d(\alpha(t)^n\mu) \\ &= \int_{\mathbf{M}_t} \alpha(t)^n e^{-\frac{|\alpha(t)\mathbf{X}|^2}{2}}\, d\mu = \int_{\mathbf{M}_t} \rho d\mu.\end{aligned}$$

ρ und $\tilde{\rho}$ sind dabei die in Abschnitt 3.2 gegebenen Lösungen der rückwärtigen Wärmeleitungsgleichung im $\mathbb{R}^{n+1}$.

Theorem 3.24 *Der Fluß $\mathbf{F}_\infty$, welchen wir in Theorem 3.5 erhalten haben, ist ein homothetischer Fluß, d.h. $\forall t \in (-\infty, \overline{T})$ gilt auf $\mathbf{M}^n_t : H = \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle$.*

Beweis: Zur Konstruktion des Grenzflusses sind wir von einer kompakten 'Startfläche' $\mathbf{M}_0$ in $\mathbf{N}^{n+1}$ ausgegangen. Insbesondere gilt für diese Fläche $\int_{\mathbf{M}_0} \rho\, d\mu \leq C$. Mit Theorem 3.9 gilt dann für alle Flächen $\mathbf{M}^n_t$, mit $t \in (0, T)$

$$\{2(T-t)\}^{1/2} \int_{\mathbf{M}_0} k d\mu \leq \overline{C}.$$

Dieses Integral ist invariant unter der Reskalierung S_k $(l = 1)$. Somit gilt also:

$$\{2(\mathrm{T}_k - \tau_k)\}^{1/2} \int_{\mathbf{M}^n{}_k} \tilde{\rho}_k\, d\mu_k \leq \overline{C} \quad \forall t\, \in (-\alpha_k, \mathrm{T}_k) \quad \forall k\, \in \mathbb{N}.$$

Mit $\overline{\rho} = \{2(\overline{T}-t)\}^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{|\mathbf{X}|^2}{4(\overline{T}-t)}}$ gilt also auch im Grenzfall $k \to \infty$:

$$\{2(\overline{T}-t)\}^{1/2} \int_{\mathbf{M}_\infty} \overline{\rho}\, d\mu \leq \overline{C} \quad \forall t\, \in (-\infty, \overline{T}).$$

Betrachten wir nun die Flächen $\frac{1}{\sqrt{2(\overline{T}-t)}}\mathbf{F}_t(\mathbf{M}^n)$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{\mathbf{M}}^n_s} \tilde{\rho}\, d\mu_s &= \{2(\overline{T}-t)\}^{l/2} \int_{\mathbf{M}^n{}_t} \overline{\rho}\, d\mu_t \leq \overline{C} \qquad \forall t\, \in (-\infty, \overline{T}) \\ &\qquad \text{bzw. } \forall s = -1/2 \log(\overline{T}-t) \in (-\infty, \infty).\end{aligned}$$

Wir integrieren die Monotonieformel

$$\int_{s_0}^{s_1} \int_{\tilde{\mathbf{M}}^n_t} \tilde{\rho} |\tilde{\mathbf{H}} + \frac{1}{2(\overline{T}-t)} \tilde{\mathbf{F}}|^2 d\mu_t\, ds = \int_{\tilde{\mathbf{M}}_{s_1}} \tilde{\rho} d\tilde{\mu}_{s_1} - \int_{\tilde{\mathbf{M}}_{s_0}} \tilde{\rho} d\tilde{\mu}_{s_0} \leq \overline{C}$$

wählen s_1 fest. Wegen der gleichmäßigen Beschränktheit für alle s_1 ist auch das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{s_1} \int_{\tilde{\mathbf{M}}^n_t} \tilde{\rho} |\tilde{\mathbf{H}} + \frac{1}{2(\overline{T}-t)} \tilde{\mathbf{F}}|^2 d\mu_t\, ds$$

durch $\overline{C}$ beschränkt. D.h. für $s_1 \to -\infty$ läuft der Integrand gegen Null:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; s_1 : \int_{\mathbf{M}^n{}_{s_1}} \tilde{\rho} |\tilde{\mathbf{H}} + \frac{1}{2(\overline{T} - t)} \tilde{\mathbf{F}}|^2 d\mu < \varepsilon.$$

Für $s_1 \to -\infty$ konvergieren daher die $\mathbf{M}^n{}_{s_1}$ (nach Reskalierung) zu einer Fläche mit $\mathbf{H} = -\mathbf{F}^\perp$. Daher ist der ganze Fluß eine homothetische Lösung, und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

Wir wollen nun noch die erste Variation des Oberflächenfunktionals bezüglich der Gewichtung $\tilde{\rho}$ ausrechnen (wir verwenden wiederum Normalenvariationen):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} I_M(h) &= \int\limits_M -\langle \mathbf{X} - \tau \boldsymbol{\nu} h, -h\boldsymbol{\nu} \rangle e^{-\frac{|x|^2}{2}} - hHe^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu_M \\ &= \int\limits_M (\langle \mathbf{X}, \boldsymbol{\nu} \rangle - H) h e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu_M. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Die homothetischen Lösungen sind also gerade die stationären Punkte dieses Oberflächenfunktionals. Wir schreiben dieses Oberflächenfunktional wie folgt:

$$\tilde{\rho} d\mu = \tilde{\rho} \sqrt{\det g_{ij}} dx^n = \sqrt{\det \tilde{\rho}^{\frac{2}{n}} g_{ij}} dx^n. \tag{3.7}$$

Wir können eine homothetische Lösung somit auch als eine Minimalfläche in $(\mathbb{R}^{n+1}, e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}} \delta_{ij})$ ansehen. Diese Metrik bezeichnen wir von nun an mit $\overline{g}$. Es gilt dann für eine homothetische Lösung

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} I_M(h) = \frac{\partial}{\partial \tau} \int\limits_M d\tilde{\mu}_{\overline{g}} = -\int\limits_M h\overline{H} d\mu_{\overline{g}} = 0$$

und somit $\overline{H} \equiv 0$ (alle geometrischen Größen bezüglich der Metrik $\overline{g}$ werden wir im folgenden mit einem Querstrich bezeichnen).

3.7 ω-Solitons

In Abschnitt 2.2 hatten wir Evolutionsgleichungen für verschiedene geometrische Größen wie h_{ij}, $|A|^2$, H etc. berechnet. Hier wollen wir nun zeigen, was sich im Falle einer Reskalierung ergibt.
Haben wir homothetische Lösungen für den MKF, so können wir bei Typ1-Singularitäten die Gleichung $H = \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\nu} \rangle$ ausnützen, um Identitäten zwischen geometrischen Größen auf dieser Fläche zu erhalten. Zum Beispiel bekommen wir durch zweimaliges Ableiten und kontrahieren mit g^{ij} (vgl. [Hu3]) die folgende Gleichung:

$$\Delta H = H - H|A|^2 + \langle \mathbf{F}, \nabla H \rangle.$$

Hier wollen wir nun genauer untersuchen, wie man aus den Evolutionsgleichungen einer Größe eine nicht mehr von dem Parameter t explizit abhängende Gleichung herleitet. Natürlich kann dies nur für eine wie auch immer geartete 'selbstähnliche' Bewegung gelten.

Vergleich von Flüssen:
Sei $\boldsymbol{\omega}$ ein in einer Umgebung der Fläche $\mathbf{F}(\mathbf{M}^n)$ gegebenes, glattes Vektorfeld, welches nicht von der Zeit t abhängt. Zum Beispiel könnte $\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{e}_{n+1}$ oder $= \mathbf{X}$ (Positionsvektor in $\mathbb{R}^{n+1}$) sein. Wir wollen den Zusammenhang zwischen den beiden Flüssen

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}_t^1 &= \boldsymbol{\omega} \\ (2) \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}_t^2 &= \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu} \rangle \boldsymbol{\nu} \end{aligned}$$

mit Startfläche $\mathbf{F}_0^1 = \mathbf{F}_0^2 = \mathbf{F}_0(\mathbf{M}^n)$ darstellen. Dabei entspricht der Fluß $\mathbf{F}_t^1$ gerade der Bewegung der Fläche $\mathbf{F}(\mathbf{M}^n)$ entlang der Integralkurven von $\boldsymbol{\omega}$. Ist also $\Psi_t : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ der von T auf $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierte Diffeomorphismus, so gilt $\mathbf{F}_t^1(\mathbf{M}^n)(\mathbf{P}) = \Psi_t(\mathbf{F}_0(\mathbf{M}^n)(\mathbf{P}))$. Solche Flüße nennen wir $\boldsymbol{\omega}$ - Solitons. Im Falle von $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_{n+1}$ ist $\mathbf{F}_t^1$ also eine Translation, im Falle von $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{X}$ eine Homothetie. Der Fluß $\mathbf{F}_t^2$ hat zwar die Eigenschaft, daß das Bild $\mathbf{F}_t^2(\mathbf{M}^n)$ sich ebenfalls wie bei $\mathbf{F}^1$ bewegt, jedoch verschieben sich die Punkte tangential:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{F}_t^1 - \mathbf{F}_t^2) = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^\perp = \boldsymbol{\omega}^\top .$$

Bislang sind wir stets von einem Fluß der Form (2) ausgegangen. Was ist nun der Vorteil von $\mathbf{F}_t^1$? Betrachten wir dazu zunächst den uns bereits bekannten Fall der Homothetie (vgl. Abschnitt 3.6): Wenn wir reskalieren, so bedeutet dies, daß wir den neuen Fluß $\tilde{\mathbf{F}}_t^1 = \Psi_t^{-1} \circ \mathbf{F}_t^1$ betrachten. Er stellt in diesem Fall den konstanten Fluß dar ($\tilde{\mathbf{F}}_t^1(\mathbf{P}) = \Psi_t^{-1} \circ \mathbf{F}_t^1(\mathbf{P}) = \mathbf{F}_0(\mathbf{P})$), d.h. $\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{F}}_t^1 \equiv 0$. Diese Überlegung hängt natürlich nicht von dem speziell gewählten Vektorfeld $\boldsymbol{\omega}$ ab, es kommt nun lediglich darauf an, was man unter dem Begriff 'Reskalieren' im allgemeinen Fall zu verstehen hat.

Definition 3.25 *Unter einer $\boldsymbol{\omega}$-Umparametrisierung einer Mannigfaltigkeit $\tilde{\mathbf{F}}_t^2 = \Psi_t^{-1} \circ \mathbf{F}_t^2$ verstehen wir das Zurückführen dieser Mannigfaltigkeit zu ihrer 'Startfläche' entlang der Integralkurven des Vektorfeldes $\boldsymbol{\omega}$.*

Wir bezeichnen mit $\mathbf{P}(\mathbf{F}_t)$ eine z.B. von dem umgebenden Raum ($\mathbb{R}^{n+1}$) auf $\mathbf{M}^n$ induzierte (geometrische) Tensorgröße. $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{F}_t)$ bezeichne die dazugehörige 'reskalierte' Tensorgröße. Dann erhalten wir insgesamt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,{}^{\omega}\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{F}_t^1 - \mathbf{F}_t^2) \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}(\Psi_t^{-1} \circ \mathbf{F}_t^{-1}) - \frac{\partial}{\partial t}\,{}^{\omega}\tilde{\mathbf{P}}^2 = \mathbf{0} - \frac{\partial}{\partial t}\,{}^{\omega}\tilde{\mathbf{P}}_t^2$$

und andererseits:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,{}^{\omega}\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{F}_t^1 - \mathbf{F}_t^2) \quad = \quad \langle \nabla\tilde{\mathbf{P}}, \boldsymbol{\omega}^{\top}\rangle.$$

Damit haben wir:

Lemma 3.26 *Sei $\mathbf{F}_0(\mathbf{M}^n)$ eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^{n+1}$ und $\boldsymbol{\omega}$ ein in einer Umgebung von $\mathbf{F}_0(\mathbf{M}^n)$ definiertes Vektorfeld. Ferner sei $\mathbf{F}_t$ definiert durch $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}_t = \langle\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}\rangle\boldsymbol{\nu}$ und durch den Startwert $\mathbf{F}_0$. Für die $\boldsymbol{\omega}$ - Umparametrisierung einer auf $\mathbf{F}_t(\mathbf{M}^n)$ induzierten Größe gilt dann:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{P}}_t = -\,\langle \nabla\tilde{\mathbf{P}}, \boldsymbol{\omega}^{\top}\rangle.$$

Wieder wenden wir uns den homothetischen Lösungen zu. In diesem Fall kann man einer geometrischen Größe je nach ihrem Skalierungsverhalten eine Ordnung zuweisen:

Definition 3.27 $\mathbf{P}$ *hat die Ordnung α , falls $\tilde{\mathbf{P}} = (2(T-t))^{-\frac{\alpha}{2}}\mathbf{P}$.*

Die von uns in 3.2 verwendete Reskalierung entspricht für homothetische Lösungen des MKF gerade einer $\boldsymbol{\omega}$ - Umparametrisierung mit $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{X}$. Es gilt dann (vgl. [Hu3]):

Lemma 3.28 *$\mathbf{M}^n$ bewege sich homothetisch unter dem MKF. Wenn $\mathbf{P}$ die Evolutionsgleichung $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P} = \Delta\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ erfüllt und $\mathbf{P}$ die Ordnung α hat, so gilt: $\mathbf{Q}$ hat die Ordnung $\alpha - 2$ und $\tilde{\mathbf{P}}$ erfüllt:*

$$\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\mathbf{P}} = \Delta\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{Q}} + \alpha\tilde{\mathbf{P}}. \qquad \square$$

Korollar 3.29 *Sei $\mathbf{F}_t$ eine homothetische Lösung des MKF.*

$$\tilde{\mathbf{F}}_s := (2(T-t))^{-\frac{1}{2}}\mathbf{F}_t, s(t) = \frac{1}{2}\log(T-t).$$

Erfüllt dann die geometrische Größe $\mathbf{P}$ die Evolutionsgleichung $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P} = \Delta\mathbf{P} + \mathbf{Q}$, dann gilt nach der Reskalierung:

$$\langle \nabla\tilde{\mathbf{P}}, \boldsymbol{\omega}^{\top}\rangle = \Delta\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{Q}} + \alpha\tilde{\mathbf{P}}.$$

Beispiele:
(1) Mittlere Krümmung: Wir hatten $\frac{\partial}{\partial t}H = \Delta H + |A|^2 H$ berechnet (Kapitel 2). Für die reskalierte Größe gilt somit $\frac{\partial}{\partial s}\tilde{H} = \Delta\tilde{H} + |\tilde{A}|^2\tilde{H} - \tilde{H}$. Folglich:

$$\Delta\tilde{H} = \tilde{H} - |\tilde{A}|^2\tilde{H} + \langle \mathbf{X}, \nabla\tilde{H}\rangle. \tag{3.8}$$

(2) Quadrat der zweiten Fundamentalform: Aus $\frac{\partial}{\partial t}|A|^2 = \Delta|A|^2 + 2|A|^4 - |\nabla A|^2$ folgt $\frac{\partial}{\partial s}|\tilde{A}|^2 = \Delta|\tilde{A}|^2 + 2|\tilde{A}|^2 - 2|\tilde{A}|^4 - 2|\nabla\tilde{A}|^2$ und somit:

$$\Delta|\tilde{A}|^2 = 2|\nabla\tilde{A}|^2 + 2|\tilde{A}|^2 - 2|\tilde{A}|^4 + \langle \mathbf{X}, \nabla|\tilde{A}|^2\rangle.$$

Bemerkung: Für eine skalierungsinvariante Größe ($\alpha = 0$) fällt der Term $\alpha\tilde{\mathbf{P}}$ weg, und man muß lediglich $\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{P}}$ durch $\langle -\boldsymbol{\omega}, \nabla\tilde{\mathbf{P}}\rangle$ ersetzen.
Dies trifft für den Quotienten $\frac{|A|^2}{H^2}$ zu. Wir berechnen im Hinblick auf 4.2 auch hierfür die im homothetischen Fall gültige Gleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^2}\Big) &= \frac{\frac{\partial}{\partial s}|\tilde{A}|^2\ \tilde{H}^2 - \frac{\partial}{\partial s}\tilde{H}^2\ |\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^4} \\
&= \frac{(\Delta|\tilde{A}|^2 + 2|\tilde{A}|^2 - 2|\tilde{A}|^4 - 2|\nabla\tilde{A}|^2)\ \tilde{H}^2 - 2\tilde{H}(\Delta\tilde{H} + |\tilde{A}|^2\tilde{H} - \tilde{H})\ |\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^4} \\
&= \frac{\Delta|\tilde{A}|^2\tilde{H}^2 - |\tilde{A}|^2\Delta\tilde{H}^2 + 2|\nabla\tilde{H}|^2}{\tilde{H}^4} - \frac{|\nabla\tilde{A}|^2\tilde{H}^2}{\tilde{H}^4} \\
&= \Delta\Big(\frac{|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^2}\Big) + 4\Big\langle\frac{\nabla\tilde{H}}{\tilde{H}}, \nabla\Big(\frac{|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^2}\Big)\Big\rangle + 2\frac{|\nabla\tilde{H}|^2}{\tilde{H}^4} - \frac{|\nabla\tilde{A}|^2\tilde{H}^2}{\tilde{H}^4} \\
&= \Delta\Big(\frac{|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^2}\Big) + 2\Big\langle\frac{\nabla\tilde{H}}{\tilde{H}}, \nabla\Big(\frac{|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^2}\Big)\Big\rangle \\
&\qquad -\Big\{2\frac{|\nabla\tilde{H}|^2|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^4} + 2\frac{|\nabla\tilde{A}|^2\tilde{H}^2}{\tilde{H}^4} - \frac{\langle\nabla\tilde{H}^2, \nabla|\tilde{A}|^2\rangle}{\tilde{H}^4}\Big\} \\
&= \Delta\Big(\frac{|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^2}\Big) + 2\Big\langle\frac{\nabla\tilde{H}}{\tilde{H}}, \nabla\Big(\frac{|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^2}\Big)\Big\rangle \\
&\qquad -\frac{2}{\tilde{H}^4}\{\langle\nabla\tilde{H}\tilde{A}, \nabla\tilde{H}\tilde{A}\rangle + \langle\nabla\tilde{A}\tilde{H}, \nabla\tilde{A}\tilde{H}\rangle - 2\langle\tilde{H}\nabla\tilde{H}, \tilde{A}\nabla\tilde{A}\rangle\} \\
&= \Delta\Big(\frac{|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^2}\Big) + 2\Big\langle\frac{\nabla\tilde{H}}{\tilde{H}}, \nabla\Big(\frac{|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^2}\Big)\Big\rangle - \frac{2}{\tilde{H}^4}|\nabla_l\tilde{H}\tilde{h}_{ij} - \nabla_l\tilde{h}_{ij}\tilde{H}|^2.
\end{aligned}$$

Lemma 3.30 *Für eine sich unter dem MKF bewegende homothetische Lösung gilt:*

$$\Delta\Big(\frac{|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^2}\Big) = \frac{2}{\tilde{H}^4}|\nabla_l\tilde{H}\tilde{h}_{ij} - \nabla_l\tilde{h}_{ij}\tilde{H}|^2 - 2\Big\langle\frac{\nabla\tilde{H}}{\tilde{H}}, \nabla\Big(\frac{|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^2}\Big)\Big\rangle + \Big\langle\mathbf{X}, \nabla\Big(\frac{|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^2}\Big)\Big\rangle$$

(vgl. [Hu1]). Durch eine einfache Abschätzung läßt sich der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung nochmals mit dem Quotienten in Verbindung bringen.

Korollar 3.31 *Für die Krümmungsgröße $|\tilde{A}|^2/\tilde{H}^2$ gilt*

$$\Delta\Big(\frac{|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^2}\Big) \ \geq\ \frac{1}{2\big(\frac{|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^2}\big)}\Big|\nabla\Big(\frac{|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^2}\Big)\Big|^2 + \Big\langle\mathbf{X} - \nabla\log(\tilde{H}^2), \nabla\Big(\frac{|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^2}\Big)\Big\rangle.$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
|\nabla(\frac{|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^2})|^2 &= |\frac{1}{\tilde{H}^2}\nabla_i|\tilde{A}|^2 - \frac{2|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^3}\nabla_i\tilde{H}|^2 \\
&= \frac{1}{\tilde{H}^4}|\nabla_i|\tilde{A}|^2|^2 + \frac{4|\tilde{A}|^4}{\tilde{H}^6}|\nabla_i\tilde{H}|^2 - \frac{2|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^5}\nabla_i|\tilde{A}|^2\nabla_i\tilde{H} \\
&= \frac{1}{\tilde{H}^6}(\tilde{H}^2|\nabla|\tilde{A}|^2|^2 + 4|\tilde{A}|^4|\nabla\tilde{H}|^2 - 4\tilde{H}|\tilde{A}|^2\nabla_i|\tilde{A}|^2\nabla_i\tilde{H}) \\
&\overset{\text{AnhangA}}{\leq} \frac{4|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^6}(\tilde{H}^2|\nabla\tilde{A}|^2 + |\tilde{A}|^2|\nabla\tilde{H}|^2 - \langle\nabla|\tilde{A}|^2, \nabla\tilde{H}\rangle) \\
&= 2(\frac{|\tilde{A}|^2}{\tilde{H}^2})\frac{2}{\tilde{H}^4}|\tilde{h}_{ij}\nabla_l\tilde{H} - \nabla_l\tilde{h}_{ij}\tilde{H}|^2. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Kapitel 4

Beispiele

Wir geben in diesem Kapitel eine Zusammenstellung einiger Ergebnisse über spezielle Beispiele von homothetischen Lösungen des MKF, für welche die Existenz bewiesen ist. Diese stammen aus den Arbeiten [An1], [AL], [Hu3], [Mu].

4.1 Mullin-Abresch-Langer-Kurven

In den Arbeiten von Mullin [Mu] und Abresch/Langer [AL] wird das folgende Klassifikationsresultat bewiesen:

Theorem 4.1 *Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene (in Bogenlänge parametrisierte) Kurve, welche eine homothetische Lösung des MKF darstellt. Dann ist γ entweder ein m-fach überdeckter Kreis γ_m, oder γ gehört zu einer Zwei-Parameter-Familie transzendenter Kurven $\gamma_{m,n}$ der folgenden Gestalt:*

1. *Die Krümmungsfunktion der Kurve $\gamma_{m,n}$, $k(\gamma_{m,n})$, ist eine periodische Funktion mit* **n Perioden** bei einem Durchlauf von $\gamma_{m,n}$.
2. *Der* **Index** *von γ $ind(\gamma_{m,n})$, d.h. die Anzahl der Dre-. hungen des Tangenten-/Normalenvektors, ist gleich* **m**

Beweis: $\mathbf{F}(s)$ sei der Positionsvektor der Kurve, $\mathbf{t}(s)$ der Tangentenvektor, und $\mathbf{n}(s)$ der Normalenvektor an die Kurve $\gamma_{m,n}$. Es gilt $\frac{d\Theta}{ds} = k_\gamma$. Die Darboux-Gleichungen lauten dann

$$\frac{\partial}{\partial s}\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k_\gamma \\ k_\gamma & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial \Theta}\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\frac{d\Theta}{ds} = k_\gamma$. Θ sei der Winkel zwischen $\mathbf{n}(s)$ und $\mathbf{n}(0)$. Man betrachtet nun allgemeiner den Fluß $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F} = -k\mathbf{n} + \beta\mathbf{t}$. Der Term $\beta\mathbf{t}$ induziert lediglich einen Diffeomorphismus auf γ selbst (welcher die Geometrie nicht ändert), wobei β so gewählt werden kann, daß $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F} = -\alpha(t)\mathbf{F}_0$ gilt, denn es handelt sich um eine homothetische Lösung des MKF. Da es uns auf die geometrische Form und nicht auf die Größe von γ ankommt, wählen wir t_0 oBdA so, daß $\alpha(t_0) = 1$ gilt. Für $t = t_0$ erhalten wir dann

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \;=\; \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \alpha = -\langle -\alpha \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle = -\langle -k\mathbf{n} + \beta \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = k.$$

Zu diesem Zeitpunkt gilt dann in den Punkten $k \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Theta} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle &= \langle \frac{\partial}{\partial \Theta} \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{F}, \frac{\partial}{\partial \Theta} \mathbf{n} \rangle = \frac{\partial s}{\partial \Theta} (\langle \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{F}, \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{n} \rangle) \\ &= \frac{1}{k} (\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{F}, k\mathbf{t} \rangle) = \langle \mathbf{F}, \mathbf{t} \rangle \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} k &= \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial \Theta} \mathbf{F}, \mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{F}, \frac{\partial}{\partial \Theta} \mathbf{t} \rangle \\ &= \frac{1}{k} - \langle \mathbf{F}, \frac{1}{k} k \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{k} - \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{k} - k. \end{aligned}$$

Multipliziert man nun diese Gleichung mit $2\frac{\partial}{\partial \Theta} k$, so erhält man

$$2 \frac{\partial}{\partial \Theta} k \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} k \;=\; -2k \frac{\partial}{\partial \Theta} k + \frac{2}{k} \frac{\partial}{\partial \Theta} k,$$

d.h.

