Inhaltsverzeichnis

Einleitung **2**

1 Grundlagen **5**

2 Konstruktion einer Seele **7**

3 Busemann-Funktionen **18**

4 Beispiele und Ausblicke **22**

5 Eine Retraktion von M auf die Seele **24**

6 Das Theorem von Perelman **35**

7 Splitting Theoreme **48**

Anhang A: Vergleichstheoreme **52**

Anhang B: Variationsformeln **53**

Anhang C: Topologische Begriffe **54**

Literatur **55**

Einleitung

Ein zentrales Problem in der Riemannschen Geometrie dieses Jahrhunderts war die Untersuchung vollständiger Mannigfaltigkeiten, deren Schnittkrümmungen ein festes Vorzeichen haben. Dabei war man sowohl an topologischen als auch an geometrischen Eigenschaften dieser Mannigfaltigkeiten interessiert. Allerdings beschränkte sich im Fall nichtnegativer Krümmung das Interesse zunächst auf kompakte Mannigfaltigkeiten.

S. Cohn-Vossen war 1936 der erste, der den nichtkompakten Fall genauer untersuchte (siehe [CV]). Er konnte zeigen, daß 2-dimensionale, nichtkompakte vollständige Mannigfaltigkeiten nichtnegativer Schnittkrümmung entweder diffeomorph zu $\mathbb{R}^2$ oder flach sein müssen. Da das Theorem von Gauß-Bonnet dabei eines seiner wichtigsten Hilfsmittel darstellte, war die Verallgemeinerung der Aussage auf höhere Dimensionen nicht direkt möglich. Wie wir noch sehen werden, erwies sich hingegen der von ihm benutzte Begriff der einfachen Punkte ("simple points") als guter Ansatz, um auch im Fall beliebiger Dimension Resultate in dieser Richtung zu erhalten. Dabei heißt ein Punkt einer Mannigfaltigkeit einfach, falls es keine geschlossene Geodäte durch diesen Punkt gibt.

Im Fall echt positiver Schnittkrümmung hat Cohn-Vossen in diesem Zusammenhang gezeigt, daß 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten aufgrund der Existenz einfacher Punkte immer zusammenziehbar sein müssen. Mit Hilfe der Morse-Theorie kann man zwar leicht zeigen, daß aus der Existenz einfacher Punkte tatsächlich die Zusammenziehbarkeit einer Mannigfaltigkeit folgt, da diese Theorie aber Cohn-Vossen noch nicht zur Verfügung stand, mußte er eher mit geometrischen statt topologischen Argumenten arbeiten.

D. Gromoll und W. Meyer gelang es dann 1969 unter gleichen Voraussetzungen, die Existenz einfacher Punkte für beliebige Dimensionen zu beweisen (siehe [GM]). Ein entscheidendes neues Hilfsmittel in ihrer Arbeit ist dabei die Untersuchung total konvexer Mengen, wobei eine Teilmenge C einer Mannigfaltigkeit total konvex genannt wird, wenn jede Geodäte, die zwei Punkte aus C verbindet, bereits ganz in C enthalten ist.

Die Betrachtung solcher Mengen ermöglichte es schließlich J. Cheeger und D. Gromoll, den allgemeinsten Fall einer nichtkompakten vollständigen Mannigfaltigkeit nichtnegativer Schnittkrümmung und beliebiger Dimension zu betrachten. Entscheidend dabei ist ihre natürliche Verallgemeinerung eines einfachen Punktes auf eine sogenannte Seele. Darunter versteht man eine kompakte, total geodätische und total konvexe Untermannigfaltigkeit ohne Rand, deren Dimension kleiner ist als die der Mannigfaltigkeit.

Analog zur Existenz einfacher Punkte unter der Voraussetzung positiver Schnittkrümmung konnten Cheeger und Gromoll 1972 unter der schwächeren Voraussetzung nichtnegativer Schnittkrümmung einer Mannigfaltigkeit M die Existenz einer Seele S zeigen (siehe [CG2]). Daß der Begriff der Seele tatsächlich eine sinnvolle Verallgemeinerung der einfachen Punkte darstellt, sieht man beispielsweise daran, daß die Seele einpunktig sein muß, falls die Mannigfaltigkeit echt positiv gekrümmt ist und somit wieder zu einem einfachen Punkt wird. Außerdem kann man auch hier mit Morse-Theorie zeigen, daß die Einbettung $S \hookrightarrow M$ eine Homotopieäquivalenz ist, was für einpunktige Seelen wieder bedeutet, daß M zusammenziehbar ist.

Die eigentliche Bedeutung der Existenz einer Seele liegt aber in der erheblich stärkeren Aussage von Cheeger und Gromoll, daß eine solche Mannigfaltigkeit sogar diffeomorph zum Normalenbündel der Seele sein muß. Auf diese Weise läßt sich also die Untersuchung vollständiger Mannigfaltigkeiten wieder größtenteils auf den kompakten Fall reduzieren.