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} ((\frac{\partial}{\partial \Theta} k)^2) \;=\; \frac{\partial}{\partial \Theta} (-k^2 + \log k^2).$$

Durch Integrieren folgt

$$(\frac{\partial}{\partial \Theta} k)^2 + (k^2 - log k^2) \;=\; E \;=\; \text{konstant}.$$

Mit dem Potential $U(k) := k^2 - \log k^2$ ist dies eine Energiegleichung für die Krümmung k_γ.
Für $k \neq 0$ ist U strikt konvex, und man erhält eine periodische Bewegung von k_γ bezüglich des Winkels Θ ($(\frac{\partial}{\partial \Theta} k)^2 \geq 0 \Rightarrow U(k) \geq E$, $\frac{\partial}{\partial \Theta} k = 0 \Leftrightarrow U(k) = E$. Da $\frac{\partial}{\partial \Theta} k$ stetig ist, erhält man als einzige Umkehrpunkte k_{max} und k_{min}). Es gilt also

$$k(\Theta) = k(\Theta + \Theta_0).$$

Ferner folgt aus der Symmetrie des Phasenportraits $(\frac{\partial}{\partial \Theta} k = \pm \sqrt{E - U(k)})$ die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} k(\overline{\Theta} + \theta) = \frac{\partial}{\partial \Theta} k(\overline{\Theta} - \theta)$$

für $\overline{\Theta}$ mit $k(\overline{\Theta}) = k_{max}/k_{min}$. Durch Integrieren folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung des AWP

$$\frac{\partial}{\partial\theta}k = k(\overline{\Theta} - \theta),\ k(\overline{\Theta}) = k_{max}/k_{min} \quad \text{die Gleichung} \quad k(\overline{\Theta} + \theta) = k(\overline{\Theta} - \theta).$$

(vgl. z.B. [Co]; u.a. ergibt sich durch Trennung der Variablen $\Theta(k) := \Theta(k_{max}) + \int_{k_{min}}^{k_{max}} \frac{dk}{\sqrt{E-U(k)}}$)
Wir betrachten die Normalen in Punkten, in denen k_γ sein Maximum annimmt. Entweder sind die Normalen dann parallel. Dann müssen diese bereits zu einer einzigen Geraden zusammenfallen. Dies bedeutet, daß sich die Kurve γ nach einer Periode schließt. Und da die einzige eingebettete, konvexe, homothetische Lösung des MKF der Kreis ist, erhalten wir die Kurven γ_m. Denn andernfalls, wenn die Normalen nicht zusammenfallen (Abstand $d > 0$), erhalten wir durch Spiegeln an diesen Normalen den jeweils nächsten Bogen von γ, in welchem eine halbe Periode der Krümmung durchlaufen wird. Der Endpunkt des nächsten Bogens ist $2d$ von dem Startpunkt des vorherigen Bogens entfernt. Stück für Stück erhalten wir so eine Kurve, welche in keiner kompakten Menge enthalten sein kann, also im Widerspruch zur Voraussetzung selbst nicht kompakt ist.
Im anderen Falle betrachten wir zwei aufeinanderfolgende Maxima der Krümmung k_γ. Die Tangenten haben nun einen Schnittpunkt. OBdA sei dies der Ursprung $\mathbf{0}$. Da die Krümmungsfunktion k_γ periodisch ist, bleibt dieser Schnittpunkt für alle Normalen durch die Punkte $\mathbf{P}$ mit $k(\mathbf{P}) = k_{max}$ gleich. Nun gibt es weiter zwei Möglichkeiten für den Winkel α zwischen den Normalen:
1. der Wert $x := \alpha/2\pi$ ist irrational; die Kurve γ schließt sich dann nicht, d.h. γ ist nicht kompakt. Wiederspruch! Oder
2. der Wert $x := \alpha/2\pi$ ist rational, dann schließt sich die Kurve γ nach n Perioden der Krümmungsfunktion k_γ, und man erhält (mit dem Satz von Gauß-Bonnet):

$$\mathrm{Ind}(\gamma) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_\gamma k ds = \frac{1}{2\pi}\angle(\mathbf{t}(0), \mathbf{t}(L)) = \frac{1}{2\pi}2\pi m = m$$

□

Bemerkung: Abresch und Langer zeigen ferner, daß

$$\Theta(E) \quad := \quad \int_{k_{min}}^{k_{max}} \frac{dk}{\sqrt{E - U(k)}}$$

eine strikt monoton fallende Funktion der 'Energie E' ist und Werte in $(\pi, \frac{\pi}{\sqrt{2}})$ hat.

4.2 Homothetische Lösungen mit $H \geq 0$

In Abschnitt 3.5 hatten wir für Typ1-Singularitäten nach einer Reskalierung 'Grenzflächen' erhalten. In [Hu4] beweist Huisken nun folgende Klassifikation solcher schrumpfenden homothetischen Lösungen des MKF mit $H \geq 0$.

Theorem 4.2 *Sei $\mathbf{M}^n$ eine glatte Grenzfläche (s. Abschnitt 3.5) einer Typ1-Singularität, welche dann der Gleichung $H = \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\nu} \rangle$ genügt. Ferner sei $H \geq 0$, dann ist $\mathbf{M}^n$ eine der folgenden Flächen:*

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \mathbf{S}^n \quad (\text{ mit Radius } \sqrt{n}) \\
(2) & \mathbf{S}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \\
(3) & \Gamma \times \mathbb{R}^{n-1},
\end{array}
$$

wobei Γ eine der Kurven aus Abschnitt 4.1, Fall (3), *in $\mathbb{R}^2$ ist.*

Beweis: Sei $\{\mathbf{e}_i\}$ ein orthonormales n-Bein des Tangentialraumes $T_\mathbf{P}\mathbf{M}^n$, $\boldsymbol{\nu}$ der Normalenvektor, so daß $\mathbf{H} = -\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\nu} \rangle \boldsymbol{\nu}$ gilt. Aus $H = \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\nu} \rangle$ folgt nun (vgl. 3.7)

$$
\begin{aligned}
\Delta H &= H - H|A|^2 + \langle \mathbf{X}, \nabla H \rangle \qquad \text{und} \\
\Delta(\frac{|A|^2}{H^2}) &= \frac{2}{H^4}|h_{ij}\nabla_l H - \nabla_l h_{ij} H|^2 + \langle \mathbf{X} - \frac{2\nabla H}{H}, \nabla(\frac{|A|^2}{H^2}) \rangle
\end{aligned}
$$

Mit dem Starken Maximumprinzip ergibt sich, daß entweder $H > 0$ oder $H \equiv 0$. Der Fall $h \equiv 0$ kann für eine kompakte Startfläche nicht eintreten. Wir können also $H > 0$ annehmen. Die zweite Differentialgleichung liefert mit $\rho := e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ dann

$$
\begin{aligned}
\int_M |\nabla(\frac{|A|^2}{H^2})|^2 \rho d\mu &= -\int_M \nabla_i((\nabla_i \frac{|A|^2}{H^2})\rho) \frac{|A|^2}{H^2} d\mu \\
&= -\int_M \frac{|A|^2}{H^2}\rho\Delta(\frac{|A|^2}{H^2}) + \frac{|A|^2}{H^2}\nabla_i(\frac{|A|^2}{H^2})\nabla_i\rho \, d\mu \\
&= \int_M \frac{1}{H^2}\{\langle \mathbf{X}, \nabla(\frac{|A|^2}{H^2}) \rangle - \Delta(\frac{|A|^2}{H^2})\}|A|^2\rho \, d\mu.
\end{aligned}
$$

Es sei darauf hingewiesen, daß hier eventuell Probleme für die Konvergenz dieser Integrale auftreten können (z.B. falls $1/H^2 \to \infty$ zu schnell divergiert). Andrew Stone konnte jedoch zeigen, daß dieser Beweis mit einer leichten Modifikation dennoch funktioniert.
Wir haben ferner

$$
\begin{aligned}
-\int_M \nabla_i(|A|^2\rho)\nabla_i(\frac{|A|^2}{H^2}) \, d\mu &= -\int_M \nabla_i(|A|^2)\rho\nabla_i(\frac{|A|^2}{H^2}) \, d\mu \\
&\quad - \int_M |A|^2\nabla_i(\rho)\nabla_i(\frac{|A|^2}{H^2}) \, d\mu \\
\text{bzw.} \qquad &= \int_M |A|^2\rho(\frac{2}{H^4}|h_{ij}\nabla_l H - \nabla_l h_{ij} H|^2 \\
&\quad + \langle \mathbf{X} - \frac{2\nabla H}{H}, \nabla(\frac{|A|^2}{H^2}) \rangle) \, d\mu.
\end{aligned}
$$

Mit $\nabla_i \rho = -\mathbf{X}^\top \rho$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_M |A|^2 \rho (\frac{2}{H^4} |h_{ij} \nabla_l H - \nabla_l h_{ij} H|^2 \quad &= \\ - \int_M \nabla_i |A|^2 \rho \nabla_i (\frac{|A|^2}{H^2})\, d\mu \quad &+ \quad \langle \frac{2\nabla H}{H}, \nabla(\frac{|A|^2}{H^2}) \rangle\,)\, d\mu\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_M \rho H^2 |\nabla (\frac{|A|^2}{H^2})|^2 \, d\mu &= \int_M \rho H^2 (\frac{H^2 \nabla_i |A|^2 - |A|^2 \nabla_i H^2}{H^4}) \nabla_i (\frac{|A|^2}{H^2})\, d\mu \\ &= -\int_M -\rho \nabla_i |A|^2 \nabla_i (\frac{|A|^2}{H^2}) + \rho (\frac{|A|^2 \nabla_i H^2}{H^2}) \nabla_i (\frac{|A|^2}{H^2})\, d\mu \\ &= -\int_M -\rho \nabla_i |A|^2 \nabla_i (\frac{|A|^2}{H^2}) + \rho |A|^2 \langle \frac{\nabla H^2}{H^2}, \nabla (\frac{|A|^2}{H^2}) \rangle \, d\mu \\ &= -\int_M |A|^2 \rho \frac{2}{H^4} |h_{ij} \nabla_l H - \nabla_l h_{ij} H|^2 \, d\mu.\end{aligned}$$

Da beide Terme positiv sind, kann diese Gleichung nur gültig sein für

$$\int_M |\nabla (\frac{|A|^2}{H^2})|^2 H^2 \rho d\mu \quad = \quad \int_M \frac{|A|^2}{H^4} |h_{ij} \nabla_k H - \nabla_i h_{jk} H|^2 \rho d\mu = 0$$

woraus $\frac{|A|^2}{H^2} =$ konstant, und $|\nabla_i h_{jk} H - h_{jk} \nabla_i H|^2 \equiv 0$ auf $\mathbf{M}^n$ folgt. Definieren wir $M_{ijk} := h_{ij} \nabla_k H - \nabla_k h_{ij} H$, so ist $|M_{ijk}|^2$ gleich Null. Eine einfache Rechnung zeigt, daß allgemein für den symmetrischen bzw. den antisymmetrischen Anteil ($T_{(ij)}$ bzw. $T_{[ij]}$) eines Zweitensors T_{ij} gilt:

$$|T_{ij}|^2 \quad = \quad |T_{[ij]}|^2 + |T_{(ij)}|^2.$$

Hieraus folgt für M_{ijk}, daß $|M_{i[jk]}|^2 = |M_{i(jk)}|^2 = 0$ (für alle i). Wegen der Codazzi-Gleichungen ist

$$M_{i[jl]} = \frac{1}{2}((h_{ij} \nabla_l H - \nabla_l h_{ij} H) - (h_{il} \nabla_j H - \nabla_j h_{il} H)) = \frac{1}{2}(h_{ij} \nabla_l H - h_{il} \nabla_j H)$$

und damit

$$|M_{i[jl]}|^2 = \frac{1}{4} |h_{ij} \nabla_l H - h_{il} \nabla_j H|^2 = 0.$$

Wählen wir nun die Basis $\{\mathbf{e}_i\}$ so daß $\mathbf{e}_1 \parallel \nabla H$ gilt, so folgt

$$\begin{aligned}|h_{ij} \nabla_l H - h_{il} \nabla_j H|^2 &= (h_{ij})^2 (\nabla_l H)^2 + (h_{il})^2 (\nabla_j H)^2 - 2 h_{il} \nabla_j H h_{ij} \nabla_l H \\ &= 2|A|^2 |\nabla H|^2 - 2 h_{i1} \nabla_1 H h_{i1} \nabla_1 H \\ &= 2 |\nabla H|^2 (|A|^2 - \sum_{i=1}^n |h_{i1}|^2) \stackrel{!}{=} 0.\end{aligned}$$

Ist $|\nabla H|^2 = 0$ auf ganz $\mathbf{M}^n$, dann ist bekannt, daß $\mathbf{M}^n$ eine Sphäre ist. Gibt es im Gegensatz dazu einen Punkt P_0 mit $|A|^2 = \sum_{i=1}^n |h_{i1}|^2$, dann folgt mit

$$|A|^2 = h_{11}^2 + 2\sum_{i=2}^n h_{1i}^2 + \sum_{i,j=1, i\neq j}^n h_{ij}^2,$$

daß für alle Indexpaare $(i,j) \neq (1,1)$ $h_{ij} = 0$ ist, also $|A|^2 = H^2$ in P_0. Da $|A|^2 = \alpha H^2$ für eine Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt, erhält man $|A|^2 = H^2$ auf ganz $\mathbf{M}^n$. Hat nun $\mathbf{M}^n$ keinen Rand und ist kompakt, so besagt der Satz von Stokes, daß $\int_M \Delta H d\mu_M = 0$, was mit Gleichung 3.8 und dem obigen

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M H - H|A|^2 + \langle \mathbf{X}, \nabla H\rangle d\mu_M \\ &= \int_M H - H^3 + \langle \mathbf{X}, \nabla H\rangle d\mu_M \end{aligned}$$

ergibt. Wir berechnen nun den letzten Term in dieser Gleichung:

$$\begin{aligned} \int_M \langle \mathbf{X}, \nabla H\rangle d\mu_M &= \int_M \langle \mathbf{X}, \mathbf{e}_i\rangle \nabla_{\mathbf{e}_i} H d\mu_M \\ &= -\int_M \nabla_{\mathbf{e}_i}(\langle \mathbf{X}, \mathbf{e}_i\rangle) H d\mu_M \\ &= -\int_M (\langle \nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{X}, \mathbf{e}_i\rangle + \langle \mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_i\rangle) H d\mu_M \\ &= -\int_M (\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i\rangle + \langle \mathbf{X}, \mathbf{H}\rangle) H d\mu_M \\ &= \int_M H^3 - nH\, d\mu_M. \end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich damit

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M H - H^3 + H^3 - nH d\mu_M \\ 0 &= (1-n)\int_M H\, d\mu_M. \end{aligned}$$

Dies ist wegen $H > 0$ nicht möglich. Es kann also nur die Sphäre im kompakten Fall auft reten.
Im allgemeinen Fall betrachten wir eine kleine Umgebung eines Punktes $\mathbf{P}_0$, in welchem $\nabla H \neq 0$ gilt. Da alle Lösungen des MKF als Lösungen einer parabolischen Gleichung analytisch sind, genügt es zu zeigen, daß $\mathbf{M}^n$ lokal eine der obigen Flächen ist.
Sei $E := \{\mathbf{X} \in T_\mathbf{P}\mathbf{M}^n | A\mathbf{X} = H\mathbf{X}\}$ die Distribution der Eigenräume von A zum Eigenwert H sowie $K := \{\mathbf{X} \in T_\mathbf{P}\mathbf{M}^n | A\mathbf{X} = 0\}$ die Distribution der Kerne von A. Die Dimension von E ist wegen $|A|^2 = H^2 = h_{11}$ auf ganz $\mathbf{M}^n$ immer gleich 1 und diejenige von K dadurch gleich $n-1$. Sei $\mathbf{X}_{\mathbf{P}_0} \in E$ und $\gamma(\tau)$ eine beliebige

Kurve in $\mathbf{M}^n$ mit $\gamma(0) = \mathbf{P}_0$ und Tangentenvektor $\mathbf{t}(\tau)$. Für das Vektorfeld, welches aus $\mathbf{X}$ durch Paralleltransport entsteht, schreiben wir $\overline{\mathbf{X}}(\tau)$. Die Gleichung $|M_{ijk}|^2 = 0$ besagt gerade $|\nabla AH - \nabla HA|^2 \equiv 0$, d.h.

$$\nabla A = \frac{\nabla H}{H} A.$$

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau}|A\mathbf{X} - H\mathbf{X}|^2 &= 2\langle \frac{D}{\partial \tau}(A\mathbf{X} - H\mathbf{X}),\, A\mathbf{X} - H\mathbf{X}\rangle \\
&= 2\langle \frac{D}{\partial \tau}(A - H\mathrm{id})\mathbf{X} + (A - H\,\mathrm{id})\underbrace{\frac{D}{\partial \tau}\mathbf{X}}_{=0}, A\mathbf{X} - H\mathbf{X}\rangle \\
&= 2\langle (\frac{\frac{D}{\partial \tau}H}{H}A - \frac{\frac{D}{\partial \tau}H}{H}H\mathrm{id})\mathbf{X}, A\mathbf{X} - H\mathbf{X}\rangle \\
&= 2\frac{D}{\partial \tau}\log(H)|A\mathbf{X} - H\mathbf{X}|^2.
\end{aligned}$$

Es ist $H > 0$, und wir können uns auf eine kompakte Umgebung U von P_0 zurückziehen, d.h. $H \geq \epsilon > 0$. Ferner ist H stetig differenzierbar, woraus folgt, daß ∇H sein Maximum in der Umgebung U von P_0 annimmt. Damit können wir $\frac{D}{\partial \tau}\log(H)$ als beschränkt annehmen: $\frac{D}{\partial \tau}\log(H) = \frac{\frac{D}{\partial \tau}H}{H} < C_0 < \infty$ für eine Konstante $C_0 \in \mathbb{R}$. Das Lemma von Gromwall

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t) \leq \alpha + \beta f(t) \Rightarrow F(t) \leq \alpha e^{\beta t}$$

besagt im Falle $\alpha = 0$, daß $f = |A\mathbf{X} - H\mathbf{X}|^2 \equiv 0$. Also ist $A\mathbf{X} = H\mathbf{X}$ auf γ, so daß $\overline{\mathbf{X}}(\tau)$ in E verbleibt. Wählen wir für γ nun die der Integrallinie von $\overline{\mathbf{X}}(\tau)$ entsprechende Geodäte, so ist

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{X} \;=\; \nabla_{\alpha\mathbf{t}}\alpha\mathbf{t} = \nabla_{\alpha\mathbf{t}}(\alpha)\mathbf{t} + \alpha^2\nabla_{\mathbf{t}}\mathbf{t} = \nabla_{\alpha\mathbf{t}}(\alpha)\mathbf{t} \in E.$$

Seien $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ zwei Vektorfelder aus E, so gilt hierfür

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} &= \nabla_{\alpha\mathbf{t}}\,\beta\mathbf{t} = \nabla_{\alpha\mathbf{t}}\,(\beta)\mathbf{t} + \alpha\beta\nabla_{\mathbf{t}}\,\mathbf{t} = \nabla_{\alpha\mathbf{t}}\,(\beta)\mathbf{t} \in E \text{ und} \\
\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} &= \nabla_{\beta\mathbf{t}}\,\alpha\mathbf{t} = \nabla_{\beta\mathbf{t}}\,(\alpha)\mathbf{t} + \beta\alpha\nabla_{\mathbf{t}}\,\mathbf{t} = \nabla_{\beta\mathbf{t}}\,(\alpha)\mathbf{t} \in E.
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich daraus für die Lie-Klammer

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} \in E.$$

Wird $\mathbf{X} \in K$ parallel verschoben, so ist $A\overline{\mathbf{X}}(0) = 0$ und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau}|A\mathbf{X}|^2 &= 2\langle \frac{D}{\partial \tau}(A\mathbf{X}), A\mathbf{X}\rangle = 2\langle \frac{D}{\partial \tau}(A)\mathbf{X} + A\underbrace{\frac{D}{\partial \tau}\mathbf{X}}_{=0},\, A\mathbf{X}\rangle \\
&= 2\langle \frac{\frac{D}{\partial \tau}H}{H}A\mathbf{X},\, A\mathbf{X}\rangle = 2\frac{\frac{D}{\partial \tau}H}{H}|A\mathbf{X}|^2,
\end{aligned}$$

woraus wir mit derselben Argumentation wie oben $A\mathbf{X}(\tau)=0$ auf ganz γ folgern. Wir wählen die Koordinaten so, daß im Punkte P_0 für $\{\mathbf{e}_i\}$ $\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_j(P_0)=0$ gilt, und $\mathbf{e}_0$ in E liegt. Wir wollen die Ableitung $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ berechnen. Dazu wählen wir für γ wiederum die Integralkurve von $\mathbf{X}$ - in Bogenlänge parametrisiert. Ferner kann man zusätzlich annehmen, daß die $\mathbf{e}_i$ entlang dieser Kurve parallel verschoben sind, also $\nabla_{\widehat{\mathbf{X}}}\mathbf{e}_i=0$ gilt. Für die Ableitungen erhalten wir dann

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \;=\; \nabla_{\mathbf{X}}(y_i\mathbf{e}_i)=\nabla_{\mathbf{X}}(y_i)\,\mathbf{e}_i+(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{e}_i)y_i=\nabla_{\mathbf{X}}(y_i)\,\mathbf{e}_i\in K.$$

Analog folgt, daß $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}\in K$. Und zusammen ergibt sich daraus für die Lie-Klammer wieder

$$[\mathbf{X},\mathbf{Y}]=\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}-\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}\in K.$$

Der Punkt P_0 war beliebig gewählt, so daß die obigen Gleichungen auf ganz $\mathbf{M}^n$ gelten. Der Satz von Frobenius besagt nun, daß wir ein Koordinatensystem finden können, so daß

(1) $P_0=0$

(2) die Integralkurven von E, die wir mit $\overline{E}$ bezeichnen wollen gerade die Koordinatenkurven $y_1=$ beliebig $y_2=\overline{y_2}, y_3=\overline{y_3},\ldots y_n=\overline{y_n}$ sind, und

(3) die Integralflächen von K, $\overline{K}$ die Form

$$\overline{K}=\overline{y_1}\times\mathbf{R}^{\mathrm{n}-1}=\{(\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2,\ldots,\mathrm{y}_\mathrm{n})|\,\mathrm{y}_1=\overline{\mathrm{y}_1}\}$$

haben.

Es ergibt sich, daß $\mathbf{M}^n$ lokal isometrisch zu $\overline{E}\times\overline{K}$ ist, denn da die Tangentialteilräume E und K immer orthogonal sind, ist die Metrik in den obigen Koordinaten

$$g_{ij} \;=\; \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{ij}|_K \end{pmatrix}.$$

Verschiebt man eine Orthonormalbasis eines Tangentialraumes im Punkte P_1 parallel in den Tangentialraum im Punkte P_0, so erhält man eine Orthonormalbasis von $T_{\mathbf{P}_0}\mathbf{M}^n$, was die Isometrie zeigt. Mit $A|_{E(P_0)}\equiv 0$ folgt $E(P_0)=\mathbb{R}^{n-1}$. Und auf $K(P_0)$ gilt

$$\nabla_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_1=-H\boldsymbol{\nu}\quad\text{sowie}\quad\nabla_{\mathbf{e}_1}\boldsymbol{\nu}=h_{1l}\mathbf{e}_l=H\mathbf{e}_1.$$

Also liegt die Kurve in der von $\boldsymbol{\nu}$ und $\mathbf{e}_1$ aufgespannten Ebene $\mathcal{P}$. Dort gilt mit

$$\langle\mathbf{x},\boldsymbol{\nu}\rangle \;=\; \langle\mathbf{X}^{\mathcal{P}},\boldsymbol{\nu}\rangle \qquad\qquad (\boldsymbol{\nu}\in\mathcal{P}),$$

daß $H=\langle\mathbf{x},\boldsymbol{\nu}\rangle$. Die (reskalierte) Monotonieformel (vgl. 3.8) zeigt nun, daß auch der reskalierte Volumeninhalt beschränkt ist. In einer kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$ (dort gilt $\tilde{\rho}>\delta>0$) hat die gegebene Hyperfläche nur ein endliches Volumen, d.h. die Kurve hat endliche Länge und muß daher geschlossen sein. Wir erhalten also in dieser Ebene $\mathcal{P}$ die Kurven aus Abschnitt 4.1, Fall (3). $\square$

4.3 Rotationsflächen

Aus Kapitel 3 ist bekannt, daß homothetische Lösungen des MKF gerade die Minimalflächen in $(\mathbb{R}^{n+1}, e^{-\frac{|x|^2}{2}}\delta_{ij})$ sind. Im rotationssymmetrischen Fall kann man dies weiter umformulieren: Wir betrachten Rotationsflächen

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^n = \mathbf{S}^{n-1} \times (a,b) & \qquad \text{mit Einbettungen der Form} \\ \mathbf{F}: \mathbf{M}^n \to \mathbb{R}^{n+1}, & \qquad \mathbf{F}(\mathbf{e}, s) = x(s)\mathbf{d}_0 + y(s)\mathbf{d}. \end{aligned}$$

Dabei ist $\mathbf{d}_0$ ein Einheitsvektor des $\mathbb{R}^{n+1}$, welcher die Richtung der Rotationsachse festlegt. $\mathbf{d}$ ist der Einheitsvektor in die Richtung der Projektion des Positionsvektors $\mathbf{F}$ auf die zu $\mathbf{d}_0$ orthogonale Ebene.
Offenbar genügt es nun, die Kurve $\gamma(s) = (x(S), y(s)) \subseteq \mathbb{R}^2$ zu verstehen, um eine vollständige Beschreibung der Fläche $\mathbf{M}^n$ zu erhalten. Welche Eigenschaften muß $\gamma(s)$ haben, um eine homothetische Lösung des MKF darzustellen? Dazu betrachten wir noch einmal das Oberflächenelement von $\mathbf{M}^n$ in der Metrik $\overline{g}$. Unter Verwendung des Satzes von Fubini (Cavalierisches Prinzip) erhält man:

$$\begin{aligned} \int_M d\mu_{\overline{g}} &= \int\limits_{(a,b)} \int\limits_{B^{n-1}_{y(s)}(x(s))} e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu_{B^{n-1}_{y(s)}(x(s))}\, d\mu_{\Gamma_\gamma} \\ &= \int\limits_{(a,b)} y(s)^{n-1} \int\limits_{B^{n-1}_1(x(s))} e^{-\frac{x(s)^2+y(s)^2}{2}} d\mu_{B_1} d\mu_{\Gamma_\gamma} \\ &= \int\limits_{(a,b)} y(s)^{n-1} e^{-\frac{x(s)^2+y(s)^2}{2}} \int\limits_{B^{n-1}_1(x(s))} d\mu_{B_1} \sqrt{1+(\tfrac{dy}{dx})^2}dx \\ &= \omega(n-1) \int\limits_{(a,b)} y(s)^{n-1} e^{\frac{x(s)^2+y(s)^2}{2}} \sqrt{(\tfrac{dx}{ds})^2+(\tfrac{dy}{ds})^2}ds \\ &= \omega(n-1) \int\limits_{(a,b)} y(s)^{n-1} e^{\frac{x(s)^2+y(s)^2}{2}} \parallel \mathbf{t}(s) \parallel ds. \end{aligned}$$

Wir setzen $\overline{\overline{g}} := y(s)^{n-1}e^{\frac{x(s)^2+y(s)^2}{2}}(dx^2+dy^2)$. Da $\omega(n-1)$ konstant ist, sind die Kurven γ, welche von homothetischen Lösungen des MKF herrühren, Geodäten in $(\mathbb{R}^2, \overline{\overline{g}})$. Auch die Umkehrung gilt, da es genügt, die rotationssymmetrischen Variationen zu betrachten. Damit ist gezeigt:

Proposition 4.3 *Die rotationssymmetrischen Lösungen des MKF entsprechen genau den Geodäten in* $(\mathbb{R}^2, \overline{\overline{g}})$.

Die Untersuchung der rotationssymmetrischen homothetischen Lösungen des MKF reduziert sich also auf die Untersuchung der Geodäten in $(\mathbb{R}^2, \overline{\overline{g}})$. In Kapitel 5 werden wir die geometrischen Eigenschaften dieser Geodäten näher beschreiben.
Bemerkung: Für $n = 1$ beinhaltet diese Beschreibung auch die Kurven aus Abschnitt 4.1, Fall (3), als Geodäten in der Metrik $ds^2 = (dx^2 + dy^2)$.

4.4 Numerische Behandlung

Es ist möglich, die Geodätengleichungen in $(\mathbb{R}^2, \overline{\overline{g}})$ so umzuschreiben, daß mit einem einfachen Schrittverfahren diese numerisch integriert werden können. Dazu zunächst

Satz 4.4 (Liouville Formel) *Sei* $\mathbf{M}^2$ *eine orientierte Fläche,* $\mathbf{x}(u,v)$ *eine orthogonale Parametrisierung von* $\mathbf{M}^2$ *in einer Umgebung* $U \in \mathcal{U}(\mathbf{P})$ *eines Punktes* $\mathbf{P} \in \mathbf{M}^2$*. Sei* γ *eine orientierte, in Bogenlänge* s *parametrisierte Kurve. Sei* $\Theta(s) = \angle(\mathbf{t}(s), \mathbf{x}_u)$ *der Winkel zwischen dem Tangentenvektor* $\mathbf{t}$ *und dem Koordinatenvektor* $\mathbf{x}_u = \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{x}$ *in der gegebenen Orientierung. Dann gilt für die geodätische Krümmung*

$$k_g \quad = \quad (k_g)_1 \cos\Theta + (k_g)_2 \sin\Theta + \frac{\partial}{\partial s}\Theta,$$

mit den geodätischen Krümmungen $(k_g)_1$ *und* $(k_g)_2$ *der Koordinatenlinien* $v =$ *konst. und* $u =$ *konst.*

Beweis: Lokal ist die Fläche $\mathbf{M}^2$ einbettbar. Die geodätische Krümmung k_g ist dann definiert durch

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial s^2} \quad = \quad k_g \mathbf{t}_\gamma + k_n \mathbf{n}.$$

Dabei ist $\mathbf{n}$ der Normalenvektor von $\mathbf{M}^2$ und $\mathbf{t}_\gamma$ die tangentiale Projektion von $\frac{\partial^2\gamma}{\partial s^2}$ auf $\mathbf{M}^2$ (beide normiert). Somit ist $k_g = \langle \mathbf{t}_\gamma, \frac{\partial^2\gamma}{\partial s^2}\rangle$. Da ferner γ in Bogenlänge parametrisiert ist, gilt $\mathbf{t}_\gamma \perp \gamma'$, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_\gamma \quad &= \quad \mathbf{n} \times \gamma' = \mathbf{n} \times (\cos\Theta \mathbf{x}_u + \sin\Theta \mathbf{x}_v) \\ &=: \quad -\sin\Theta \widehat{\mathbf{x}}_u + \cos\Theta \widehat{\mathbf{x}}_v. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die geodätische Krümmung

$$\begin{aligned} k_g \quad &= \quad \langle \mathbf{t}_\gamma, \frac{\partial\gamma}{\partial s}\rangle = \langle \mathbf{t}_\gamma, (\frac{\partial}{\partial s}(\cos\Theta)\widehat{\mathbf{x}}_u + \frac{\partial}{\partial s}(\sin\Theta)\widehat{\mathbf{x}}_v + \cos\Theta\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\mathbf{x}}_u + \sin\Theta\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\mathbf{x}}_v)\rangle \\ &= \quad \langle \mathbf{t}_\gamma, (-\sin\Theta\Theta'\widehat{\mathbf{x}}_u + \cos\Theta\Theta'\widehat{\mathbf{x}}_v\rangle + \langle \mathbf{t}_\gamma, (\cos\Theta\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\mathbf{x}}_u + \sin\Theta\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\mathbf{x}}_v)\rangle. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\widehat{\mathbf{x}}_u \quad &= \quad D\widehat{\mathbf{x}}_u(\gamma') = D\widehat{\mathbf{x}}_u(\cos\Theta\mathbf{x}_u + \sin\Theta\mathbf{x}_v) \\ &= \quad D\widehat{\mathbf{x}}_u(\mathbf{x}_u)\cos\Theta + D\widehat{\mathbf{x}}_u(\mathbf{x}_v)\sin\Theta \\ &= \quad \cos\Theta\frac{\partial\widehat{\mathbf{x}}_u}{\partial u} + \sin\Theta\frac{\partial\widehat{\mathbf{x}}_u}{\partial v}, \\ \frac{\partial}{\partial s}\widehat{\mathbf{x}}_v \quad &= \quad \cos\Theta\frac{\partial\widehat{\mathbf{x}}_v}{\partial u} + \sin\Theta\frac{\partial\widehat{\mathbf{x}}_v}{\partial v}. \end{aligned}$$

Und damit

$$
\begin{aligned}
k_g &= \langle \mathbf{t}_\gamma, \cos^2\Theta \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_u}{\partial u} + \cos\Theta \sin\Theta \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_u}{\partial v} + \sin\Theta\cos\Theta \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_v}{\partial u} + \sin^2\Theta \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_v}{\partial v}\rangle \\
\text{mit} &\quad \mathbf{t}_\gamma = -\sin\Theta \mathbf{x}_u + \cos\Theta \mathbf{x}_v \quad \text{also} \\
k_g &= -\sin\Theta\cos^2\Theta\langle \mathbf{x}_u, \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_u}{\partial u}\rangle - \sin^2\Theta\cos\Theta\langle \mathbf{x}_u, \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_u}{\partial v}\rangle \\
&\quad - \sin^2\Theta\cos\Theta\langle \mathbf{x}_u, \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_v}{\partial u}\rangle - \sin^3\Theta\langle \mathbf{x}_u, \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_v}{\partial v}\rangle \\
&\quad + \cos^3\Theta\langle \mathbf{x}_v, \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_u}{\partial u}\rangle + \sin\Theta\cos^2\Theta\langle \mathbf{x}_v, \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_u}{\partial v}\rangle \\
&\quad + \sin\Theta\cos^2\Theta\langle \mathbf{x}_v, \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_v}{\partial u}\rangle + \sin^2\Theta\cos\Theta\langle \mathbf{x}_v, \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_v}{\partial v}\rangle \\
&= \sin^2\Theta\cos\Theta(k_g)_1 + \sin^3\Theta(k_g)_2 + \cos^3\Theta(k_g)_1 + \cos^2\Theta\sin\Theta(k_g)_2 \\
&= \cos\Theta(k_g)_1 + \sin\Theta(k_g)_2,
\end{aligned}
$$

da

$$
\begin{aligned}
(k_g)_1 &= \langle \mathbf{t}_{x_u}, \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_u}{\partial u}\rangle = \langle \mathbf{x}_v, \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_u}{\partial u}\rangle \\
(k_g)_2 &= \langle \mathbf{t}_{x_v}, \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_v}{\partial v}\rangle = \langle -\mathbf{x}_u, \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_v}{\partial v}\rangle. \qquad \text{vgl.[Str]} \qquad \square
\end{aligned}
$$

Zurück zur Umformulierung der Geodätengleichung. Da $\overline{\overline{g}}$ ebenso wie $\overline{g}$ konformflach ist, sind die karthesischen Koordinaten in $(\mathbb{R}^2, \overline{\overline{g}})$ orthogonal. Ferner gilt für eine Geodäte natürlich $k_g \equiv 0$. Wir erhalten mit der Liouville Formel:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\Theta &= -(k_g)_1 \cos\Theta - (k_g)_2 \sin\Theta \\
&= (\frac{n-1}{y} - y)\cos\Theta + x\sin\Theta. \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

Denn für die geodätischen Krümmungen der Koordinatenlinien gilt:

$$
(k_g)_1 = \langle \mathbf{x}_v, \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{x}_u\rangle = \langle \mathbf{x}_v, (\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{x}_u)^\top\rangle = \langle \mathbf{x}_v, {}^{\overline{\overline{g}}}\nabla_{\widehat{\mathbf{x}}_u}\mathbf{x}_u\rangle.
$$

Die Ableitung in Richtung $\widehat{\mathbf{x}}_u$ können wir aber konkret ausrechnen. f bezeichne hierzu wieder den konformen Faktor $y^{n-1}e^{-(x^2+y^2)}$. Dann folgt aus Lemma 6.5

$$
\begin{aligned}
{}^{\overline{\overline{g}}}\nabla_{\widehat{\mathbf{x}}_u}\mathbf{x}_u &= \overbrace{{}^{\mathbb{R}^2}\nabla_{\widehat{\mathbf{x}}_u}\mathbf{x}_u}^{=0} + \widehat{\mathbf{x}}_u \nabla_{\mathbf{x}_u}\log f + \nabla_{\widehat{\mathbf{x}}_u}\mathbf{x}_u \log f - \langle \widehat{\mathbf{x}}_u, \mathbf{x}_u\rangle^g \vec{\nabla}\log f \\
&= 2\widehat{\mathbf{x}}_u \nabla_{\mathbf{x}_u}\log f - \langle \widehat{\mathbf{x}}_u, \mathbf{x}_u\rangle_g \, {}^g\vec{\nabla}\log f.
\end{aligned}
$$

Der Gradient berechnet sich zu

$$
{}^g\nabla \log f = -f^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial u}f(u,v), \frac{\partial}{\partial v}f(u,v)\right) = \left(x, -(\frac{n-1}{y} - y)\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= x\widehat{\mathbf{x}}_u - (\frac{n-1}{y} - y)\widehat{\mathbf{x}}_v \\
&= \sqrt{f}x\mathbf{x}_u - (\frac{n-1}{y} - y)\mathbf{x}_v.
\end{aligned}
$$

Also folgt wegen der Orthogonalität von $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ sowie der Tatsache, daß $\langle \widehat{\mathbf{x}}_u, \mathbf{x}_u \rangle_g = \| \mathbf{x}_u \|_g = \sqrt{f}$

$$
\begin{aligned}
(k_g)_1 &= \langle \mathbf{x}_v, (\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{x}_u)^\top \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}_v, x\mathbf{x}_u - (\frac{n-1}{y} - y)\mathbf{x}_v \rangle = -(\frac{n-1}{y} - y).
\end{aligned}
$$

Analog ergibt sich $(k_g)_2 = -x$, und somit Gleichung 4.1.
Der Tangentenvektor an die Kurve γ ist $\mathbf{t} = (\frac{\partial}{\partial s}x, \frac{\partial}{\partial s}y) = (\cos\Theta, \sin\Theta)$, und man erhält folgendes gewöhnliche Differentialgleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \cos\Theta \\
\dot{y} &= \sin\Theta \\
\dot{\Theta} &= x\sin\Theta + (\frac{n-1}{y} - y)\cos\Theta. \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

In Anhang C ist ein Pascal Programm zu finden, welches mit einer einfachen Schrittmethode die Geodäten in $(\mathbb{R}^2, \overline{\overline{g}})$ darstellt.

4.5 Angenents Torus

Theorem 4.5 ([An1]) *Sei $n \geq 2$, dann gibt es Einbettungen $\mathbf{X}^n : \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, welche homothetische Lösungen des MKF sind.*

Beweis:
Sei $(x_R, y_R, \Theta_R) = \Gamma_R : [0, T(R)) \to \mathbb{R}^3$ eine maximale Lösung von Gleichung 4.2 mit den Anfangswerten $(0, R, 0)$, und sei $\gamma_R(t) = (x_R(t), y_R(t))$ die Projektion auf die x/y-Ebene. Wir wollen nun zeigen, daß R und $t_R > 0$ existieren, so daß $\gamma_R([0, t_R])$ eine einfache, sich nicht selbst schneidende konvexe Kurve ist, welche auf der positiven y-Achse senkrecht startet und senkrecht endet. Da das Spiegeln an der r-Achse eine Isometrie dieser Metrik darstellt, erhalten wir damit eine einfach geschlossene Kurve oberhalb der x-Achse.
Allgemeines Verhalten von Γ_y:
Wir werden immer von Werten $R > \sqrt{n-1}$ ausgehen (für $R = \sqrt{n-1}$ erhalten wir gerade den Zylinder). Dann gilt $\dot{\Theta}(0) = 0 + (\frac{n-1}{R} - R) < 0$, so daß sich γ_R zunächst nach unten biegt. $\dot{\Theta} < 0$ gilt nun, solange $x > 0, \Theta > -\pi/2$ und $r > \sqrt{n-1}$ sind, d.h. γ_R ist dann konvex (in $(\mathbb{R}^2, \delta)$). Sei $t_1 = t_1(R) > 0$ der erste Zeitpunkt, zu welchem $x_R = 0$ oder $\Theta_R = 0$ bzw. $-\pi$ eintritt (falls dies

nie der Fall ist, so sei $t_1 := T(R)$). $\gamma([0, t_1(R)))$ läßt sich also als Graph einer Funktion f_R über einem Abschnitt der y-Achse darstellen. Diese Funktion f hat nur für $\Theta = -\pi/2$ eine waagrechte Tangente. Dann ist aber $f_R'' < 0$, man hat also nur lokale Maxima, somit eben nur eines.
Asymptotik für $R \nearrow \infty$: Sei nun R sehr groß, $\varepsilon := 1/R$. Ferner definieren wir die Transformation:

$$\begin{aligned} \xi(\tau) &:= Rx(\varepsilon\tau) \\ \varrho(\tau) &:= R(y(\varepsilon\tau) - R) \\ \vartheta_\varepsilon = \vartheta(\tau) &:= \Theta(\varepsilon\tau). \end{aligned}$$

Für diese Größen gilt dann:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(\tau) &= R\frac{\partial}{\partial t}x\frac{\partial}{\partial \tau}(\varepsilon\tau) = \frac{\partial}{\partial t}x = \cos\Theta(\varepsilon\tau) = \cos\vartheta \\ \dot{\varrho}(\tau) &= R\frac{\partial}{\partial t}(y(\varepsilon\tau) - R) = \frac{\partial}{\partial t}y = \sin\Theta(\varepsilon\tau) = \sin\vartheta \\ \dot{\vartheta}(\tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau}\Theta(\varepsilon\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}(\varepsilon\tau) = (x\sin\Theta + (\frac{n-1}{y} - y)\cos\vartheta)\varepsilon \end{aligned}$$

Liegt nun für eine feste Zahl $k \in \mathbb{N}$ x im Intervall $[-k\varepsilon, k\varepsilon]$, dann ist $x = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Ebenso gilt für $y \in [R - k\varepsilon, R + k\varepsilon]$, daß $y = R \pm \mathcal{O}(\varepsilon) = R(1 \pm \mathcal{O}(\varepsilon^2))$. Also ist

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}_\varepsilon(\tau) &= \varepsilon\mathcal{O}(\varepsilon)\sin\vartheta_\varepsilon + (n-1)\varepsilon^2\frac{1}{1 \pm \mathcal{O}(\varepsilon^2)} - (1 \pm \mathcal{O}(\varepsilon^2))\cos\vartheta_\varepsilon \\ &= -\cos\vartheta_\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\{\sin\vartheta_\varepsilon + (\frac{n-1}{1 \pm \mathcal{O}(\varepsilon^2)} - 1)\cos\vartheta_\varepsilon\} \\ &= -\cos\vartheta_\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

da der Term in der geschweiften Klammer beschränkt ist. Im Limes gilt dann für $\varepsilon = 0$:

$$\vartheta_0(\tau) = -\cos\vartheta_0(\tau).$$

Für diese Gleichung ist die analytische Lösung γ_0 bekannt: $\vartheta_0(\tau) = -\arcsin(\tanh(\tau))$. Wir wählen nun k so groß, daß der Punkt $\mathbf{P}$ auf γ_0 mit $\vartheta_0(\mathbf{P}) = -\pi/2 + \delta/2$ in $Q := [-k, k] \times [-k, k]$ liegt. Da nun in dem Quader $Q_R := [-\varepsilon k, \varepsilon k] \times [-\varepsilon k + R, \varepsilon k + R]$ die Lösung von 4.2 stetig von ε abhängt, gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ derart, daß $\forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ gilt: $\vartheta_\varepsilon(\tau(\mathbf{P})) = \vartheta_0(\tau(\mathbf{P})) \pm \delta_\varepsilon/2$.

Lemma 4.6

$$\forall \delta > 0 \quad \forall R > \frac{1}{\varepsilon_0} \quad \exists\, t_2 > 0 : \ \vartheta_\varepsilon(\varepsilon t_2) \leq -\pi/2 + \delta. \qquad \delta_\varepsilon \in (0, \delta).$$

Bemerkung: Wir können also jeden beliebigen Winkel zwischen 0 und $-\pi/2$ in dem Quader Q_R erreichen.
Wir drehen den Winkel ϑ nun um $\pi/2$, so daß wir als $\alpha = \vartheta + \pi/2$ den Winkel der Tangente an Graph(f) über der y-Achse erhalten. Wir erhalten dann mit s als Bogenlängenparameter:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial s}\Theta / \frac{\partial}{\partial s} y = (x \sin \Theta + (\frac{n-1}{y} - y) \cos \Theta) / \cos \alpha \\
&= (x \cos \alpha - (\frac{n-1}{y} - y) \sin \alpha) / \cos \alpha \\
&= x + (y - \frac{n-1}{y}) \tan \alpha \geq (y - \frac{n-1}{y}) \tan \alpha.
\end{aligned}$$

Sei $y_2 := y_R(t_2)$. Wir integrieren die obige Ungleichung von $y < y_2$ bis y_2:

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_2)} \frac{d\alpha}{\tan \alpha} &= \ln(\sin \alpha)\Big|_{\alpha(y)}^{\alpha(y_2)} \\
&\geq \int_y^{y_2} (y - \frac{n-1}{y}) dy = (y^2/2 - (n-1) \ln y)\Big|_y^{y_2}.
\end{aligned}$$

Also:

$$\ln(\frac{\sin \alpha(y_2)}{\sin \alpha(y)}) \geq \frac{y_2^2 - y^2}{2} - \ln(\frac{y_2}{y})^{n-1} \text{ bzw. } \frac{\sin \alpha(y_2)}{\sin \alpha(y)} \geq e^{\frac{y_2^2 - y^2}{y}} (\frac{y_2}{y})^{n-1}.$$

Nun ist α als Funktion von y bis zu einem Wendepunkt von f monoton. Wie wir in Kapitel 5 zeigen werden, ist dies aber nur bei einem Achsenabschnitt der Tangente von $1/y$ möglich. Wir können also davon ausgehen, daß α auf $[0, 2\pi]$ monoton ist. Für $\alpha \in [0, \pi/3]$ gilt $\tan \alpha \leq 2 \sin \alpha$, und wegen $\sin \pi/3 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ können wir δ so klein wählen, daß $\sin(\delta) \leq \frac{1}{2}\sqrt{3}$ gilt. Zusammen haben wir

$$\sin \alpha(y) \leq \sin \alpha(y_2) = \sin(\delta) \leq \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

und können im weiteren von der Abschätzung $\tan \alpha \leq 2 \sin \alpha$ ausgehen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
f(y) - f(y_2) &= \int_{y_2}^{y} f'(y) dy = -\int_{y_2}^{y} \tan \alpha(y) dy \leq 2 \int_y^{y_2} \sin \alpha(y) dy \\
&= 2 \int_y^{y_2} \sin \alpha(y) dy \leq 2 \int_y^{y_2} (\frac{y_2}{y})^{n-1} e^{-\frac{y_2^2 - y_2}{2}} \sin \alpha(y_2) dy,
\end{aligned}$$

d.h. $f(y) \leq f(y_2) + 2 \int_y^{y_2} (\frac{y_2}{y})^{n-1} e^{-\frac{y_2^2 - y_2}{2}} dy$. Da die Funktion $f_{y_2}(y) := (\frac{y_2}{y})^{n-1} e^{-\frac{y_2^2 - y^2}{2}}$ ihr Maximum bei $y = \sqrt{n-1}$ hat, erhalten wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
2 \int_y^{y_2} (\frac{y_2}{y})^{n-1} e^{-\frac{y_2^2 - y_2}{2}} dy &\leq 2 \int_{1/R}^{y_2} (\frac{y_2}{y})^{n-1} e^{-\frac{y_2^2 - y}{2}} dy \\
&\leq 2(y_2 - 1/R)(\frac{y_2}{\sqrt{n-1}})^{n-1} e^{-\frac{y_2 + 1 - n}{2}} dy \to 0
\end{aligned}$$

für $R \to \infty$. Dieser Term fällt exponentiell, wir können also Konstanten C_1 bzw. $C > 0$ ($f(y_2) \leq k/R$) finden, so daß:

$$f(y) \leq k/R + C_1/R = C/R$$

gilt.