Da also eine Mannigfaltigkeit mit den entsprechende Voraussetzungen diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, falls ihre Seele einpunktig ist, stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen man diese Einpunktigkeit erhalten kann. Wie bereits erwähnt, sind positiv gekrümmte Mannigfaltigkeiten auf jeden Fall diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$, was auch schon von Gromoll und Meyer gezeigt worden war. Cheeger und Gromoll vermuteten, daß man die Einpunktigkeit einer Seele schon dadurch erreichen kann, daß nur in einem Punkt alle Schnittkrümmungen positiv sind. Diese berühmte Vermutung, die sogenannte "soul conjecture", konnte allerdings erst 1994 von G. Perelman bewiesen werden (siehe [Per]).

Das entscheidende Hilfsmittel in Perelmans Beweis ist, neben einer von M. Berger ausgeführten Verallgemeinerung von Rauchs Theorem (siehe [Ber]), die Existenz einer Retraktion der Mannigfaltigkeit auf dessen Seele, welche die Eigenschaft hat, Abstände nicht zu vergrößern.

Ein Schwerpunkt dieser Arbeit besteht deshalb darin, einen möglichst kurzen, aber dennoch vollständigen Beweis für die Existenz einer solchen Lipschitzstetigen Retraktion mit Lipschitzkonstante $L = 1$ zu geben. Da die Konstruktion der gesuchten Retraktion teilweise auf den Konstruktionsschritten der Seele aufbaut, werden wir zunächst damit beginnen, die Konstruktion einer Seele im Sinne von Cheeger und Gromoll darzustellen. Obwohl wir uns dabei relativ eng an der Originalarbeit ([CG2]) orientieren werden, haben wir versucht, einige Feinheiten zu verbessern und ein paar kleine Schritte geradliniger aufzuschreiben.

Im Anschluß daran werden wir versuchen, einen Eindruck darüber zu vermitteln, wie man mit Hilfe sogenannter Busemann-Funktionen die Konstruktion der Seele mit etwas anderen Methoden zeigen kann, bevor wir dann in Kapitel 5 die Existenz der gesuchten Retraktion zeigen werden. Dabei haben wir die Grundidee einer Arbeit von J.-W. Yim entnommen ([Yim]), während die eigentliche Idee auf V. Sharafutdinov zurückgeht (siehe [Sha]).

Der zweite Schwerpunkt dieser Arbeit liegt im darauf folgenden sechsten Kapitel, in dem wir zeigen werden, wie man mit Hilfe von Perelmans Theorem tatsächlich die Vermutung von Cheeger und Gromoll beweisen kann. Es wird sich dort herausstellen, daß man sogar eine noch bessere Aussage zeigen kann. Wir werden in diesem Zusammenhang beweisen, daß man eine allgemeinere Abschätzung für die Dimension der Seele in Abhängigkeit der Krümmung in einem Punkt machen kann. Außerdem werden wir zeigen, daß die Exponentialabbildung auf dem Normalenbündel der Seele immer einen Diffeomorphismus auf die Mannigfaltigkeit darstellt. In diesem Kontext erhält man dann zum Beispiel, daß die Niveaumengen der Distanzfunktion zur Seele glatte Hyperflächen und alle Geodäten in Normalenrichtung Strahlen sind.

Das letzte Kapitel soll schließlich dazu dienen, diesen Bereich der Riemannschen Geometrie, der sich mit nichtnegativ gekrümmten Mannigfaltigkeiten und deren Seelen beschäftigt, in einen allgemeineren Rahmen zu fassen, in dem es um das Problem geht, die gegebene Mannigfaltigkeit als isometrisches Produkt einer passenden Untermannigfaltigkeit mit einem euklidischen Raum zu schreiben. Dies führt zu den sogenannten Splitting Theoremen, die den Abschluß dieser Arbeit darstellen werden.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Professor Huisken für die Betreuung und den mir zugestandenen Freiraum bei der Erstellung dieser Arbeit bedanken.
Außerdem gilt mein Dank Gerhard Schick und Andreas Wengerek für die erholsamen Pausen in der Cafeteria, aber auch für die vielen Diskussionen mathematischer oder sonstiger Themen, und natürlich meinen Eltern für ihre Unterstützung während meines gesamten Studiums.
Zum Schluß möchte ich mich noch bei meinem Freund Matthias Dieter für seine liebevolle Geduld und die vielen Aufmunterungen bedanken.

1 Grundlagen

Sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Die Schnittkrümmung von M werde mit K_M bezeichnet. Insbesondere bedeutet zum Beispiel die Bedingung $K_M \geq 0$, daß alle Schnittkrümmungen von M nichtnegativ sind.

Da M vollständig ist, existiert wegen des Theorems von Hopf-Rinow zu je zwei Punkten in M ein minimale Geodäte, die diese verbindet.