Lemma 4.7 *Für R groß genug und $t \in (0, t_1)$ gilt $x_R(t) \leq C/R$ oder $y_R(t) < 1/R$, wobei C nicht von R abhängt.*

Mit Hilfe eines Konvergenzarguments und einem Vergleich mit dem harmonischen Oszillator zeigt Angenent nun:

Lemma 4.8 *Für genügend großes R ist $t_1(R) < T(R)$, $x_R(t_1) = 0$ und $y_R(t_1) \geq 1/R$.*

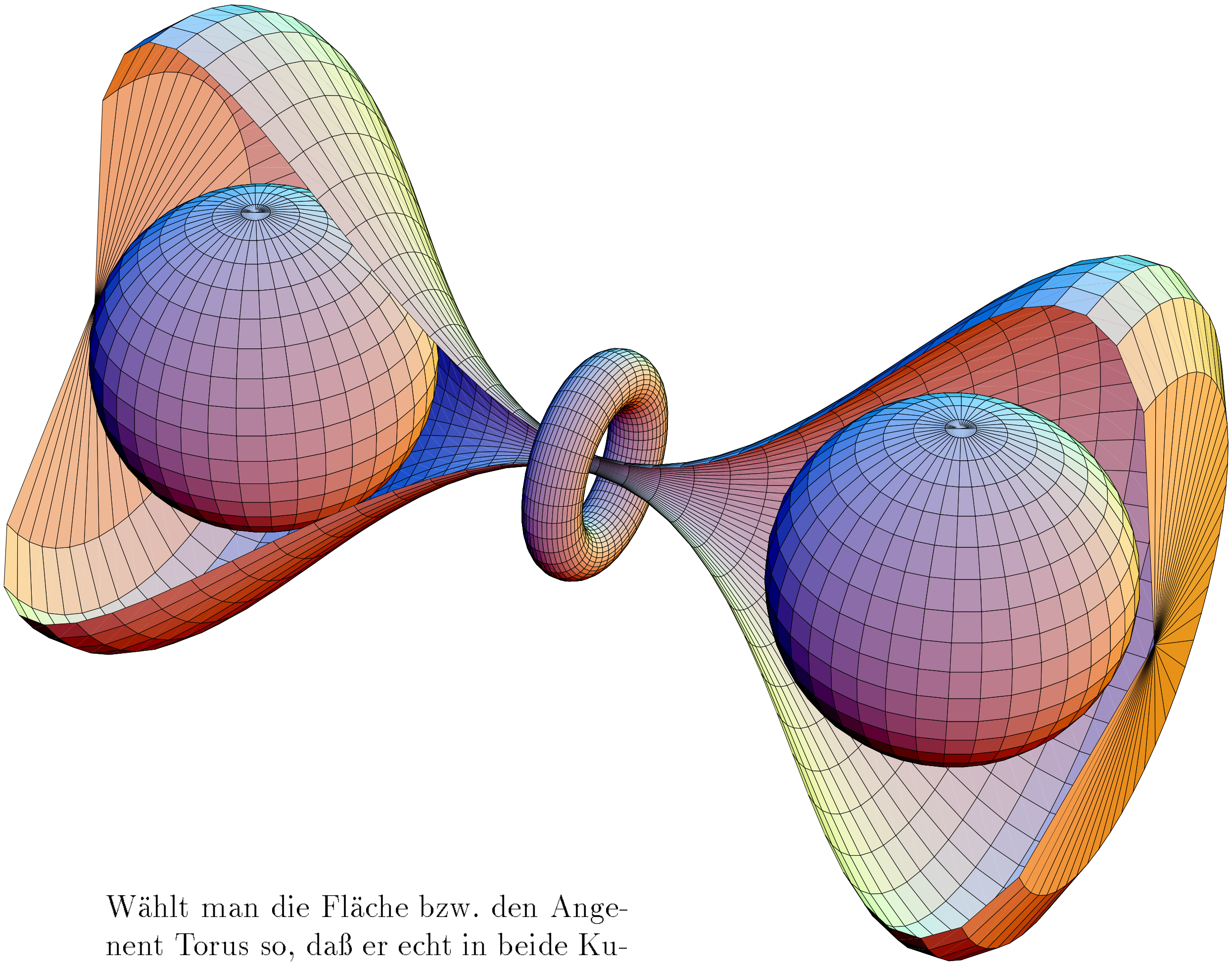
Damit ist für große R klar, was zum Zeitpunkt $t_1(R) < T(R)$ geschieht. Andererseits ist auch der Kreis als spezielle Lösung mit $t_1(R) = T(R)$ bekannt. Aus Stetigkeitsgründen folgt nun, daß es ein kleinstes $R_* \geq \sqrt{n}$ geben muß mit der Eigenschaft, daß $t_1(R) < \infty$ und $x_R(t_1) = 0$ für alle $R > R_*$ gilt. Wir erwarten nun, daß die 'Grenzgeodäte', welche für $R \searrow R_*$ entsteht, unser gesuchter Halbbogen ist. Für die Konvergenz braucht man dazu das technische Lemma (vgl. [An1]):

Lemma 4.9 (1) $\inf\{y_R(t_1(R)) | R_* < R \leq R_* + 1\} > 0$
(2) $\sup\{x_R(t) | 0 < t < t_1(R), R_* < R \leq R_* + 1\} < \infty$.

Alle in Frage kommenden Geodäten γ_R treffen also von der x-Achse gleichmäßig entfernt auf der positiven y-Achse auf. Ebenso kann eine Divergenz in x-Richtung nicht auftreten. Die 'Grenzgeodäte' γ_{R_*} beginnt und endet somit auf der positiven y-Achse, d.h. läuft von $(R_*, 0)$ nach $(r_*, 0)$ mit $r_* := r_{R_*}(t_1(R_*))$.
Es bleibt also zu zeigen, daß $\Theta_* := \Theta_{R_*}(t_1(R_*)) = -\pi$ gilt. Wir wissen bereits, daß $\Theta_* \geq -\pi$ ist. Hätten wir eine strikte Ungleichung, so könnten wir die Höhe von R um R_* variieren und würden eine weitere Geodäte im ersten Quadranten finden, welche sich als Graph über der y-Achse darstellen läßt, und diese in endlicher Zeit trifft. Man könnte also, im Wiederspruch zu der Minimalität von R_*, ein $R < R_*$ mit dieser Eigenschaft finden. Damit ist $\Theta_* = -\pi$ $\square$

Folgerung:
Die eben gezeigte Existenz eines Torus, welcher eine homothetische Lösung des MKF darstellt, impliziert ein einfaches Argument, um das Abschnüren von Hälsen zu zeigen. Dazu sei eine Fläche $\mathbf{F} : \mathbf{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben, welche zwei Sphären mit einem Radius $R > 0$ einschließt, und einen von einem Torus $\mathbf{T}$ umgebenen Hals besitzt. Dabei seien Hals und Torus sehr klein und die beiden Sphären auf die beiden Seiten des Halses verteilt (vgl. Abbildung). Für eine solche Wahl steht

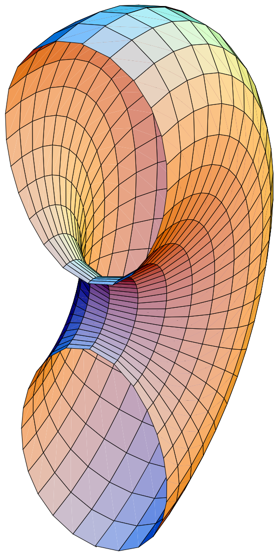
fest, daß der Torus zu einer Zeit $T(\mathbf{T}) < T(\mathbf{S}_R)$, also bereits vor den beiden Sphären, 'verschwindet'. Wegen des Disjointness Theorems 3.1 muß sich daher der Hals unserer Fläche abschnüren.



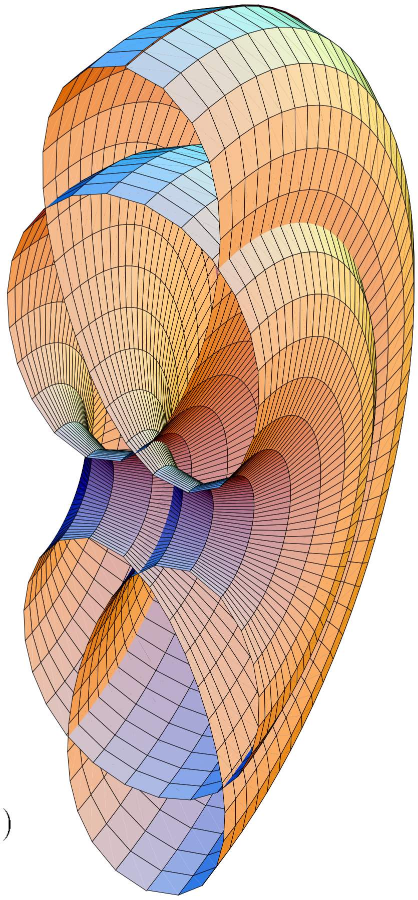
Wählt man die Fläche bzw. den Angenent Torus so, daß er echt in beide Kugeln paßt, so findet eine Abschnürung statt.

4.6 Abbildungen

In diesem Abschnitt seien zur Illustration einige Flächen, welche homothetische Lösungen des MKF sind, dargestellt. Zunächst die schon erwähnten rotationssymmetrischen Beispiele. Diese wurden mit dem in Abschnitt 4.4 hergeleiteten Verfahren in Mathematica erzeugt:



(1)

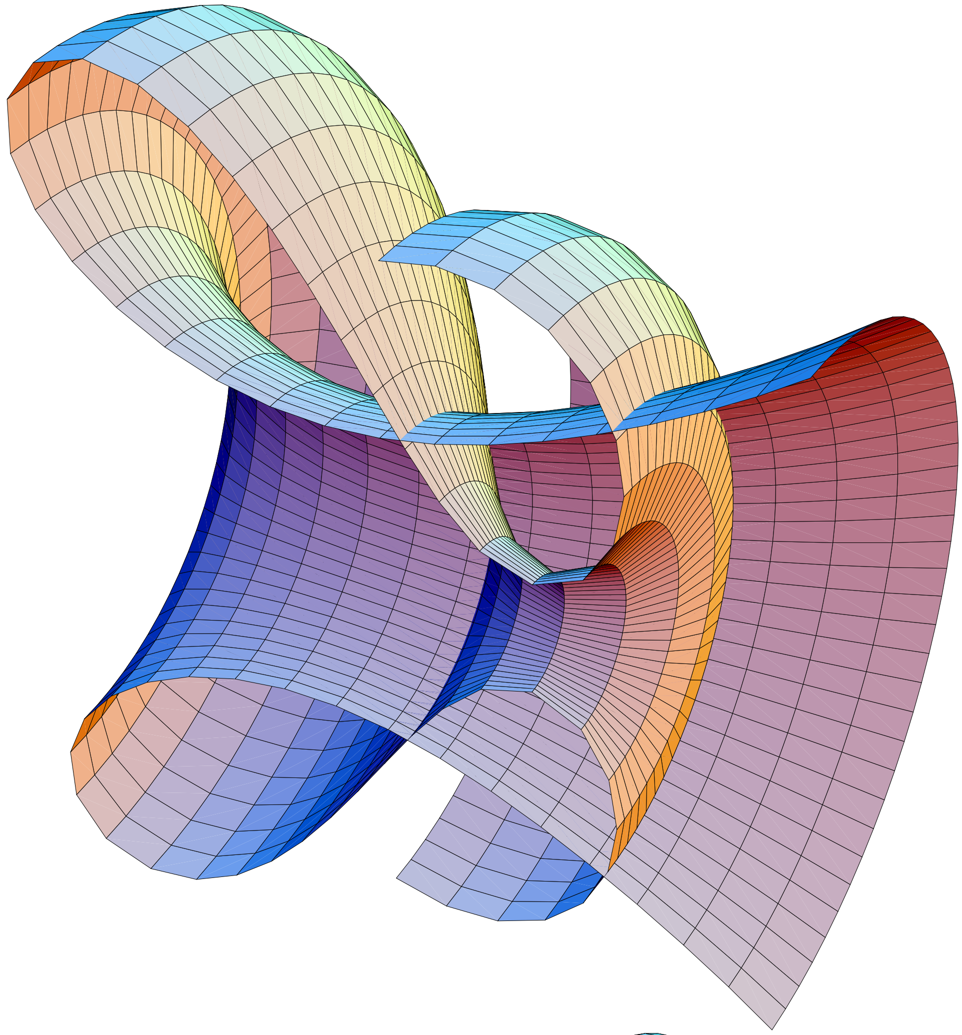


(2)

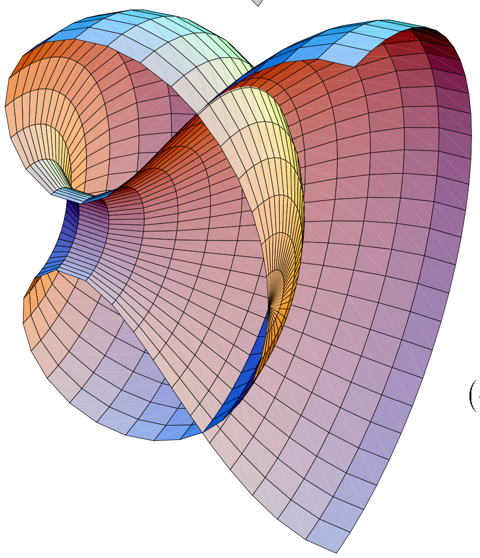
(1) Angenents Torus.

(2) Rosette: Die Mullin-Abresch-Langer-Kurven treten auch im Falle der Rotationsflächen nochmals auf. Um die Hauptkrümmung, welche von der Rotation herrührt, auszugleichen, sind diese aber zur Rotationsachse hin stärker gekrümmt.

(3) Achter: Diese Fläche zeigt ein Verhalten, welches im eindimensionalen Fall nicht aufgetreten ist: Die Geodäten in der Metrik $\overline{g}$ müssen nicht konvex sein, es gibt Wendepunkte (darauf kommen wir in Kapitel 5 zurück).



(3)



(4) Diese Lösung schließlich trifft die x-Achse senkrecht, damit dürften alle qualitativ unterschiedlichen rotationssymmetrischen Flächen dargestellt sein.

(4)

(5) Hier noch zwei homothetische Lösungen, welche Chopp ebenfalls numerisch mit Hilfe von Symmetrisierung und Testalgorithmen gefunden hat (vgl.[Ch]):

Kapitel 5

Rotationssymmetrische Lösungen

Rotationssymmetrische Lösungen entsprechen also Geodäten in $(\mathrm{I\!R}^2, \overline{\overline{g}})$ (vgl. 4.3). In diesem Kapitel wollen wir Eigenschaften dieser Flächen herleiten. $\mathbf{M}^n$ bezeichne hierbei eine Rotationsfläche, und wir verwenden auch weiter die Bezeichnungen aus 4.3. Man beachte im folgenden, daß man den Normalenvektor und die Projektion des Ortsvektors für einen geeigneten Schnitt auch als Vektoren in $(\mathrm{I\!R}^2, \overline{\overline{g}})$ auffassen kann. Wir werden davon ausgehen, daß der Schnitt oBdA derart gewählt wurde.

5.1 Zweite Fundamentalform von Rotationsflächen

Lemma 5.1 *Für eine n-dimensionale Rotationsfläche* $\mathbf{M}^n$ *in* $\mathrm{I\!R}^{n+1}$ *mit Rotationsachse* $\mathbf{d}_0$ *gilt: Sei*

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_M(s, \phi_1, ..., \phi_{n-1}) &= \mathbf{d}_0\, x(s) + \mathbf{d}\,(\phi_1, ..., \phi_{n-1})\, y(s) \\ \textit{mit} \qquad \mathbf{d} \in \mathbf{S}^{n-1}, \qquad \mathbf{d}(\Phi) &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle \mathbf{d}, \mathbf{d}_i \rangle \mathbf{d}_i = \sum_{i=1}^{n-1} \cos(\phi_i)\mathbf{d}_i \end{aligned}$$

eine gegebene Parametrisierung von $\mathbf{M}^n$*, dann gilt für die Weingartenabbildung:*

$$A = \{h_i^j\} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{d}(\Phi)\rangle}{y}\mathbf{E}_{n-1} \end{pmatrix}$$

Folgerung: Es ergibt sich dann für die mittlere Krümmung $H = k + \frac{(n-1)\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{d}\rangle}{y} = k + \frac{(n-1)\cos(\alpha)}{y}$ und für die Gausskrümmung $G = k(\frac{\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{d}\rangle}{y})^{n-1} = k(\frac{\cos(\alpha)}{y})^{n-1}$, wenn wir mit α den Winkel zwischen $\boldsymbol{\nu}$ und $\mathbf{d}$ bezeichnen.

Beweis: Es gilt für die Projektionen auf die beiden Unterräume $\mathbb{R}_{\mathrm{rot}}$ der Rotationsachse und $\mathbb{R}^n{}_{\mathrm{ortho}}$ dem Othogonalraum dazu, daß

$$\mathbf{F} \;=\; \mathbf{P}_{\mathbb{R}_{rot}}(\mathbf{F}) + \mathbf{P}_{\mathbb{R}^n{}_{ortho}}(\mathbf{F}),$$

und daß

$$\mathbf{P}_{\mathbb{R}_{\mathbf{rot}}}(\mathbf{F}(\mathrm{s},\boldsymbol{\Phi})) = \mathbf{P}_{\mathbb{R}_{\mathbf{rot}}}(\mathbf{F}(\mathrm{s},\boldsymbol{\Phi}')) \qquad \forall \boldsymbol{\Phi},\ \boldsymbol{\Phi}'.$$

Ist $\{\mathbf{e}_i\}$ ein orthonormales n-Bein auf $\mathbf{M}^2$, dann erhalten wir für die Ableitung des Ortsvektors in Richtung einer der Winkel ϕ_i

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \phi_i} \;=\; \frac{\partial \mathbf{P}_{\mathbb{R}rot}(\mathbf{F})}{\partial \phi_i} = \frac{\partial y(s)\mathbf{d}(\Phi)}{\partial \phi_i} = y(s)\frac{\partial \mathbf{d}(\Phi)}{\partial \phi_i} = y(s)\mathbf{e}_i(\Phi).$$

Ferner sei die Ableitung des Ortsvektors entlang der Kurve γ welche $\mathbf{M}^n$ erzeugt, $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} = \mathbf{t}$ (s = Bogenlänge). Für $\boldsymbol{\nu}(s,\Phi)$ gilt:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial \phi_i} \;=\; \frac{\partial \langle \mathbf{d},\boldsymbol{\nu}\rangle \mathbf{d} + \langle \mathbf{d}_0,\boldsymbol{\nu}\rangle \mathbf{d}_0}{\partial \phi} = \frac{\partial \langle \mathbf{d},\boldsymbol{\nu}\rangle \mathbf{d}}{\partial \phi} = \langle \mathbf{d},\boldsymbol{\nu}\rangle \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \phi} = \langle \mathbf{d},\boldsymbol{\nu}\rangle \mathbf{e}_i.$$

Mit $\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial s} = k\mathbf{t}$ und $(p_i,...,p_n) := (s,\phi_1,..,\phi_i)$ hat die induzierte Metrik auf $\mathbf{M}^n$ folgende Gestalt:

$$\{g_{ij}\} \;=\; \langle \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_i}, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_j}\rangle = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{t},\mathbf{t}\rangle & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & \langle y\mathbf{e}_i, y\mathbf{e}_j\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y^2\mathbf{E}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Für die zweite Fundamentalform gilt in diesen Koordinaten

$$\{h_{ij}\} \;=\; \langle \frac{\partial}{\partial p_i}\mathbf{F}, \frac{\partial}{\partial p_j}\boldsymbol{\nu}\rangle = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{t},k\mathbf{t}\rangle & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & \langle y\mathbf{e}_i, \langle \mathbf{t},\mathbf{d}\rangle \mathbf{e}_j\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & y\langle \boldsymbol{\nu},\mathbf{d}\rangle \mathbf{E}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Insgesamt erhalten wir für die Weingartenabbildung

$$\{h_i^j\} \;=\; \{g^{ik}h_{kj}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y^2\mathbf{E}_{n-1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & y\langle \boldsymbol{\nu},\mathbf{d}\rangle \mathbf{E}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{\langle \boldsymbol{\nu},\mathbf{d}\rangle}{y}\mathbf{E}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

□

5.2 Wendepunkte

Wie wir in Kapitel 4 gesehen haben, sind die Punkte $k = 0$ (Wendepunkte von γ, verstanden als Graph) gerade die Punkte, welche den Fall $n \geq 2$ vom Fall $n = 1$, den Mullin-Abresch-Langer-Kurven, qualitativ unterscheiden. Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Umständen solche Punkte auftreten.

Satz 5.2 *Sei $p = (x, y)$ ein Wendepunkt der Geodäten γ ($\neq$ y-Achse) in $(\mathbb{R}^2, \overline{\overline{g}})$, gesehen als Graph über einer der Achsen. Dann ist der Achsenabschnitt der Tangente an γ in p $b(x)$ gleich $\frac{n-1}{y}$, d.h.*

$$b(x) \;=\; xy' - y = H\sqrt{1 + y'^2} = \frac{n-1}{y}.$$

Dies bedeutet insbesondere $y \neq 0$, und γ ist lokal als Graph darstellbar.

Folgerungen:
- Der einzige mögliche Wendepunkt auf der positiven y-Achse ist $(0, 1)$ (bei senkrechter Tangente und $k = 0$ folgt, daß γ gleich der y-Achse ist).
- Falls y' endlich und $y > \sqrt{n-1}$ ist, gilt sign(x) = sign(y'), d.h. auf den Tangenten 'rutscht' man immer zur y-Achse hin!

Darstellung als Graph: Wir stellen γ als Graph über der x-Achse dar.

$$\mathbf{F}(x) \;=\; (x, y(x)) \;,\; \mathbf{t}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}(1, y'(x)) \;,\; \mathbf{n}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}(-y'(x), 1).$$

Der Graph einer Funktion hat als Kurve die Krümmung

$$\begin{aligned} k = \langle \nabla_{\mathbf{e}_i} \boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_i \rangle \;&=\; \langle \frac{\partial}{\partial s} \boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_i \rangle = \langle \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_i \rangle = \frac{\partial y}{\partial s} \langle \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_i \rangle \\ &=\; \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \langle \frac{(-y'', 0)}{\sqrt{1+y'^2}}, \frac{(1, y')}{\sqrt{1+y'^2}} \rangle = \frac{-y''}{\sqrt{1+y'^2}^3}. \end{aligned}$$

Sei α der Winkel zwischen dem ersten Koordinatenvektor $\mathbf{d}_0$ und dem Tangentialvektor $\mathbf{t}$ an die Kurve $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, so daß $\cos\alpha = \langle \mathbf{t}, \mathbf{d}_0 \rangle$ $\;(= \langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{d} \rangle)$, und somit

$$\cos\alpha = \langle \frac{(1, y')}{\sqrt{1+y'^2}}, (1, 0) \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Wegen Lemma 5.1 erhalten wir für

$$H = k + (n-1)\cos\alpha = \frac{-y''}{\sqrt{1+y'^2}^3} \;+\; (n-1)\frac{1}{y}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Mit $H = \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\nu} \rangle = \frac{-xy'+y}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{b(x)}{\sqrt{1+y'^2}}$ gilt schließlich

$$\begin{aligned} y'' \;&=\; (1+y'^2)\{(n-1)\frac{1}{y} - b\} = (1+y'^2)\{(n-1)\frac{1}{y} - H\sqrt{1+y'^2} \\ &=\; (1+y'^2)\{(n-1)\frac{1}{y} - y + xy'\}. \qquad \text{(vgl.[Hu3])} \end{aligned}$$

Beweis des Satzes: Angenommen, $\mathbf{M}^n$ ist in der Umgebung des Punktes mit $k = 0$ nicht lokal als Graph darstellbar, dann ist in diesem Punkt die Tangente an $\gamma = (x, y)$ parallel zur y-Achse. Somit ist $\cos\alpha = 0$. Ist nun $y \neq 0$, so gilt $\frac{1}{y} < \infty$, und wir erhalten $H = 0$. Dies ist aber ein Widerspruch zu der Tatsache, daß die Tangente in einem Punkt mit $H = 0$ durch den Koordinatenursprung verlaufen muß. Ist die lokale Darstellung als Graph möglich, so folgt aus obigen Gleichungen mit $k = H - (n-1)p = 0$, daß $H = (n-1)p$, d.h.

$$H = \frac{1}{y}\frac{n-1}{\sqrt{1+y'^2}}, \qquad H\sqrt{1+y'^2} = \frac{n-1}{y}$$

und mit $H\sqrt{1+y'^2} = b(x)$ schließlich $b(x) = \frac{n-1}{y}$. $\square$

5.3 Verhalten bei Nullstellen von H

Als nächstes werden wir uns näher mit den Nullstellen der mittleren Krümmung beschäftigen. Vorerst betrachten wir Rotationsflächen im Allgemeinen.

Lemma 5.3 *Sei $\mathbf{M}^n$ eine Rotationsfläche, welche sich um $\mathbf{P}$ lokal als die Rotation des Graphen Γ_u darstellen läßt ($u > 0$). Ist dann $H(\mathbf{P}) = 0$, so gilt, daß u in einer Umgebung von $\mathbf{P}$ konvex ist.*

Bemerkung: Man beachte, daß dies nicht bedeutet, daß $\mathbf{M}_{\Gamma_u}$ konvex ist.

Beweis: Sei $\mathbf{n}$ der Normalenvektor an Γ_u. Da u glatt ist, genügt es, die Behauptung für den Punkt $\mathbf{P}$ zu zeigen.
Ist $u''(\mathbf{P}) \leq 0$, dann ist Γ_u konkav und für k ergibt sich $k = -\frac{u''}{\sqrt{1+u'^2}} \geq 0$. Mit der Orientierung $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{n} := \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s}/k$ erhält man

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \langle \nabla_{\mathbf{t}}\, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{t}\ \rangle = \langle \mathbf{t}\, k, \mathbf{t}\ \rangle = k \geq 0 \qquad \text{und} \\
\lambda_1 &= \langle \nabla_{\mathbf{e}_1} \boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \frac{1}{y}\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial \phi_1}, \mathbf{e}_1 \rangle = \frac{1}{y}\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = \frac{1}{y} > 0.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt $H(\mathbf{P}) > 0$, was im Widerspruch zu $H(\mathbf{P}) = 0$ steht. $\square$

Lemma 5.4 *Sei $\mathbf{P}$ ein Punkt einer Rotationsfläche, welcher nicht auf einer der Rotationsachsen liegt, und in welchem die Fläche lokal als Graph darstellbar ist. Ferner sei $H(\mathbf{P}) = 0$. Dann folgt $G \neq 0$. Ist die Dimension von $\mathbf{M}^n$ gerade, so gilt sogar $G < 0$.*

Beweis: Es gilt $H = 0$, angenommen G wäre ebenfalls gleich Null. Mit $\alpha \neq \pm\,\pi/2$ (lokale Darstellbarkeit als Graph) folgt dann nach Lemma 5.1, daß $k = 0$ gilt. Dann ist aber $H = (n-1)\frac{\cos\alpha}{y} \neq 0$. Widerspruch!

Sei die Dimension $n = \dim(\mathbf{M^n})$ nun zusätzlich gerade. Aus $H = (n-1)\frac{\cos\alpha}{y} + k = 0$ folgt dann $G = -(n-1)(\frac{\cos\alpha}{y})^n < 0$. $\square$

Bemerkung: Allgemein gilt für die Eigenwerte der zweiten Fundamentalform $\lambda_i = \langle \nabla_{\mathbf{e}_i}\boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_i\rangle$: Ändert man die Orientierung von $\mathbf{M}^n$ ($\boldsymbol{\nu} \to -\boldsymbol{\nu}$), so ändert sich das Vorzeichen von λ_i, woraus für die Gausskrümmung und die mittlere Krümmung folgt:

$$H \to -H \quad \text{und} \quad G \to (-1)^n G, \quad \text{falls } \boldsymbol{\nu} \to -\boldsymbol{\nu}.$$

Somit kann man in ungeraden Dimensionen keine Aussagen über das Vorzeichen von G erwarten.
Im Falle von $H = \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}\rangle$ wissen wir, daß die Punkte mit $H = 0$ eine Ursprungsgerade als Tangente haben. Ferner haben wir gesehen (vgl. Satz 5.2), daß in solchen Punkten die Steigung immer $\neq \infty$ ist. Man kann $\mathbf{M}^n$ dort als Graph einer Funktion u darstellen und erhält:

Korollar 5.5 *Ist* $\mathbf{M}^n$ *eine rotationssymmetrische, homothetische Lösung des MKF, und sei* $\mathbf{P}$ *ein Punkt mit* $H = 0$*, dann ist in diesem Punkt* u *konvex.*

Wir bezeichnen mit $x(\mathbf{P})$ und $y(\mathbf{P})$ die y- bzw. die x-Koordinate des Punktes $\mathbf{P}$ in $\mathbb{R}^2$. Dabei sind die Koordinatenachsen so gewählt, daß die x-Achse der Rotationsachse entspricht.

Satz 5.6 *Seien* $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ *zwei Punkte mit* $y(\mathbf{P}_0), y(\mathbf{P}_1) > 0$ *auf einer Geodäte* γ *in* $(\mathbb{R}^2, \overline{\overline{g}})$*. Sei* $S_{P_0 \to P_1}$ *das Verbindungsstück von* $\mathbf{P}_0$ *nach* $\mathbf{P}_1$ *auf* γ*. Sind nun diese beiden Punkte die* **aufeinanderfolgenden** *Nullstellen von* H*, so gilt:*

$S_{P_0 \to P_1}$ *schneidet die* y*-Achse, genauer* $x(\mathbf{P}_0)x(\mathbf{P}_1) < 0$, *oder* $x(\mathbf{P}_0) = x(\mathbf{P}_1) = 0$.

Beweis: Durch Widerspruch: Angenommen $\mathbf{P}_0$ und $\mathbf{P}_1$ liegen auf derselben Seite der y-Achse. OBdA können wir annehmen, daß $x(\mathbf{P}_0), x(\mathbf{P}_1) > 0$. Die beiden Tangenten an die Punkte $\mathbf{P}_0$ und$\mathbf{P}_1$, N_0 und N_1, sind Nullgeraden. Wir überlegen uns zunächst, daß es ein Teilstück von $S_{P_0 \to P_1}$ gibt, welches auf einer der Geraden N_i in dem Punkt $\mathbf{P}_2$ mit $x(\mathbf{P}_2)$, $y(\mathbf{P}_2) > 0$ beginnt, und in einem der Punkte $\mathbf{P}_i$ $(i = 0, 1)$ auf **derderselben** Geraden endet (vgl. Abbildung A).
Ist $N_0 = N_1$, so wählt man als Startpunkt $\mathbf{P}_2 := \mathbf{P}_0$ und als Endpunkt entsprechend $\mathbf{P}_1$. Sind N_0 und N_1 verschieden, dann gibt es in diesem Fall einen Durchstoßpunkt $\mathbf{P}_2$ von $S_{P_0 \to P_1}$ durch (oBdA) N_0, da, wie aus der Bemerkung

zu Proposition 5.4 bekannt ist, die Graphen von γ in den beiden Punkten $\mathbf{P}_0$ und $\mathbf{P}_1$ konvex sind. Wir können davon ausgehen, daß $x(\mathbf{P}_2)$ und $y(\mathbf{P}_2) > 0$, da wir in das Gebiet zwischen N_0 und N_1 gelangen müssen. Notfalls können wir die Rollen von N_0 und N_1 vertauschen (vgl. Abbildung A). Wir nennen das so gefundene Teilstück $\overline{S}$. Dieses Teilstück beginnt nun auf N_0^+ und endet auf N_0^+ (N_0^+= positive Halbgerade). Durch die Forderung, daß der Punkt $\mathbf{P}_2$ der erste Schnittpunkt mit N_0 ist, können wir oBdA annehmen, daß $\overline{S}$ keinen weiteren Schnittpunkt mit N_0 hat.

Wir betrachten nun

$$\begin{aligned}\alpha \ := \ \inf \{ & \text{Winkel zwischen } N_0 \text{ und } \overline{N} \mid \overline{N} \text{ ist Nullgerade,} \\ & \text{und } \overline{S} \text{ liegt in dem Segment zwischen } N_0 \text{ und } \overline{N} \, \}.\end{aligned}$$

Trivialerweise liegt α in $(0, 2\pi]$ (Abbildung B), und $\overline{N}$ ist Tangente an $\overline{S}$, d.h.

es gibt einen Punkt $\mathbf{P}_3 \in \overline{S} \cap \overline{N}$. Sei nun

$$\beta \ := \ \text{Winkel zwischen } N_0 \text{ und } X\text{-Achse}, \qquad \delta := \alpha + \beta.$$

Dann gibt es folgende Fälle:

1.*Fall* : $\delta \in (0, \frac{1}{2}\pi) \cup (\pi, \frac{3}{2}\pi)$ $\Rightarrow$ $\overline{N}$ tangiert $\overline{S}$ oberhalb in $\mathbf{P}_3$, was Satz 5.3 widerspricht (auf der Halbebene unterhalb der x-Achse haben die Geodäten in $(\mathbb{R}^2, \overline{\overline{g}})$ natürlich dieselben Eigenschaften).

2.*Fall* : $\delta \in (\frac{1}{2}\pi, \pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ $\Rightarrow$ $\overline{N}$ tangiert $\overline{S}$ unterhalb, was der Tatsache widerspricht, daß es keinen weiteren Punkt $\mathbf{P}_3$ mit $H(\mathbf{P}_3) = 0$ auf $\overline{S}$ geben kann.

3.*Fall* : $\delta = \frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{3}{2}\pi$ $\Rightarrow$ $S_{P_0 \to P_1}$ ist dann ein Teil der y-Achse, somit ist S die y-Achse, und wir haben $x(\mathbf{P}_0) = x(\mathbf{P}_1) = 0$.

4.*Fall* : $\delta = 0$ oder π $\Rightarrow$ Die von S erzeugte Rotationsfläche ist in $\mathbf{P}_3$ nicht regulär, also insbesondere keine homothetische Lösung des MKF. $\square$

Bemerkung: Aus dem gerade bewiesenen Satz folgt, daß, falls auf der Geodäte γ in $(\mathbb{R}^2, \overline{\overline{g}})$ mehrere Nullstellen von H auftreten,γ **immer zwischen der rechten und der linken Seite der y-Achse hin und her pendelt**.

5.4 Qualitatives Verhalten zwischen den Nullstellen von H

Wir wissen nun, daß unter der Voraussetzung $y > 0$ eine Geodäte in $(\mathbb{R}^2, \overline{\overline{g}})$ zwischen den Punkten $H = 0$ auf der rechten Seite und den Punkten $H = 0$ auf der linken Seite der y-Achse hin und her pendelt. Es stellt sich die Frage, wie der Verlauf dieser Geodäten zwischen diesen Punkten genau aussieht. Es gibt vier qualitativ verschiedene Möglichkeiten, wie das Geodätenstück von $H = 0$ zu $H = 0$ aussehen kann. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Theorem 5.7 *Sei $\mathbf{M}^2$ eine zweidimensionale rotationssymmetrische Lösung des MKF. Gilt dann für die $\mathbf{M}^2$ beschreibende Geodäte γ, $y(\gamma) > 0$, so folgt: Zwischen zwei Nullstellen von H, $\mathbf{P}_0$ und $\mathbf{P}_1$ gibt es*

entweder **keinen** *Wendepunkt, dann hat k_γ also ein Vorzeichen auf diesem Segment $S_{P_0 \to P_1}$ von γ. In diesem Fall gilt für das qualitative Verhalten, daß zwischen $\mathbf{P}_0$ und $\mathbf{P}_1$ ein 'Oberbogen' oder ein 'Unterbogen' durchlaufen wird (vgl. Abbildung C, I)*

oder *es gibt* **einen** *Wendepunkt (im Sinne von 5.2, d.h. einen Punkt mit $k_\gamma = 0$. In diesem Fall gilt für das qualitative Verhalten des Segments $S_{P_0 \to P_1}$ zwischen $\mathbf{P}_0$ und $\mathbf{P}_1$, daß ein 'Oberunterbogen' oder ein 'Unteroberbogen' durchlaufen wird (vgl. Abbildung C, II)*

oder *es gibt* **zwei** *Wendepunkte, wobei dann einer davon unterhalb der zur x-Achse parallelen Geraden durch $\sqrt{n-1}$ (welche den Zylinder erzeugt) liegt (vgl. Abbildung C, III).*

Ferner hat die Gausskrümmung auf einem solchen Segment $S_{P_0 \to P_1}$ entweder keine oder zwei Nullstellen.

Beweis: Wegen Korollar 3.31 gilt

$$\Delta(\frac{|A|^2}{H^2}) \quad \geq \quad \frac{1}{2(\frac{|A|^2}{H^2})}|\nabla(\frac{|A|^2}{H^2})|^2 + \langle \mathbf{X} - \nabla \log(H^2), \nabla(\frac{|A|^2}{H^2})\rangle.$$

Hieraus folgt mit dem starken Maximumsprinzip von Hopf, daß $\frac{|A|^2}{H^2}$ kein inneres Maximum haben kann, außer $\frac{|A|^2}{H^2} \equiv const$. Da an den Enden des Segments $S_{P_0 \to P_1}$ H^2 gegen Null läuft, muß in diesem Fall auch $|A|^2$ gegen Null konvergieren. Damit würde in den Punkten $\mathbf{P}_0/\mathbf{P}_1$ für die Eigenwerte $\lambda_0 = 0$ und $\lambda_1 = 0$ gelten, was Korollar 5.5 widerspricht. An den Stellen $H = 0$, d.h. am Rand eines Segments $S_{P_0 \to P_1}$, divergiert $\frac{|A|^2}{H^2}$ sogar (dort gilt $\lambda_1 = 1/y\sqrt{1+y'^2} \neq 0$, da $\mathbf{M}^n$ als Graph darstellbar ist).

Für $n = 2$ gilt nun aber:

$$\Delta(\frac{|A|^2}{H^2}) \quad = \quad \Delta(\frac{H^2 - 2G}{H^2}) = \Delta(\frac{-2G}{H^2}).$$

Somit hat $\frac{G}{H^2}$ ein isoliertes Maximum, sagen wir bei $\mathbf{Q}_0$. Wir betrachten jetzt verschiedene Fälle im Hinblick auf die Anzahl der Nullstellen von G auf dem Segment $S_{P_0 \to P_1}$. Dazu seien λ_1 und λ_2 die beiden Eigenwerte von A, d.h. $G = \lambda_1 \lambda_2$.

Seien nun beide Wendepunke oberhalb der Geraden durch $\sqrt{n-1}$ gelegen. Wir zeigen, daß nur die Fälle I oder II auftreten können.

1.Fall: $\frac{G}{H^2} > 0$.

(A) Wir nehmen an, daß $\lambda_2(\mathbf{Q}_1) = \lambda_2(\mathbf{Q}_2)$ gleich Null ist. Dann folgt, daß λ_1 ein Vorzeichen hat, die Krümmung der Kurve γ also ihr Vorzeichen nicht wechselt. Es gibt dann zwei Punkte mit senkrechten Tangenten, d.h. wir erhalten in diesem Fall einen 'oberen Bogen'.

(B) Sei nun $\lambda_1(\mathbf{Q}_1) = 0$ und $\lambda_2(\mathbf{Q}_2) = 0$. oBdA sei der Vorzeichenwechsel zuerst bei $\mathbf{Q}_1$, dann bei $\mathbf{Q}_2$. Wir haben also genau einen Vorzeichenwechsel von k sowie genau einen Punkt, an dem die Tangente senkrecht ist. Man kann γ mit Hilfe zweier Graphen Γ_{u_1} und Γ_{u_2} darstellen. Der Graph von Γ_{u_1} ist konvex, und der Graph von Γ_{u_2} hat einen Wendepunkt.

(C) Ganz analog erhalten wir für $\lambda_1(\mathbf{Q}_2) = 0$ und $\lambda_2(\mathbf{Q}_1) = 0$ zwei Graphen Γ_{u_1} und Γ_{u_2}, deren Rolle hier jedoch vertauscht ist.

(D) Wir wollen jetzt zeigen, daß der Fall $\lambda_1(\mathbf{Q}_1)$ und $\lambda_1(\mathbf{Q}_2) = 0$ überhaupt nicht auftreten kann: Die Idee hierbei ist: Wir wissen aus der Bemerkung zu Satz 5.2, daß die Steigungen der Tangenten in den Punkten $\mathbf{Q}_1$,$\mathbf{Q}_2$ ein bestimmtes Vorzeichen haben müssen, je nachdem, auf welcher Seite der y-Achse sie liegen. Dies nützen wir aus, um zu einem Widerspruch zu kommen: Auf beiden Seiten startet die Kurve γ in den Punkten $H = 0$ zur y-Achse hin, denn auf dem ganzen Segment S läßt sich γ als Grahp Γ_u einer Funktion u darstellen. Andernfalls gäbe es mindestens einen Punkt $\mathbf{Q}_3$ mit senkrechter Tangente, was $\lambda_2(\mathbf{Q}_3) = 0$ zur

Folge hätte. Widerspruch!.
(D1) Seien $x(\mathbf{Q}_1), x(\mathbf{Q}_2) < 0$, dann gilt $u'(\mathbf{Q}_1), u'(\mathbf{Q}_2) < 0$ (Bemerkung zu 5.2). Ferner ist $y(\mathbf{Q}_1) > y(\mathbf{Q}_2)$, da aus $u'(\mathbf{Q}_1) < 0$ und $u''(x) < 0$ auf $\Gamma_u|_{[x(\mathbf{Q}_1),x(\mathbf{Q}_2)]}$ folgt, daß $u'(x) < 0$ auf auf diesem Stück zwischen $\mathbf{Q}_1$ und $\mathbf{Q}_2$ gilt. Ferner ist $b(\mathbf{Q}_1) > b(\mathbf{Q}_2)$. Dies folgt aus $u''(x) < 0$ auf $\Gamma_u|_{[x(\mathbf{Q}_1),x(\mathbf{Q}_2)]}$ und der Identität $b'(x) = -y''(x)x < 0$. Das widerspricht aber der Tatsache, daß $b(x) = \frac{1}{y(x)}$:

$$b(\mathbf{Q}_1) = \frac{1}{y(\mathbf{Q}_1)} < \frac{1}{y(\mathbf{Q}_2)} = b(\mathbf{Q}_2).$$

(D2) Sei $x(\mathbf{Q}_1) < 0, x(\mathbf{Q}_2) > 0$. Es gilt dann $u'(\mathbf{Q}_1) < 0$ und $u''(x) \leq 0\ \forall x \in [x(\mathbf{Q}_1), x(\mathbf{Q}_2)]$, was aber $u'(\mathbf{Q}_2) < 0$ ergibt, und somit Satz 5.2 widerspricht $(\mathrm{sign}(\mathrm{x}(\mathbf{X})) = -\mathrm{sign}(\mathrm{u}'(\mathbf{X}))$.
(D3) Sei $x(\mathbf{Q}_1) < 0$ und $x(\mathbf{Q}_2) = 0$. So ist $y(\mathbf{Q}_2) = 1$(Bemerkung zu Satz 5.2). Da $y''(\vec{x}) < 0$ auf dem Stück bis zur y-Achse gilt, und wir $y'(\mathbf{Q}_1) < 0$ haben, ist $y(\mathbf{Q}_1) > 1$. Wegen dieser Tatsache müßte $b(x(\mathbf{Q}_1)) > 1$ gelten. Aber wiederum ist dies mit unserer Gleichung $b(x) = \frac{1}{y(x)}$ nicht zu vereinbaren.
Damit hätten wir diesen Fall abgeschlossen (vgl. Abbildung D).

2.Fall: $\frac{G}{H^2} = 0$.
In diesem Fall gibt es genau eine Nullstelle $\mathbf{Q}_0$ von G und damit auch höchstens einen Wendepunkt. Wir zeigen jedoch, daß dieser Fall überhaupt nicht auftreten kann:
(A) Sei $\lambda_1(\mathbf{Q}_0) = 0$, und $\lambda_2(\mathbf{Q}_0)$ habe ein Vorzeichen.
Dann gilt, daß sich $\mathbf{M}^2$ auf dem ganzen Segment $S_{P_0 \to P_1}$ als die Rotation eines Graphen Γ_u um die x-Achse darstellen läßt. Dieser hat auf dem Stück zwischen $\mathbf{P}_0$ und $\mathbf{P}_1$ genau einen Wendepunkt, ist somit auf einer Seite bei $H = 0$ konkav, was Korollar 5.5 widerspricht.
(B) Sei $\lambda_2(\mathbf{Q}_0) = 0$, und $\lambda_1(\mathbf{Q}_0)$ habe ein Vorzeichen.
Es gibt einen Punkt mit $\lambda_2(\mathbf{Q}_0) = 0$. In diesem Punkt hat die Kurve γ eine senkrechte Tangente. Da dies der einzige Punkt dieser Art zwischen $\mathbf{P}_0$ und $\mathbf{P}_1$ ist, kann man γ wieder mit Hilfe zweier Graphen Γ_{u_1} und Γ_{u_2} darstellen. Da sich das Vorzeichen von $k_\gamma(\mathbf{Q}_0) = \lambda_1$ nicht ändert, ist der Graph der einen Funktion konvex, der Graph der anderen konkav, was ebenfalls Korollar 5.5 widerspricht.
Es zeigt sich also, daß G entweder überhaupt keine oder zwei Nullstelle hat.

3.Fall: $\frac{G}{H^2} < 0$.
Hier haben wir keine Nullstellen von G. Damit behalten die Eigenwerte λ_1 und λ_2 ihr Vorzeichen. Da außerdem die Kurve γ in den Punkten $H = 0$ konvex ist, gilt dies für den ganzen Bogen S. $\square$

Bemerkungen:
(1) In den numerischen Untersuchungen hat sich gezeigt, daß der dritte Fall nicht eintritt. (Die Bedingung $y > \sqrt{n-1}$ müßte demnach auch fallengelassen werden können und mit änlichen Methoden wie im Beweis des Theorems der dritte Fall auszuschließen sein.)
(2) Der Fall $n > 2$ zeigt bei der numerischen Untersuchung dieselben Charakteristika wie der Fall $n = 2$. Es entsteht allerdings folgende algebraische Problematik, weshalb sich der obige Beweis nicht verallgemeinern läßt:

$$|A|^2 - H^2 = -2(n-1)\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2((n-1) - (n-1)^2)$$

ist der allgemeine Ausdruck für die Differenz von $|A|^2$ und H^2 einer Rotationsfläche. Da der zweite Term für $n > 2$ nicht verschwindet, kann man nicht mehr mit einer Differentialungleichung für die Gausskrümmung argumentieren. Es gibt, wenn offenbar nicht qualitativ, so doch geometrisch Unterschiede für $n > 2$. Denn für $\lambda_2 = 0$ folgt zwar nach wie vor $|A|^2 = H^2$, aber bei $\lambda_1 = 0$ gilt nun $|A|^2 > H^2$ im Unterschied zum Fall $n = 2$. Die Punkte mit $|A|^2 = H^2$ geben also nicht mehr an, ob die zweite Fundamentalform ihr Vorzeichen wechselt. Aus $|A|^2 = H^2$ folgt lediglich

$$\lambda_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda_1 = \frac{(n-1) - (n-1)^2}{2(n-1)}\lambda_2 = -\frac{n-2}{2}\lambda_2 \neq 0.$$

Kapitel 6

Stabilität homothetischer Lösungen des MKF

Wir wollen uns in diesem Kapitel mit der Stabilität von homothetischen Lösungen des MKF, also der stationären Punkte des Funktionals

$$I_M = \int\limits_M e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu_M = \int\limits_M d\mu_{\overline{g}}$$

d.h. Minimalflächen in $(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g}) = (\mathbb{R}^{n+1}, e^{-\frac{|x|^2}{n}}\delta_{ij})$ beschäftigen. Als Anstoß dazu kann man z.B. die Arbeit von L. Barbosa und M. do Carmo ([BDo]) über die Stabilität von Hyperflächen konstanter mittlerer Krümmung ansehen.

Theorem 6.1 (Barbosa - Do Carmo) *Sei* $\mathbf{M}^n$ *eine kompakte, orientierbare Mannigfaltigkeit,* $\mathbf{X} : \mathbf{M}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ *eine Immersion mit konstanter mittlerer Krümmung* $\neq 0$*. Dann ist* $\mathbf{X}$ *genau dann stabil, wenn* $\mathbf{X} = \mathbf{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Hier bedeutet stabil 'stabil' bezüglich volumenerhaltender Variationen.
Flächen konstanter mittlerer Krümmung sind Flächen mit minimaler Oberfläche bei konstantem Volumen. die Stabilität einer Fläche spielt in physikalischen Modellen die Rolle der möglichen Existenz einer solchen Fläche. Wie sieht das Stabilitätsverhalten der homothetischen Lösungen respektive von Minimalflächen in einer bestimmten Metrik aus?

6.1 Der Stabilitätsoperator

Betrachten wir zunächst die zweite Variation des Funktionals $I = \int\limits_M e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu_M$. Wir werden sie sowohl als als Funktional mit Gewichtsfunktion als auch als Oberflächenfunktional in $(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$ berechnen.

(A) **Mit Gewichtsfunktion:**

$$
\begin{aligned}
D^2 I(h_1,h_2) &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0} I(\mathbf{X}+(\varepsilon h_1+\tau h_2)\boldsymbol{\nu}) \\
&= \frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0} DI(h_1)(\mathbf{X}+\tau h_2\boldsymbol{\nu}) \\
&= \frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}\int\limits_M (\langle\mathbf{X}_\tau,\boldsymbol{\nu}_\tau\rangle - H_\tau)h_1 e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu_M \\
&= \int\limits_M \Big[(\langle\frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}\mathbf{X}_\tau,\boldsymbol{\nu}_\tau\rangle + \langle\mathbf{X}_\tau,\frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}\boldsymbol{\nu}_\tau\rangle)h_1 \\
&\quad -\frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}(H_\tau)h_1 \\
&\quad +(\langle\mathbf{X}_\tau,\boldsymbol{\nu}_\tau\rangle - H_\tau)h_1(-\langle\mathbf{X}+\tau h_2\boldsymbol{\nu},-h_2\boldsymbol{\nu}\rangle) \\
&\quad +(\langle\mathbf{X}_\tau,\boldsymbol{\nu}_\tau\rangle - H_\tau)h_1(-h_2 H)\Big] e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu_M \\
&= \int\limits_M h_1\{h_2 + \langle\vec{x},\nabla^{\mathrm{M}} h_2\rangle - (\Delta h_2 + h_2|\mathrm{A}|^2) \\
&\qquad\qquad +(\langle\mathbf{X},\boldsymbol{\nu}\rangle - H)^2 h_2\} e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu_M
\end{aligned}
$$

Für den stationären Fall, d.h. für homothetische Lösungen ($H = \langle\mathbf{X},\boldsymbol{\nu}\rangle$), gilt also:

$$D^2 I(h_1,h_2) = -\int\limits_M h_1\{\ \Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} h_2 - \langle\mathbf{X},\nabla^{\mathrm{M}} h_2\rangle) + h_2(1+|A|^2)\ \}\ e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu_M \quad (6.1)$$

(B) **Oberflächenfunktional in** $(\mathbb{R}^{n+1}, e^{-\frac{|x|^2}{n}}\delta_{ij})$**:**

$$
\begin{aligned}
D^2 I(h_1,h_2) &= \frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\int\limits_M d\mu_{\overline{g}} \\
&= \int\limits_M -h_1\frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}(\overline{H}_\tau) d\mu_{\overline{g}_\tau} + \int\limits_M -h_1\overline{H}_\tau\frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}(d\mu_{\overline{g}_\tau}) \\
&= \int\limits_M -h_1\{\Delta^{\mathrm{N}^{n+1}} h_2 + h_2(|\overline{\mathrm{A}}|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}))\} - h_1 h_2 \overline{H}^2 d\mu_{\overline{g}}
\end{aligned}
$$

Also für stationäre Flächen:

$$D^2 I(h_1,h_2) = \int\limits_M -h_1\{\ \Delta^{\mathrm{N}^{n+1}} h_2 + h_2(|\overline{\mathrm{A}}|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}))\} d\mu_{\overline{g}} \quad (6.2)$$

Es stellt sich nun die Frage, inwieweit diese beiden Operatoren übereinstimmen bzw. welchen Unterschied es macht, ob man in $(\mathbb{R}^{n+1}, \delta_{ij})$ oder in $(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g}_{ij})$ rechnet. Hier tritt eine Feinheit auf, welche wir bislang noch nicht berücksichtigt haben. Beide Operatordarstellungen haben wir für Normalenvariationen in Richtung des in der jeweiligen Metrik (g oder $\overline{g}$) normierten **Einheitsnormalenvektorfeldes** $\boldsymbol{\nu}$ bzw. $\overline{\boldsymbol{\nu}}$ berechnet. Diese Normierung ist aber nicht dieselbe (nur die Richtung bleibt erhalten), und wir haben mit $\Psi := e^{\frac{|\mathbf{x}|^2}{n}}$:

$$\overline{\boldsymbol{\nu}} = \Psi^{-1}\ \boldsymbol{\nu} \qquad [\ 1 = |\overline{\boldsymbol{\nu}}|_{\overline{g}} = \Psi\ |\overline{\boldsymbol{\nu}}|_g\ ]$$

Also gilt

$$D^2 I(\Psi h_1, \Psi h_2)_{\overline{g}} = D^2 I(h_1, h_2)_g.$$

Für uns ist zunächst die Tatsache wichtig, daß aus der Symmetrie der einen Darstellung die Symmetrie der anderen folgt. Denn für kompakte Mannigfaltigkeiten $\mathbf{M}^n$ $(\partial M = 0)$ gilt:

$$\int_M g \nabla_i f d\mu_g = \int_{\partial M} g f d\mu_g - \int_M \nabla_i g f d\mu_g = -\int_M \nabla_i g f d\mu_g$$

Also:

$$\begin{aligned} D^2 I(h_1, h_2) &= -\int_M h_1 \Delta^{\mathbf{N}^{n+1}} h_2 + h_1 h_2 (|\overline{\mathrm{A}}|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu})) d\mu_{\overline{g}} \\ &= -\int_M -\overline{\nabla}_i h_1 \overline{\nabla}_i h_2 + h_1 h_2 (|\overline{\mathrm{A}}|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu})) d\mu_{\overline{g}} \\ &= -\int_M h_2 \Delta^{\mathbf{N}^{n+1}} h_1 + h_2 h_1 (|\overline{\mathrm{A}}|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu})) d\mu_{\overline{g}} \\ &= D^2 I(h_2, h_1) \end{aligned} \tag{6.3}$$

Man beachte, daß nur in dieser Darstellung die Voraussetzung gegeben ist, daß die kovariante Ableitung mit dem Oberflächenmaß 'zusammenpaßt', d.h. beide von derselben Metrik induziert werden. Und man somit überhaupt partiell integrieren kann.
Wir führen folgende Bezeichnung ein:

Definition 6.2 *Es bezeichne*

$$\ll g, f \gg_{L^2(\overline{g})(M)} := \int_M g f e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu_M = \int_M g f d\mu_{\overline{g}} \tag{6.4}$$

das Skalarprodukt auf $L^2(\mathbf{M}^n)$ *in der Metrik* $\overline{g}$.

Man kann auch bezüglich dieses Skalarpoduktes den Satz von Fischer-Riesz (vgl. [SW]) anwenden und erhält zu jeder linearen Abbildung T (insbesondere DI oder D^2I) einen darstellenden Vektor $\mathbf{Z}_T$: $F(\mathbf{X}) = \ll \mathbf{Z}_T,\ \mathbf{X} \gg_{L^2(\overline{g},M)}$, also für DI oder D^2I den Gradienten:

$$DI(f) = \ll {}^{L^2(\overline{g})}\nabla I,\ f \gg_{L^2(\overline{g},M)} \quad \text{und} \quad D^2I(f,g) = \ll {}^{L^2(\overline{g})}\nabla^2 I(g),\ f \gg_{L^2(\overline{g},M)}$$

Mit ${}^{L^2(\overline{g})}\nabla I = \overline{H}$ und

$$\begin{aligned} {}^{L^2(\overline{g})}\nabla^2 I(g) &= ({}^{\overline{g}}\Delta\Psi^{-1}g - (|\overline{\mathrm{A}}|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}))\Psi^{-1}g)\Psi^{-1} \\ &= ({}^{\delta}\ \Delta\Psi^{-1}g - \langle \mathbf{X}, \nabla\Psi^{-1}g\rangle + (1+|A|^2)\Psi^{-1}g)\Psi^{-1}. \end{aligned}$$

6.2 Eigenwerte des Stabilitätsoperators auf der Sphäre

Wir werden im folgenden die Stabilität der Sphäre mit Radius $\sqrt{n}$, die wir in Kapitel 4 kennengelernt haben, berechnen. Aufgrund der Tatsache, daß alle konvexen Startmannigfaltigkeiten bei der Evolution unter dem MKF 'rund' werden (vgl. [Hu1]), ist zu erwarten, daß wir damit ein Beispiel für eine stabile Mannigfaltigkeit erhalten. Dazu gehen wir wie folgt vor:

Proposition 6.3 *Die Sphäre* $\mathbf{S}^{\mathrm{n}}{}_{\sqrt{n}}$ *in* $(\mathbf{N}^{n+1}, e^{-\frac{|x|^2}{2}}\delta_{ij})$ *ist isometrisch isomorph zu der Sphäre* $\mathbf{S}^{\mathrm{n}}{}_{\sqrt{\frac{n}{e}}}$ *in* $(\mathbb{R}^{n+1}, \delta_{ij})$

Beweis: Auf der Sphäre vom Radius $\sqrt{n}$ gilt, daß $g_{ij} = e^{-1}\delta_{ij}$ ist. Wir können uns also diese Sphäre in den $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der Metrik $g_{\alpha\beta} = e^{-1}\delta_{\alpha\beta}$ isometrisch eingebettet denken. Die Multiplikation der Standardmetrik auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$ mit einem konstanten Faktor e^{-1} wird durch eine Homothetie $E : \mathbf{x} \to \sqrt{e}\mathbf{x}$ ausgeglichen, d.h. die Sphäre vom Radius $\sqrt{n}$ in der Metrik δ_{ij} entspricht einer Sphäre vom Radius $\sqrt{\frac{n}{e}}$ in der Metrik δ_{ij}. □

Da der Stabilitätsoperator im wesentlichen dem Laplace-Operator auf der Sphäre entspricht, berechnen wir als nächstes die Eigenwerte von $\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}}_{\mathbf{M}^n}$. Hierzu verwenden wir das Korollar 2.8. Darin hatten wir berechnet, daß für den Laplace-Operator auf der Sphäre gilt:

$$(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} f)\Big|_{\mathbf{S}^{\mathrm{n}}{}_R} = \Delta^{\mathbf{S}^{\mathrm{n}}{}_R}(f\Big|_{\mathbf{S}^{\mathrm{n}}{}_R}) + (\frac{\partial^2}{\partial r^2} f)\Big|_{\mathbf{S}^{\mathrm{n}}{}_R} + \frac{n}{R}(\frac{\partial}{\partial r} f)\Big|_{\mathbf{S}^{\mathrm{n}}{}_R}.$$

Damit können wir die Eigenwerte der Sphäre berechnen (wir folgen hier [BGM]). Um dies zu tun, sei noch einmal kurz an die **harmonischen homogenen Polynome** erinnert. Sei $H(n) :=$ Menge aller homogenen Polynome auf

$\mathbb{R}^{n+1}$, und $H := \bigcup_{n\in\mathbf{N}} H(n)$. Dann ist der Laplace - Operator eine Abbildung von $H(n)$ nach $H(n-2)$ und hat als Kern die harmonischen homogenen Polynome:

$$HH(n) := ker(\Delta\Big|_{H(n)})$$

Als einfache Beispiele seien die Real- und Imaginärteile der komplexen Funktionen $(x+iy)^n$ genannt:

$$Re(x+iy)^n, \qquad Im(x+iy)^n \in HH(n)$$

$$\begin{array}{ll} \underline{n=2:} & Re(x+iy)^2 = x^2-y^2,\ Im(x+iy)^2 = 2xy \\ \underline{n=3:} & Re(x+iy)^3 = x^3-3xy^2,\ Im(x+iy)^3 = -y^3+2x^2y. \quad \text{etc...} \end{array}$$

(vgl. Storch-Wiebe, Band III [SW])
Für $f \in HH(n)$ gilt nun $f(r,\phi_1,...\phi_n) = r^n\Psi(\phi_1,...\phi_n)$, d.h. in Polarkoordinaten ist f das Produkt von r^n und einer Kugelflächenfunktion Ψ. Man benutzt die Tatsache, daß die harmonischen homogenen Polynome die rechte Seite annullieren, und die beiden letzten Terme der linken Seite der obigen Gleichung zu einem Vielfachen von sich machen (sofern man einen festen Radius wählt - also nur auf einer Sphäre). Da die harmonischen homogenen Polynome auf $\mathbb{R}^{n+1}$ eine dichte Untermenge des $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ darstellen, genügt es, diese Eigenpolynome von Δ sowie die zugehörigen Eigenwerte zu finden. Sei also $f \in H^k(\mathbb{R}^{n+1})$ ein homogenes Polynom mit $\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} f \equiv 0$. Dann folgt:

$$f = r^k(f\Big|_{\mathbf{S}^n{}_1}) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial r}f = kr^{\ k-1}(f\Big|_{\mathbf{S}^n{}_1})$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}f = k(k-1)r^{\ k-2}(f|_{\mathbf{S}^n{}_1})$$

Wir erhalten also insgesamt, daß

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathbf{S}^n{}_R}(f\Big|_{\mathbf{S}^n{}_R}) &= (\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}}f)\Big|_{\mathbf{S}^n{}_R} - (\frac{\partial^2}{\partial r^2}f)\Big|_{\mathbf{S}^n{}_R} - \frac{n}{R}(\frac{\partial}{\partial r}f)\Big|_{\mathbf{S}^n{}_R} \\ &= 0 - k(k-1)R^{\ k-2}(f\Big|_{\mathbf{S}^n{}_1}) - \frac{n}{R}kR^{\ k-1}(f\Big|_{\mathbf{S}^n{}_1}) \\ &= -(k(k-1)R^{\ k-2} + \frac{n}{R}kR^{\ k-1})\ (f\Big|_{\mathbf{S}^n{}_1}) \\ &= -k((k-1)R^{\ -2} + nR^{\ -2})R^{\ k}\ (f\Big|_{\mathbf{S}^n{}_1}) \\ &= -k(n+(k-1))R^{\ -2}\ (f\Big|_{\mathbf{S}^n{}_R}) \end{aligned}$$

$$= -\frac{k(n+k-1)}{R^{-2}}\,(f\Big|_{\mathbf{S}^n{}_R}).$$

Die Eigenwerte der Sphäre $\mathbf{S}^n{}_R$ sind also $\lambda_k = -\frac{k(n+k-1)}{R^2}$. Mit der Proposition 6.3 ergibt sich für $\mathbf{S}^n{}_{\sqrt{n}}$ in $(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$ folgendes Lemma:

Lemma 6.4 *Die Eigenwerte des Laplace - Operators auf der Sphäre* $\mathbf{S}^n{}_{\sqrt{n}}$ *in* $(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$ *sind*

$$\overline{\lambda}_k = \frac{k(n(k-1)+1)}{n}\ \mathrm{e}.$$

6.3 Konforme Transformationen

Sei nun allgemein $\mathbf{N}^{n+1}$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der Metrik g, sei Ψ eine glatte strikt positive (> 0) Funktion auf $\mathbf{N}^{n+1}$. Dann definiert

$$\overline{g} = \Psi^2\ g$$

eine neue Metrik auf $(\mathbf{N}^{n+1}, \overline{g})$, wobei sich die Winkelmessung in Bezug auf die 'alte' Metrik g nicht ändert. D.h. die Multiplikation mit Ψ^2 stellt einen konformen Wechsel dar. Größen wie die kovariante Ableitung und die zweite Fundamentalform kennzeichnen wir mit g bzw. $\overline{g}$ je nachdem bezüglich welcher Metrik diese definiert sind. Es gilt dann:

Lemma 6.5 *Seien g bzw. $\overline{g}$ zwei konforme Metriken auf* $\mathbf{N}^{n+1}$, *wobei* $\overline{g} = \Psi^2\ g$ *ist. Dann gilt folgender Zusammenhang für die kovariante Ableitung in* $(\mathbf{N}^{n+1}, \overline{g})$ *und in* $(\mathbf{N}^{n+1}, g)$

$${}^{\overline{g}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \;=\; {}^{g}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \langle \mathbf{Y}, {}^{g}\nabla_{\mathbf{X}}(\log\Psi)\rangle + \langle \mathbf{X}, {}^{g}\nabla_{\mathbf{Y}}(\log\Psi)\rangle + \langle \mathbf{Y}, \mathbf{X}\rangle_g\ {}^{g}\nabla(\log\Psi)$$

Beweis: Wir rechnen dies in einem Koordinatensystem nach. Da die kovariante Ableitung eine lokale Eigenschaft ist, können wir die Koordinaten so wählen, daß die Christoffelsymbole in einem Punkt $\mathbf{P}$, $\Gamma^k_{ij}(\mathbf{P})$, bezüglich - sagen wir - der Metrik g 'verschwinden'. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
{}^{\overline{g}}\Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2}\overline{g}^{\ km}\{\ \partial_i\overline{g}_{mj} + \partial_j\overline{g}_{mi} + \partial_m\overline{g}_{ij}\ \} \\
&= \frac{1}{2}\Psi^{-2}g^{km}\{\ \partial_i g_{mj} + \partial_j g_{mi} + \partial_m g_{ij}\ \} \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\Psi^{-2}g^{km}\{\ \partial_i(\Psi^2)g_{mj} + \partial_j(\Psi^2)g_{mi} + \partial_m(\Psi^2)g_{ij}\ \} \\
&= \frac{1}{2}\Psi^{-2}g^{km}\{\ \partial_i g_{mj} + \partial_j g_{mi} + \partial_m g_{ij}\ \} \\
&\qquad\qquad + \Psi^{-1}g^{km}\{\ \partial_i(\Psi)g_{mj} + \partial_j(\Psi)g_{mi} + \partial_m(\Psi)g_{ij}\ \} \\
&= \overbrace{{}^{g}\Gamma^k_{ij}}^{=0} + \Psi^{-1}g^{km}\{\ \partial_i(\Psi)g_{mj} + \partial_j(\Psi)g_{mi} + \partial_m(\Psi)g_{ij}\ \}.
\end{aligned}$$

Für die kovariante Ableitung gilt dann

$$\begin{aligned}
{}^{\overline{g}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} &= (\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{Y} + {}^{\overline{g}}\Gamma_{ij}^{k}\mathbf{e}_k Y^i)\ X^i \\
&= (\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{Y} + {}^{g}\Gamma_{ij}^{k}\mathbf{e}_k Y^i)\ X^i \\
&\quad + \Psi^{-1} g^{km}\{\ \partial_i(\Psi) g_{mj} + \partial_j(\Psi) g_{mi} + \partial_m(\Psi) g_{ij}\ \}\mathbf{e}_k X^i Y^i \\
&= {}^{g}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + +\Psi^{-1} g^{km}\{\ \partial_i(\Psi) g_{mj} + \partial_j(\Psi) g_{mi} + \partial_m(\Psi) g_{ij}\ \}\mathbf{e}_k X^i Y^i \\
&= {}^{g}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + +g^{km}\{\ \partial_i(\log\Psi) g_{mj} + \partial_j(\log\Psi) g_{mi} + \partial_m(\log\Psi) g_{ij}\ \}\mathbf{e}_k X^i Y^i \\
&= {}^{g}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \langle \mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}}(\log\Psi)\rangle + \langle \mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Y}}(\log\Psi)\rangle + \langle \mathbf{Y}, \mathbf{X}\rangle_g\ {}^{g}\nabla(\log\Psi).
\end{aligned}$$

□

Lemma 6.6 *Sei* $\mathbf{M}^n \subseteq \mathbf{N}^{n+1}$ *eine Hyperfläche, und* g *bzw.* $\overline{g}$ *zwei konforme Metriken auf* $\mathbf{N}^{n+1}$*. Wobei* $\overline{g} = \Psi\, g$ *ist . Dann gilt für die Eigenwerte* λ_i *bzw.* $\overline{\lambda}_i$ *der zweiten Fundamentalform von* $\mathbf{M}^n$ *in* $(\mathbf{N}^{n+1}, \overline{g})$ *bzw.* $\mathbf{M}^n$ *in* $(\mathbf{N}^{n+1}, \overline{g})$ *die folgende Beziehung:*

$$\overline{\lambda}_i = \Psi^{-1}\ \lambda_i + \Psi^{-2}\ \nabla_{\boldsymbol{\nu}}\Psi.$$

Beweis: Wir wählen wieder ein orthonormales n-Bein $\{\mathbf{e}_i\}$ des Tangentialraumes von $\mathbf{M}^n$ und den der Orientierung entsprechenden Normalenvektor $\boldsymbol{\nu}$. Die zweite Fundamentalform ist definiert als

$$\overline{h}_i^{\ j} \quad = \quad -\ \langle \mathbf{e}_l,\ {}^{\overline{g}}\nabla_{\mathbf{e}_i}\overline{\boldsymbol{\nu}}\ \rangle_{\overline{g}}\ \overline{g}^{\ lj}.$$

[Man beachte, daß, obwohl wir in den Koordinaten von $\{\mathbf{e}_i, \boldsymbol{\nu}\}$ rechnen, das Normalenvektorfeld immer bezüglich der jeweiligen Metrik (g oder $\overline{g}$) normiert sein muß.] Und da $\langle\overline{\boldsymbol{\nu}},\ \mathbf{e}_i\rangle_{\overline{g}} = \langle\boldsymbol{\nu},\ \mathbf{e}_i\rangle_{\overline{g}} = 0\ \forall\ i$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\overline{h}_i^{\ j} &= -\ \langle \mathbf{e}_l,\ {}^{\overline{g}}\nabla_{\mathbf{e}_i}\overline{\boldsymbol{\nu}}\ \rangle_{\overline{g}}\ \overline{g}^{lj} \\
&= \langle\ {}^{\overline{g}}\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_l,\ \overline{\boldsymbol{\nu}}\ \rangle_{\overline{g}}\ \overline{g}^{lj} \\
&= \langle\ {}^{\overline{g}}\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_l,\ \Psi^1\boldsymbol{\nu}\ \rangle_{\overline{g}}\ (\Psi^{-2} g^{lj}) \\
&= \Psi^{-1}\langle\ {}^{g}\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_l + \mathbf{e}_i\nabla_{\mathbf{e}_l}(\log\Psi) + \mathbf{e}_l\nabla_{\mathbf{e}_i}(\log\Psi) \\
&\qquad\qquad -\langle\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l\rangle_g\ {}^{g}\nabla(\log\Psi),\ \boldsymbol{\nu}\ \rangle_{\overline{g}}\ g^{lj} \\
&= \Psi^{-1}\langle\ {}^{g}\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_l,\ \boldsymbol{\nu}\ \rangle_{\overline{g}}\ g^{lj} + 0 - \Psi^{-1}\langle\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_l\rangle_g\ g^{lj}\ \langle\boldsymbol{\nu},\ {}^{g}\nabla(\log\Psi)\rangle_{\overline{g}} \\
&= \Psi^{-1}\langle\ {}^{g}\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_l,\ \boldsymbol{\nu}\ \rangle_{\overline{g}}\ g^{lj} - \Psi^{-1}\langle\boldsymbol{\nu},\ {}^{g}\nabla(\log\Psi)\rangle_{\overline{g}}\ \delta_i^j \\
&= \Psi^{-1} h_i^{\ j} - \Psi^{-1}\Psi^{-1}\langle\boldsymbol{\nu},\ {}^{g}\nabla(\Psi)\rangle_{\overline{g}}\ \delta_i^j \\
&= \Psi^{-1} h_i^{\ j} - \Psi^{-2}\ {}^{g}\nabla_{\boldsymbol{\nu}}(\Psi)\delta_i^j.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für die Darstellung der zweiten Fundamentalform in der Basis $\{\mathbf{e}_i\}$

$$\overline{h}_i^{\ j} \quad = \quad \Psi^{-1} h_i^{\ j} + \operatorname{diag}(\Psi^{-2}\ {}^{g}\nabla_{\boldsymbol{\nu}}\Psi).$$

Wählt man nun die Basis $\mathbf{e}_i$, so daß $h_i{}^j = \mathrm{diag}\,(\lambda_i)$, so erhält man die obige Behauptung . $\Box$

Folgerung: An dieser Stelle sei noch bemerkt, daß die von uns untersuchte Sphäre totalgeodätisch in $\mathbf{N}^{n+1}$ ist. Dazu betrachten wir:

$$|\overline{\mathrm{A}}|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\overline{\lambda}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\Psi^{-1}\lambda_i + \Psi^{-2}\partial_{\boldsymbol{\nu}}(\Psi))^2.$$

Da in diesem speziellen Fall der Faktor Ψ konstant $e^{-\frac{|\mathbf{X}|^2}{2n}} = e^{-\frac{1}{2}}$ ist, und die Eigenwerte der zweiten Fundamentalform im flachen $\mathbb{R}^{n+1}$ den Wert $\lambda_i = \sqrt{\frac{n}{e}}$ haben, ergibt sich mit

$$\begin{aligned}
\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi &= e^{-\frac{|\mathbf{X}|^2}{2n}} \langle \boldsymbol{\nu}, -\frac{\mathbf{X}}{n} \rangle \\
&= -\frac{\sqrt{n}}{n} e^{-1} \underbrace{\langle \boldsymbol{\nu}, \hat{\mathbf{X}} \rangle}_{=1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{ne}}
\end{aligned}$$

das Quadrat der Krümmung zu

$$|\overline{\mathrm{A}}|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{e^{-1}}\sqrt{\frac{e}{n}} - e\frac{1}{\sqrt{ne}})^2 = 0.$$

Nun wollen wir noch den Ricci-Term in unserem Stabilitätsoperator berechnen. Dazu verwenden wir

Lemma 6.7 *Seien g bzw. $\overline{g}$ zwei konforme Metriken auf $(\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$, wobei $\overline{g} = \Psi^2\, g$ ist . Dann gilt für den Riccitensor*

$$\begin{aligned}
\overline{R}_{ij} &= \mathrm{R}_{ij} + (n-1)(-\,{}^g\nabla_{ij}(\log\Psi) + {}^g\nabla_i(\log\Psi){}^g\nabla_j(\log\Psi)) \\
&\quad -({}^g\nabla_k^k \log\Psi + (n-1){}^g\nabla^k\log\Psi\;{}^g\nabla_k\Psi)\, g_{ij} \qquad \textit{(vgl. [Au]).}\ \Box
\end{aligned}$$

Damit können wir jetzt den Term $\mathrm{Ric}\,(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu})$ in unserer Metrik berechnen. Zunächst sind dabei die Terme

$$\nabla_i \log\Psi = -\frac{X_i}{n} \quad \text{und} \quad \nabla_i\nabla_j \log\Psi = -\frac{1}{n}\delta_{ij}$$

wichtig. Wir erhalten daraus

$${}^g\nabla_k^k \log\Psi = -\frac{n+1}{n} \quad \text{und} \quad \nabla^k \log\Psi\nabla^k \log\Psi = \frac{1}{n^2}|\mathbf{X}|^2_{\mathbb{R}^{n+1}}.$$

Dies eingesetzt ergibt schließlich:

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Ric}}(\overline{\boldsymbol{\nu}},\overline{\boldsymbol{\nu}}) &= -(n-1)(-\frac{1}{n})\,\delta_{ij}\,\overline{\nu}^i\,\overline{\nu}^j + (n-1)(-\frac{1}{n})\,X_i\overline{\nu}^i\,X_j\overline{\nu}^j \\
&\quad -(-\frac{n+1}{n}+\frac{n-1}{n^2}|\mathbf{X}|^2\,)\,\overline{\nu}_i\,\overline{\nu}_j\,\delta_{ij} \\
&= |\overline{\boldsymbol{\nu}}|^2\,(\frac{n-1}{n}+\frac{n+1}{n}+\frac{n-1}{n^2}\,H^2_{\mathbb{R}^{n+1}}-\frac{n-1}{n^2}|\mathbf{X}|^2\,) \\
&= \Psi^2\,(2+\frac{n-1}{n}(\underbrace{\langle \mathbf{x},\boldsymbol{\nu}\rangle^2-\langle \mathbf{X},\ \mathbf{X}\ \rangle\langle \boldsymbol{\nu},\ \boldsymbol{\nu}\ \rangle}_{\leq 0})). \qquad (6.5)
\end{aligned}
$$

Auf der Sphäre ist $\langle \mathbf{x},\boldsymbol{\nu}\rangle^2 = H^2 = n = |\mathbf{X}|^2$, woraus sich

$$\overline{\mathrm{Ric}}(\overline{\boldsymbol{\nu}},\overline{\boldsymbol{\nu}}) = 2\,\Psi^{-2} = 2e$$

ergibt. Insgesamt erhalten wir nun:

Die Eigenwerte des Stabilitätsoperators auf der Späre $\mathrm{S^n}_{\sqrt{n}}$ sind

$$\lambda_k = (\frac{k(n+k-1)}{n}-2)\,\mathrm{e}.$$

6.4 Ein vernünftiger Stabilitätsbegriff

Wir hatten in Kapitel 3 bezüglich eines festen 'Blow-up'-Punktes $\mathbf{P}$ mit einer bestimmten 'Blow-up'-Rate f reskaliert:

1. $\mathbf{P} = \mathbf{0}$
2. $f(t) = \sqrt{2(T-t)}$.

Um einen vernüftigen Stabilitätsbegriff zu erhalten, betrachten wir zunächst die Variationen, welche diesen beiden Reskalierungsmerkmalen entsprechen:

1. Translationen der Hyperfläche in $\mathbb{R}^{n+1}$
2. Homothetien bezüglich $\mathbf{P}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$.

6.5 Homothetien

Wir betrachten also Variationen der Gestalt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}_t^H &= \mathbf{X}_0 + t\mathbf{X}_0 \\
\mathbf{X}_t^H &= f(t)\mathbf{X}_0 \qquad [f(t) := (1+t)],
\end{aligned}
$$

d.h. wir versuchen, diese Variation durch eine gleichwertige Normalenvariation zu ersetzen. Dann können wir unseren Stabilitätsoperator aus Abschnitt 2 verwenden, welchen wir ja lediglich bezüglich solcher Normalenvariationen berechnet hatten. Die $\mathbf{X}_t^H$ entsprechende Normalenvariation ist $\mathbf{X}_t^H = \mathbf{X} + t\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}\rangle \boldsymbol{\nu}$, da man nur auf die Normale zu projizieren braucht. Der Tangentialanteil entspricht einem Diffeomorphismus auf $\mathbf{M}^n$, ändert also nichts an der geometrischen Form, und kann daher vernachlässigt werden (vgl. [BDo]). Unsere Variationsfunktion ist also gerade die mittlere Krümmung.

$$h_1 \;=\; \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}\rangle = H$$

Vorüberlegung: Alle - nennen wir sie 'Variationsmannigfaltigkeiten' - $M_t = \mathbf{X}_t^H(\mathbf{M}^n{}_0)$ sind ebenfalls homothetische Lösungen. Die geometrische Form von $\mathbf{M}^n$ hat sich ja nicht verändert, nur deren Größe. Es ist die Kontraktionsgeschwindigkeit, welche sich ändert. Denn für eine Homothetie $\Lambda : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit dem Faktor $\lambda \in \mathbf{R}$ gilt, daß $H_{\Lambda(M_0)}(\Lambda(p)) = \lambda^{-1} H_{M_0}(p)$.

$$\begin{aligned}
[\; g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{F}, \frac{\partial}{\partial x_j}\mathbf{F}\rangle \;&\to\; \Lambda(g_{ij}) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}\lambda\mathbf{F}, \frac{\partial}{\partial x_j}\lambda\mathbf{F}\rangle \qquad \text{und}\\
h_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{F}, \frac{\partial}{\partial x_j}\mathbf{F}\rangle \;&\to\; \Lambda(h_{ij}) = -\langle \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\lambda\mathbf{F}, \boldsymbol{\nu}\rangle = \lambda h_{ij} \to \Lambda(h_i^j) = \lambda^{-1} h_i^j\,]
\end{aligned}$$

In Anhang D zeigen wir, daß die Geschwindigkeit in $\mathbf{F}_0$-Richtung gleich

$$\alpha \;=\; -\frac{H}{\langle \boldsymbol{\nu},\, \mathbf{F}_0\rangle} \propto H$$

ist, d.h. proportional zur mittleren Krümmung H. Wir hatten aber bezüglich der Kontraktionsgeschwindigkeit, welche aus der mittleren Krümmung einer 'bestimmten Größe' von M_0 resultiert, reskaliert. D.h. für das Verhalten von $\mathbf{X}_t^H$:

$t > 0:$ $\mathbf{X}_t^H$ schrumpft langsamer als man reskaliert $\Rightarrow \mathbf{X}_t^H(M_0)$ läuft gegen ∞
$t < 0:$ $\mathbf{X}_t^H$ schrumpft schneller als man reskaliert $\Rightarrow \mathbf{X}_t^H(M_0)$ läuft gegen 0.

Proposition 6.8 *Sei* $\mathbf{M}^n$ *eine homothetische Lösung des MKF, welche keine Minimalfläche ist* ($H \not\equiv 0$), *dann gilt* $D^2 I(h_1, h_1) < 0$.
Genauer gilt: ${}^{L^2(\bar{g})}\nabla I(h_1) = -\,2\,h_1$, *d.h*

$$h_1 \;=\; \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}\rangle = H$$

ist eine **Eigenfunktion** des Stabilitätsoperators $D^2 I_M$ zum **Eigenwert -2**.

Bemerkung : Die einzigen Minimalflächen, welche auch homothetische Lösungen des MKF sind, sind die Hyperebenen $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Die einzigen Mannigfaltigkeiten, für welche $h_1 = 0$ ist, und die somit nicht strikt 'instabil' bezüglich

Variationen in Richtung h_1 sind, bleiben also unverändert unter dem MKF. Dies überrascht auch nicht, da dann die Reskalierungsgeschwindigkeit gleich Null ist. **Alle** anderen Flächen sind instabil.
Beweis: Wir verwenden die aus [Hu3] bekannte Identität

$$\Delta h_1 = \Delta H = H - H|A|^2 + \langle \mathbf{X}, \nabla H \rangle,$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
D^2 I(h_1, h_1) &= \ll {}^{L^2(\overline{g})}\nabla(h_1), h_1 \gg_{L^2(\overline{g})} \\
&= -\int_M h_1 \Delta h_1 - \langle \mathbf{X}, \nabla h_1 \rangle h_1 + (h_1)^2(1 + |A|^2) e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu_M \\
&= -\int_M H(1 - |A|^2) h_1 + \langle \mathbf{X}, \nabla H \rangle h_1 \\
&\qquad\qquad - \langle \mathbf{X}, \nabla h_1 \rangle h_1 + (h_1)^2 (1 + |A|^2) e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu_M \\
&= \int_M -2 h_1 \, h_1 \; e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu_M \\
&= -2 \ll h_1, h_1 \gg_{L^2(\overline{g})},
\end{aligned}$$

womit die Proposition gezeigt wäre. □

6.6 Translationen

Nachdem wir nun mit Hilfe der geometrischen Überlegung, daß es eine natürliche Reskalierungsrate gibt, die erste Eigenfunktion unseres Stabilitätsoperators gefunden haben, versuchen wir nun dasselbe mit den Reskalierungspunkten. Wir gehen dabei ganz analog vor und überlegen uns zunächst, was die richtige Normalenvariation ist. Wie oben erhalten wir für Translationsverschiebungen

$$\mathbf{X}_t^T = \mathbf{X}_0 + t\mathbf{a} \qquad \text{mit } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ konstant}$$

die $\mathbf{X}_t^T$ entsprechende Normalenvariation $\mathbf{X}_t^T = \mathbf{X} + t\langle \boldsymbol{\nu}, \ \mathbf{a} \rangle$. Als Variationsfunktion erhalten wir in diesem Fall also:

$$h_2 = \langle \boldsymbol{\nu}, \ \mathbf{a} \rangle.$$

Auch hier ist nicht mit Stabilität zu rechnen, denn die 'Variationsmannigfaltigkeiten' $M_t = \mathbf{X}_t^T(\mathbf{M}^n{}_0)$ sind wieder homothetische Lösungen. Hier ist es die Tatsache, daß $0 \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ fest ist. Eine Translationsauslenkung wird nicht vom MKF 'zurückgezogen', sondern die ausgelenkte Mannigfaltigkeit $M_t = \mathbf{X}_t^T(\mathbf{M}^n{}_0)$ läuft auf den Punkt $t\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ zu.
Um dies genau fassen zu können, ist noch eine weitere Vorbereitung nötig. Was bedeutet es, wenn die Funktion h_2 identisch null ist? Aus $\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{a} \rangle \equiv 0$ folgt, daß

das konstante Vektorfeld **a** ein Tangentialvektorfeld ist. Wenn wir nun die Integralkurven dieses Vektorfeldes betrachten, so erhalten wir einerseits Geodäten [1] in $\mathbf{M}^n$ und andererseits Geraden in $\mathbb{R}^{n+1}$. Damit erhalten wir für jede Richtung **a** mit dieser Eigenschaft die Translationsinvarianz von $\mathbf{M}^n$. Eine solche Richtung wollen wir kurz **krümmungsfreie Richtung** nennen. Es verwundert also nicht, daß gilt:

Proposition 6.9 *Sei $\mathbf{M}^n$ eine homothetische Lösung der MKF . Dann gilt*

$$D^2I(h_2,h_2)\begin{cases} <0 & , \quad \textit{falls es keine krümmungsfreie Richtung gibt} \\ =0 & , \quad \forall\, \mathbf{a} \textit{ welche eine krümmungsfreie Richtung darstellen} \end{cases}$$

Kurz: $D^2I(h_2,h_2) = -\int_M h_2h_2e^{-\frac{|x|^2}{2}}d\mu_M$ *bzw.* ${}^{L^2(\overline{g})}\nabla I(h_1) = -h_2$ *d.h*

$$h_2 = \langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{a}\rangle$$

ist eine **Eigenfunktion** des Stabilitätsoperators D^2I_M zum **Eigenwert -1** .

Korollar 6.10 *Sei $\mathbf{M}^n$ eine kompakte homothetische Lösung der MKF ohne Rand. Dann gilt $D^2I(h_2,h_2) < 0$.*

Bemerkung: Es gibt keine kompakten Minimalflächen in $\mathbb{R}^{n+1}$ ohne Rand, so daß die Bedingung in Poposition 6.8 automatisch erfüllt ist.
Allgemeiner: Für alle Mannigfaltigkeiten, mit $D^2I(h_2,h_2) < 0$, gilt auch schon $D^2I(h_1,h_1) < 0$.

Beweis der Propsition: Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} \Delta_M^{\mathbb{R}^{n+1}} h_2 &= \nabla_i(\langle \nabla_i \boldsymbol{\nu}, \mathbf{a}\rangle + \langle \boldsymbol{\nu}, \underbrace{\nabla_i \mathbf{a}}_{=0}\rangle) \\ &= \nabla_i \langle h_{ij}\mathbf{e}_j, \mathbf{a}\rangle \\ &= \nabla_i h_{ij}\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{a}\rangle + h_{ij}\langle \nabla_i \mathbf{e}_j, \mathbf{a}\rangle \\ &= \langle \nabla H, \mathbf{a}\rangle + h_{ij}\langle -h_{ij}\boldsymbol{\nu}, \mathbf{a}\rangle \\ &= \langle \nabla H, \mathbf{a}\rangle - |A|^2\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{a}\rangle. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \nabla_i\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{a}\rangle &= \langle \nabla_i \boldsymbol{\nu}, \mathbf{a}\rangle \\ &= h_{ij}\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{a}\rangle \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \nabla_i\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{X}\rangle &= \langle \nabla_i \boldsymbol{\nu}, \mathbf{X}\rangle + \langle \boldsymbol{\nu}, \nabla_i \mathbf{X}\rangle \\ &= \langle \nabla_i \boldsymbol{\nu}, \mathbf{X}\rangle + \underbrace{\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_i\rangle}_{=0} \\ &= h_{ij}\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{X}\rangle. \end{aligned}$$

[1] $\nabla_{\mathbf{X}}^M \mathbf{a} = (\nabla_{\mathbf{X}}^{\mathbb{R}^{n+1}} \mathbf{a})^T = (0)^T = 0 \;\forall\, \mathbf{X}$, insbesondere für **a** selbst.

Hieraus folgt schließlich

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{X},\ \nabla h_2 \rangle &= \langle \mathbf{X}, \mathbf{e}_i\rangle \nabla_i h_2 \\
&= \langle \mathbf{X}, \mathbf{e}_i\rangle h_{ij} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{a}\rangle \\
&= \nabla_j(\langle \mathbf{X}, \boldsymbol{\nu}\rangle)\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{a}\rangle \\
&= \langle \nabla(\langle \mathbf{X}, \boldsymbol{\nu}\rangle), \mathbf{a}\rangle \\
&= \langle \nabla H, \mathbf{a}\rangle.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für

$$\begin{aligned}
D^2 I(h_2, h_2) &= -\int_M h_2 \Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} h_2 - \langle \mathbf{X}, \nabla h_2\rangle h_2 + (h_2)^2(1+|A|^2) e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu_M \\
&= -\int_M h_2(\langle \nabla H, \mathbf{a}\rangle - |A|^2 \langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{a}\rangle) \\
&\qquad\qquad - \langle \mathbf{X}, \nabla h_2\rangle h_2 + (h_2)^2(1+|A|^2) e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu_M \\
&= -\int_M h_2(\underbrace{\langle \nabla H, \mathbf{a}\rangle - \langle \mathbf{X}, \nabla h_2\rangle}_{=0}) \\
&\qquad\qquad + \underbrace{|A|^2((h_2)^2 - h_2\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{a}\rangle)}_{=0} + (h_2)^2 e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu_M \\
&= -\int_M (h_2)^2 e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu_M \\
&= - \ll h_2, h_2 \gg_{L^2(\overline{g}, M)} .
\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Wir haben die beiden geometrisch verständlichen Funktionen $h_1 = \langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{X}\rangle$ und $h_2 = \langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{a}\rangle$ untersucht und festgestellt, daß diese Eigenfunktionen von $D^2 I_M$ sind. Eine weitere Testfunktion, welche nun auffällt, ist das Skalarprodukt eines festen Vektors $\mathbf{a}$ mit dem Ortsvektor $\mathbf{X}$: $h_3 := \langle \mathbf{a}, \mathbf{X}\rangle$. Es handelt sich hier um eine Art Stauchung. Die 'Variationsmannigfaltigkeiten' $M_t = \mathbf{X}_t^S(\mathbf{M}^n{}_0)$ mit $\mathbf{X}_t^S = \mathbf{X} + t\langle \mathbf{a}, \mathbf{X}\rangle \boldsymbol{\nu}$ entsprechen Stauchungen von $\mathbf{M}^n{}_0$ orthogonal zur Hyperebene

$$\mathbf{E} := \{\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle \mathbf{Y}, \mathbf{a}\rangle \ = 0\},$$

wie man aus der Tatsache $\langle \mathbf{Y}, \mathbf{a}\rangle \ = \operatorname{dist}(\mathbf{E}, \mathbf{X})$ einfach erkennt. Je weiter ein Punkt auf $\mathbf{M}^n$ von $\mathbf{E}$ entfernt ist, desto weiter wird dieser ausgelenkt. Jedoch muß man dabei beachten, daß die Variation in Normalenrichtung erfolgt und somit immer in eine Richtung bezüglich $\mathbf{E}$. Dies bedeutet, daß auf der einen Seite von $\mathbf{E}$ die Punkte auf $\mathbf{M}^n$ zu $\mathbf{E}$ hin, auf der anderen Seite aber von $\mathbf{E}$ weg bewegt werden. Analytisch erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\Delta_M^{\mathbb{R}^{n+1}} \langle \mathbf{X}, \mathbf{a}\rangle &= \nabla_i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{a}\rangle = \langle \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_i, \mathbf{a}\rangle = -H\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{a}\rangle \\
\nabla \langle \mathbf{X}, \mathbf{a}\rangle &= \mathbf{e}_i g^{ij} \nabla \langle \mathbf{X}, \mathbf{a}\rangle = \mathbf{e}_i g^{ij} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{a}\rangle = \mathbf{a}^\top.
\end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned}
\Delta_M^{\mathbb{R}^{n+1}} h_3 &- \langle \mathbf{X}, \nabla h_3\rangle + (1+|A|^2)h_3 \\
&= - \quad H\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{a}\rangle - \langle \mathbf{X}, \mathbf{a}^\top\rangle + (1+|A|^2)h_3 \\
&= - \quad H\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{a}\rangle - \underbrace{\langle \mathbf{X}^\top, \mathbf{a}\rangle + \langle \mathbf{X}, \mathbf{a}\rangle}_{\substack{= \langle \mathbf{X} - \mathbf{X}^\top, \mathbf{a}\rangle \\ = \langle \boldsymbol{\nu}\langle \mathbf{X}, \boldsymbol{\nu}\rangle, \mathbf{a}\rangle \\ = H\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{a}\rangle}} + |A|^2 h_3 \\
&= \quad |A|^2 h_3.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, daß

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{X}, \mathbf{a}^\top\rangle &= \langle \mathbf{X}, \mathbf{e}_i\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{a}\rangle\rangle = \langle \mathbf{X}, \mathbf{e}_i\rangle\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{a}\rangle = \langle\langle \mathbf{X}, \mathbf{e}_i\rangle \mathbf{e}_i, \mathbf{a}\rangle \\
&= \langle \mathbf{X}^\top, \mathbf{a}\rangle.
\end{aligned}$$

Ergebnis: Für die Funktion h_3 gilt:

$$D^2 I(h_3, h_3) \;=\; -\int_M |A|^2 (h_3)^2 d\mu_{\overline{g}} \;\text{ bzw. }\; L^2 - \nabla_{\overline{g}}(h_3) = -|A|^2 h_3.$$

Auf der Sphäre gilt, daß $h_3 \equiv \sqrt{n} h_2$ und $|A|^2$ ist, für alle anderen Mannigfaltigkeiten ist $h_3 \neq h_2$.

Definition 6.11 *Sei $\mathbf{M}^n$ eine Mannigfaltigkeit, und $\mathbf{X} : \mathbf{M}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Immersion in $\mathbb{R}^{n+1}$. Ferner sei $\mathbf{M}^n$ ein Stationäer Punkt von I, d.h. ${}^{L^2(\overline{g})}\nabla I = H - \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}\rangle \equiv 0$.*
Dann heißt $\mathbf{M}^n$ **strikt stabil** , falls $D^2 I(h,h) > 0 \; \forall h \in \{h_1, h_2\}^{\perp_{L^2(\overline{g},M)}}$
Dann heißt $\mathbf{M}^n$ **stabil** , falls $D^2 I(h,h) \geq 0 \; \forall h \in \{h_1, h_2\}^{\perp_{L^2(\overline{g},M)}}$

Bemerkung: Die Sphäre ist also in dieser Definition strikt stabil.

6.7 Folgerungen

Eigenfunktionen zu zwei **verschiedenen** Eigenwerten eines selbstadjungierten Operators stehen senkrecht aufeinander.

$$\begin{aligned}
[\lambda_1 \ll f_1, f_2 \gg &= \ll A(f_1), f_2 \gg = \ll f_1, A(f_2) \gg = \lambda_2 \ll f_1, f_2 \gg \\
\Rightarrow \quad 0 &= (\lambda_1 - \lambda_2) \ll f_1, f_2 \gg]
\end{aligned}$$

Mit den gefundenen Funktionen können wir auf mehrere Identitäten schließen.

Lemma 6.12 *Sei $\mathbf{M}^n$ eine homothetische Lösung des MKF, dann gilt:*

$$\int_M \mathbf{X} d\mu_{\overline{g}} \quad = \quad \mathbf{0}.$$

Beweis: Wir berechnen das Skalarprodukt $\ll h_1, h_2 \gg$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\ll h_1, h_2 \gg_{L^2(\overline{g},M)} &= \int_M \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}\rangle\langle \mathbf{a},\ \boldsymbol{\nu}\rangle\ d\mu_{\overline{g}} \\
&= \int_M \langle -\mathbf{H}_{\mathbb{R}^{n+1}},\ e^{-\frac{|x|^2}{2}}\mathbf{a}\ \rangle\ d\mu_g \\
&= \int_M \operatorname{div}{}^{\overline{g}}_{\mathbf{M}^n}(e^{-\frac{|x|^2}{2}}\mathbf{a}\ )\ d\mu_g \\
&= \int_M \langle \mathbf{X}^T,\ \mathbf{a}\ \rangle\ d\mu_{\overline{g}} \\
&= \int_M \langle \mathbf{X} - \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}\rangle\boldsymbol{\nu},\ \mathbf{a}\rangle\ d\mu_{\overline{g}} \\
&= \int_M \langle \mathbf{X},\ \mathbf{a}\rangle - \underbrace{\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}\rangle\langle \boldsymbol{\nu},\ \mathbf{a}\ \rangle}_{=0,\ h_1 \perp h_2}\ d\mu_{\overline{g}} \\
&= \int_M \langle \mathbf{X},\ \mathbf{a}\rangle\ d\mu_{\overline{g}}.
\end{aligned}$$

Dies gilt für alle Vektoren $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$, also z.B. insbesondere für $\{\mathbf{e}_i\}$. Somit sind alle Koordinaten des Vektors $\int_M \mathbf{X} d\mu_{\overline{g}}$ gleich Null (h_1, h_2 sind Eigenfunktionen des selbstadjungierten Operators $D^2 I$ zu verschiedenen Eigenwerten). □

Lemma 6.13 *Sei $\mathbf{M}^n$ eine homothetische Lösung des MKF, dann gilt:*

$$\begin{aligned}
&\underline{1.} \qquad \int_M \langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\nu}\rangle |A_{\mathbb{R}^{n+1}}|^2\ d\mu_{\overline{g}} \ = \ 0 \\
&\underline{2.} \qquad \int_M H_{\mathbb{R}^{n+1}} d\mu_{\overline{g}} = \int_M |A|^2 H_{\mathbb{R}^{n+1}}\ d\mu_{\overline{g}} \\
&\underline{3.} \qquad \int_M \frac{|\mathbf{X}|^2}{n} d\mu_{\overline{g}} = \operatorname{vol}_{\overline{g}}(\mathbf{M}^n) = \int_M d\mu_{\overline{g}}.
\end{aligned}$$

Beweis: Zu 1. : Für eine konstante Funktion c gilt

$$^{L^2(\overline{g})}\nabla(c) = -(1 + |A|^2)c.$$

Wir verwenden nun einfach die Symmetrie des Stabilitätsoperators und erinnern uns an die beiden Eigenfunktionen h_1 und h_2:

$$\begin{aligned}
D^2 I(c, h_2) \quad &= \quad - \ll c, h_2 \gg_{L^2(\overline{g})} \quad = \\
D^2 I(h_2, c) \quad &= \quad - \ll (1 + |A|^2)c, h_2 \gg_{L^2(\overline{g})} \\
&\quad\ - \ll c, h_2 \gg_{L^2} - \ll |A|^2 c, h_2 \gg_{L^2(\overline{g})}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ \ll |A|^2 c, h_2 \gg_{L^2(\overline{g})} = 0.$$

Hieraus folgt die erste Behauptung, wenn man beachtet, daß die konstante Funktion vor das Integral gestellt werden kann.
Zu 2. : Mit derselben Idee und Argumentation folgt auch

$$\begin{aligned} D^2I(c,h_1) &= -\ll c, 2h_1 \gg_{L^2} \quad = \\ D^2I(h_1,c) &= -\ll (1+|A|^2)c, h_2 \gg_{L^2} \\ &\quad -\ll c, h_1 \gg_{L^2} - \ll |A|^2 c, h_1 \gg_{L^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ll |A|^2 c, h_1 \gg_{L^2(\overline{g})} = \ll c, h_1 \gg_{L^2(\overline{g})} .$$

Zu 3. :

$$\begin{aligned} \int_M H^2 d\mu_{\overline{g}} &= \int_M \langle \mathbf{X}, \boldsymbol{\nu}\rangle e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu_g = -\int_M \langle \mathbf{X} e^{-\frac{|x|^2}{2}}, \mathbf{H}\rangle d\mu_g \\ &= \int_M \operatorname{div}_M (\mathbf{X} e^{-\frac{|x|^2}{2}}) d\mu_g \\ &= \int_M \langle \operatorname{grad}_M (e^{-\frac{|x|^2}{2}}), \mathbf{X}\rangle + e^{-\frac{|x|^2}{2}} \operatorname{div}(\mathbf{X}) d\mu_g \\ &= \int_M (-\langle \mathbf{X}, \mathbf{X}\rangle + \langle \mathbf{X}^\perp, \mathbf{X}\rangle + n) e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu_g \\ &= \int_M H^2 d\mu_{\overline{g}} + \int_M -\langle \mathbf{X}, \mathbf{X}\rangle + n d\mu_{\overline{g}} : \end{aligned}$$

Die Integrale über H^2 heben sich weg, und die dritte Behauptung folgt. □

Anhang A

Lemma (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für 2-Tensoren)
Sei A symmetrisch, dann gilt $\mathrm{tr}\,(A \circ B) \leq |A||B|$

Beweis: Die Spur ist invariant unter Basistransformationen; wir diagonalisieren A durch $O \in \mathcal{O}(n)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,(A \circ B) &= \mathrm{tr}\,(O \circ A \circ O^{-1} \circ O \circ B \circ O^{-1}) \\
&= \mathrm{tr}\,(\tilde{A}\tilde{B}) = \mathrm{tr}\,(\lambda_i \delta_{ik} \tilde{B}_{kj}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{B}_{ii} \leq \sqrt{\sum_i \lambda_i} \sqrt{\sum_i \tilde{B}_{ii}} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i,j} \tilde{A}_{ij}^2} \sqrt{\sum_{i,j} \tilde{B}_{ij}^2} = |\tilde{A}||\tilde{B}| = |A||B|.
\end{aligned}$$

Wir haben hierbei die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für Vektoren verwendet.
□

Bemerkung: Gleichheit gilt genau dann, wenn A und B gleichzeitig diagonalisierbar sind, und die 'Vektoren' der Diagonalelemente parallel sind.

Folgerung: Es gilt $|\nabla|A|^2|^2 \leq 4|\nabla A|^2|A|^2$, denn

$$\begin{aligned}
|\nabla|A|^2|^2 &= \nabla_\alpha(h_{ij}h_{ij})\nabla_\alpha(h_{kl}h_{kl}) = 2(\nabla_\alpha h_{ij})h_{ij}2(\nabla_\alpha h_{kl})h_{kl} \\
\text{(Lemma, halte } \alpha \text{ fest)} &\leq 4\nabla_\alpha|h_{ij}||A|\nabla_\alpha|h_{kl}||A| \\
&\leq 4|A|^2\langle\nabla_\alpha|A|, |\nabla_\alpha|A|\rangle = 4|A|^2|\nabla A|^2.
\end{aligned}$$

□

Anhang B

Sei eine Hyperfläche $\mathbf{M}^n$ als Graph einer Funktion f dargestellt. Wir wollen in diesem Anhang zeigen, wie man aus der Tatache, daß alle Ableitungen der zweiten Fundamentalform von $\mathbf{M}^n$ beschränkt sind, die Beschränktheit aller Ableitungen von f gewinnt. Es gilt für die Metrik auf $\mathbf{M}^n$
$g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{F}, \frac{\partial}{\partial x_j}\mathbf{F}\rangle = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})), \frac{\partial}{\partial x_j}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\rangle = \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i}f\frac{\partial}{\partial x_j}f$, und für die zweite Fundamentalform

$$A = h_{ij} = -\langle \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\mathbf{F}, \boldsymbol{\nu}\rangle = \langle (\mathbf{0}, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}f), \boldsymbol{\nu}\rangle = \frac{\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}.$$

Für die Christoffelsymbole gilt
$\Gamma = g * Dg = (1 + Df * Df) * Df * D^2 f \leq Df * Df * Df * D^2 f$, da die Bezeichnung $*$ Konstanten beinhaltet (vgl. Paragraph 3.2), und man somit $Df \cdot C \geq 1$ wählen kann. Allgemein erhält man:

$$D^m\Gamma \leq \sum_{i+j+k+l=m} D^{i+1}f * D^{j+1}f * D^{k+1}f * D^{l+2}f \tag{1}$$

Ferner gilt für den Zusammenhang von kovarianter Ableitung und der Koordinatenableitung $\nabla = D + \Gamma$ und somit für einen Tensor:

$$\nabla^m T = D^m T + \sum_{i+j_s+j=m} D^i T * \mathop{\Large *}_{s=1}^{j} D^{j_s}\Gamma. \tag{2}$$

Dies rechnen wir mit einer Induktion nach:

$$\begin{aligned}
\nabla(D^m T \quad &+ \sum_{i+j_s+j=m} D^i T * \mathop{\Large *}_{s=1}^{j} D^{j_s}\Gamma) \\
&= D^{m+1}T + \Gamma * D^m T + \sum_{i+j_s+j=m} D^{i+1}T * \mathop{\Large *}_{s=1}^{j} D^{j_s}\Gamma \\
&+ \Gamma * D^m T + \sum_{s_0=1}^{j} \sum_{i+j_s+j=m} D^i T * \mathop{\Large *}_{s=1\ s\neq s_0}^{j} D^{j_s}\Gamma * D^{j_{s_0}+1}\Gamma \\
&+ \Gamma * D^m T + \sum_{i+j_s+j=m} D^i T * \mathop{\Large *}_{s=1}^{j} D^{j_s}\Gamma * \Gamma \\
&= D^{m+1}T + \sum_{i+j_s+j=m+1} D^i T * \mathop{\Large *}_{s=1}^{j} D^{j_s}\Gamma. \qquad \square
\end{aligned}$$

Mit der Bezeichnug $v := \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}$ folgt

$$\nabla^m A = \nabla^m(vD^2 f) = \sum_{i+j=m,\, j\neq 0} \binom{m}{i} D^{i+2}f \cdot D^j v \; + \; vD^{m+2}f. \tag{3}$$

Lemma:

$$D^m v \quad = \sum_{\sum(|m_r^1|+|m_r^2|)=m,\ k=1..m} v^{2k+1} * \prod_{r=1}^{k} \langle D^{m_r^1}\nabla f, D^{m_r^2}\nabla f\rangle$$

Beweis:
(IA) Für m=1 gilt: $Dv^l = v^{l-1}Dv = v^{l-1}v^3\langle Df, D^2 f\rangle$
(IS) $m \to m+1$:

$$\begin{aligned}
D^{m+1}v &= D\Big(\sum_{\sum(|m_r^1|+|m_r^2|)=m,\ k=1..m} v^{2k+1} * \prod_{r=1}^{k} \langle D^{m_r^1}\nabla f, D^{m_r^2}\nabla f\rangle\Big) \\
&= \sum_{\sum(|m_r^1|+|m_r^2|)=m,\ k=1..m} v^{2(k+1)+1} * \langle \nabla f, D\nabla f\rangle * \prod_{r=1}^{k} \langle D^{m_r^1}\nabla f, D^{m_r^2}\nabla f\rangle \\
&+ \sum_{\sum(|m_r^1|+|m_r^2|)=m,\ k=1..m} v^{2(k+1)+1} * \sum_{r_0=1}^{k}\Big(\prod_{r=1,\ r\neq r_0}^{k} \langle D^{m_r^1}\nabla f, D^{m_r^2}\nabla f\rangle\Big) * D^{m_{r_0}^1} f \\
&= \sum_{\sum(|m_r^1|+|m_r^2|)=m+1,\ k=1..m+1} v^{2k+1} * \prod_{r=1}^{k} \langle D^{m_r^1}\nabla f, D^{m_r^2}\nabla f\rangle. \qquad \square
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt aus den Gleichungen (1), (2) und (3), daß die Summenterme der rechten Seite der Gleichung

$$\begin{aligned}
\nabla^m A \quad &= \sum_{i+j=m,\, j\neq 0} \binom{m}{i} D^{i+2} f \cdot D^j v \; + \; v D^{m+2} f \\
&+ \sum_{i+j_s+j=m+1} D^i A * \textstyle\ast_{s=1}^{j} D^{j_s}\Gamma
\end{aligned}$$

in den Ableitungen von f immer um eine Ordnung kleiner als oder gleich $m+1$ sind. Daher folgt durch eine Iteration aus der Beschränktheit von ∇f die Beschränktheit der höheren Ableitungen.

Anhang C

Mit diesem Pascal-Programm lassen sich die Geodäten in $(\mathbb{R}^2, \overline{\overline{g}})$ darstellen:

Anhang D

Wir wollen die Verbindung zwischen MKF und dem homothetischen Fluß darstellen.
Sei $\{\mathbf{e}_i\}$ ein orthonormales n-Bein von $T_{\mathbf{P}}\mathbf{M}^n$, wobei $\mathbf{P}$ oBdA nicht der Nullvektor ist. Sei zusätzlich $\mathbf{F}_0(t) \not\perp \boldsymbol{\nu}(t)$. Dann kann man den mittleren Krümmungsvektor $\mathbf{H}$ für geeignete Funktionen α, β_i darstellen als $\mathbf{H} = \alpha\mathbf{F}_0 + \beta_i\mathbf{e}_i$. Die Tangentialterme $\beta_i\mathbf{e}_i$ induzieren einen Diffeomorphismus auf $\mathbf{M}^n$, welchen wir 'wegtransformieren':
Zu diesem Zweck sei $\overline{\mathbf{e}}_i \in T_{\mathbf{P}}\mathbf{M}^n$ definiert als das Urbild von $\mathbf{e}_i$ unter der Einbettung $\mathbf{F}_0 : \overline{\mathbf{e}}_i := D\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{e}_i)$, sowie $L_t : \mathbf{M}^n \to \mathbf{M}^n$ als der durch das Vektorfeld $-\beta_i\overline{\mathbf{e}}_i$ definierte Diffeomorphismus auf $\mathbf{M}^n$. Für $\tilde{\mathbf{F}} := \mathbf{F}(t, L_t(\mathbf{P}))$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{F}} &= \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F} + D\mathbf{F}(\frac{\partial}{\partial t}L_t(\mathbf{P})) \\ &= \alpha\mathbf{F}_0 + \beta_i\mathbf{e}_i + D\mathbf{F}(-\beta_i\overline{\mathbf{e}}_i) \\ &= \alpha\mathbf{F}_0. \end{aligned}$$

Uns interessiert der Term $\alpha\mathbf{F}_0$. Durch Skalarmultiplikation mit $\boldsymbol{\nu}$ bestimmen wir die Funktion α

$$\alpha = -\frac{H}{\langle\boldsymbol{\nu}, \mathbf{F}_0\rangle}$$

Mit Ausnahme der Punkte mit $\mathbf{F} \perp \boldsymbol{\nu}$ kann man also die Koordinaten so wählen, daß $\mathbf{F}_t$ die Gestalt $\mathbf{F}_t = \alpha(t, \mathbf{P})\mathbf{F}_0$ hat. Damit gilt:
$\mathbf{F}(t, \mathbf{P})$ *ist eine homothetische Lösung des MKF, falls die Funktion* α *nicht von den Punkten* $\mathbf{P}$ *auf* $\mathbf{M}^n$ *abhängt:* $\alpha = \alpha(t)$. *D.h. wenn zu jedem Zeitpunkt der Fluß proportional zu* $\mathbf{F}_0$ *ist:*

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{P}) = \alpha(t)\mathbf{F}_0(\mathbf{P})$$

Im reskalierten Fall erhalten wir für α dann $\alpha \equiv 1$:
$\mathbf{F}(t, \mathbf{P})$ *ist eine homothetische Lösung des MKF, falls* $H = \langle\mathbf{F}, \boldsymbol{\nu}\rangle$ *gilt.*

Literaturverzeichnis

[An1] S. Angenent, Shrinking Doughnuts, Proceedings of the Conference on Elliptic and Parabolic Equations, held at Greynog, Wales, August 1989

[An2] S. Angenent, Some Recent Results on Mean Curvature Flow, Preprint

[An3] S. Angenent, On the Formation of Equations for Curves on surfaces I and II, to appear, Ann. of Math.

[AAG] S. Altschuler, S. Angenent, Y. Giga, Mean curvature flow through singularities for surfaces of rotation, AMS Nos.: primary 58G11, 35K55 1995 preprint

[AL] U. Abresch und J. Langer, The normalized curve shortening flow and homothetic solutions, J. Diff. Geom. Vol. 23(1986) 175-196

[Alt1] S. J. Altschuler, Singularities of the curve shortening flow for space curves, J. Diff. Geom. 34(1991) 491-514

[Alt2] S. J. Altschuler, Shortening Space Curves, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume 54 (1993), Part 3

[Ar] V.I. Arnol'd, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Graduate Texts in Mathematics 60, Springer New York (1978)

[Au] Thierry Aubin, Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampere equations, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer New York (1982)

[BDo] J. L. Barbosa und M.P. Do Carmo, Stability of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature, Mathematische Zeitschrift (1984), 339-353

[BGM] M. Berger, P. Gauduchon und E. Mazet, Le Spectre d'une Variete Riemannienne, Lecture Notes in Mathematics 194, Springer (1971)

[Br] K.A. Brakke, The Motion of a Surface by its Mean Curvature, Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1978

[Ch] D.L. Chopp, Numerical Computations of Self-Similar Solutions for Mean Curvature Flow, preprint, Physics Division, Lawrence Berkeley Laboratory, University of California, August 1993

[Co] B.P. Cowan, Classical Mechanics, Routledge and Kegan plc. (1984)

[Do1] M.P. Do Carmo, Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, Vieweg Studium (1983)

[Do2] M.P. Do Carmo, Riemannian Geometry, Mathematics: Theory and Applications, Birkhäuser, Boston (1992)

[EH] K. Ecker und G. Huisken, Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature, Invent. Math. 105(1991)

[EW] C.L. Epstein und M.I. Weinstein, A stable manifold theorem for the curve shortening equation, Comm. on Pure and Applied Mathematics, Vol. XL (1987) 119-139

[GT] D. Gilbarg und N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 224, Springer New York (1977)

[GH] M.Gage, R.S. Hamilton, The heat equation shrinking convex plane curves, J. Diff. Geom. 23(1986) 69-96

[Ha1] R.S. Hamilton, Three-manifolds with positive Ricci curvature, J. Diff. Geom. 17(1986) 153-179

[Ha2] R.S. Hamilton, Four-manifolds with positive curvature operator, J. Diff. Geom. 24(1986) 153-179

[Ha3] R.S. Hamilton, A Matrix Harnack Estimate for the Heat Equation, Comm. Anal. Geom. 1(1993) no.1, 113-126

[Ha4] R.S. Hamilton, Monotonicity Formulas for Parabolic Flows on Manifolds, Comm. Anal. Geom. 1(1993) no.1, 127-137

[Ha5] R.S. Hamilton, Lecture Notes on Heat Equations in Geometry, Honolulu, Hawaii (1989)

[Hu1] G. Huisken, Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres, J. Diff. Geom. 20(1984) 237-266

[Hu2] G. Huisken, Contracting convex hypersurfaces in Riemannien manifolds by their mean curvature, Invent. Math. 84(1986) 463- 480

[Hu3] G. Huisken, Asymptotic behaviour for singularities of the mean curvature flow, J. Diff. Geom. 31(1990) 285-299

[Hu4] G. Huisken, Local and Global Behaviour of Hypersurfaces Moving by Mean Curvature, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume 54 (1993), Part 1

[LJ] P. Li und S.T. Yau, On the parabolic kernel of the Schroedinger operator, Acta Mathematica 156(1986) 154-201

[Mu] W.W. Mullins, Two dimensional Motion of Idealized Grain Boundaries, J. App. Physics Vol. 27 no. 8(1956) 900- 904

[Sp] M. Spivak, Differential Geometry Vol I-V, Publish or Perish Inc. Houston (1975)

[PW] M. H. Protter und H. F. Weinberger, Maximum Principles in Differential Equations, Springer New York 1984

[St] A. Stahl, Über den mittleren Krümmungsfluß mit Neumannrandwerten auf glatten Hyperflächen, Dissertation, Universität Tübingen (1994) (to appear in Calculus of Variation 1996)

[Str] D. J. Struik, Lectures on Classical Differential Geometrie, Addison-Wesley Pub. Co. ,1961

[SW] Storch und Wiebe, Lehrbuch der Mathematik Band 3, Analysis, BI-Wissenschaftsverlag Mannheim (1993)

Erklärung

Hiermit erkläre ich, diese Arbeit selbstständig und unter ausschließlicher Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt zu haben.