Der Abstand zweier Punkte p und q in M ist definiert durch

$$d(p,q) := \inf\{L(\gamma) \mid \gamma : [\,a,b\,] \to M \text{ ist glatte Kurve mit } \gamma(a) = p \text{ und } \gamma(b) = q\},$$

wobei $L(\gamma)$ die Länge der Kurve γ bezeichnet.

Eine geodätische Kugel um einen Punkt $p \in M$ mit Radius $r > 0$ ist dann gegeben durch

$$B_r(p) := \{q \in M \mid d(p,q) < r\}.$$

Der Abstand eines Punktes $p \in M$ zu einer kompakten Teilmenge $C \subset M$ ist definiert durch

$$dist(p,C) := \inf\{L(\gamma) \mid \gamma : [\,a,b\,] \to M \text{ ist glatte Kurve mit } \gamma(a) = p \text{ und } \gamma(b) \in C\}.$$

Falls nichts anderes vorausgesetzt wird, seien im folgenden alle Geodäten γ nach Bogenlänge parametrisiert, das heißt $|\dot\gamma| \equiv 1$. In allen anderen Fällen gilt zumindest $|\dot\gamma| \equiv konstant$. Dabei bezeichnet $\dot\gamma$ den Tangentialvektor an die Kurve γ.

Der Tangentialraum im Punkt $p \in M$ wird mit T_pM und das Tangentialbündel von M mit TM bezeichnet. Außerdem sei S_pM die Einheitssphäre in T_pM und, falls $S \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit von M ist, sei

$$\nu_p(S) := \{v \in T_pM \mid v \perp T_pS\}$$

der Normalenraum von S im Punkt p, $\nu(S) := \bigcup_{p \in S} \nu_p(S)$ das Normalenbündel von S in M und $S\nu(S) = \nu(S) \cap SM$.

Die Menge aller Schnitte auf TM wird mit $\Gamma(TM)$ bezeichnet.

Für jedes $p \in M$ ist außerdem $\exp_p : T_pM \to M$ die entsprechende Exponentialabbildung.

Zu einer gegebenen Menge $C \subset M$ bezeichnet ∂C den topologischen Rand, $\overline{C}$ den Abschluß und $int\, C$ das Innere dieser Menge.

Eine Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ heißt total geodätisch, falls jede Geodäte γ in M, die in $\gamma(0)$ tangential an N startet, in N bleibt.

Zum Abschluß dieses Kapitels folgen nun noch einige Konvexitätsbegriffe, die in den folgenden Untersuchungen eine große Rolle spielen werden.

Eine Teilmenge $C \subset M$ heißt total konvex, falls jede Geodäte, die zwei Punkte aus C verbindet, ganz in C liegt.

Im Unterschied dazu heißt eine Teilmenge D von M stark konvex, falls es für alle $p,\, q \in D$ eine eindeutige minimale Geodäte von p nach q gibt, die ganz in D liegt.

Bemerkung 1.1
Ordnet man jedem $p \in M$ die Zahl $r(p) := \sup\{\delta \mid B_\delta(p) \text{ ist stark konvex } \} > 0$ zu, so erhält man eine stetige Abbildung auf ganz M. Diese Funktion $r : M \to (\,0, \infty)$ heißt *Konvexitätsradius*. (Zum Beweis der Stetigkeit siehe [CE] oder [GKM].)

Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißen konvex, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $\lambda,\, \mu \geq 0$ mit $\lambda + \mu = 1$

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda\, f(x) + \mu\, f(y)$$

gilt. Entsprechend heißt f konkav, falls $-f$ konvex ist.

Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls $f \circ \gamma : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ konvex ist für jede Geodäte $\gamma : [\,a, b\,] \to M$. Auch in diesem Fall ist f wieder konkav, falls $-f$ konvex ist.

Bemerkung 1.2
Das Minimum einer Familie konkaver Funktionen ist wieder konkav.

Beweis Sei $(f_i)_{i \in I}$ eine Familie konkaver Funktionen mit $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f(x) := \min\limits_{i \in I} f_i(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f\,(\lambda x + \mu y) = \min_{i \in I} f_i(\lambda x + \mu y) \geq \min_{i \in I} (\lambda\, f_i(x) + \mu\, f_i(y)) \geq \lambda\, f(x) + \mu\, f(y)$$

für alle $x,\, y \in \mathbb{R}$ und $\lambda,\, \mu \geq 0$ mit $\lambda + \mu = 1$. $\square$

Eine analoge Aussage gilt für das Maximum konvexer Funktionen.

Es sei noch erwähnt, daß man alle zum Verständnis notwendigen, grundlegenden Begriffe der Riemannschen Geometrie beispielsweise in [CE] oder [GKM] findet.

2 Konstruktion einer Seele

Das Ziel dieses Kapitels soll es sein, das folgende Theorem von Cheeger und Gromoll zu beweisen, welches den Ausgangspunkt der restlichen Arbeit darstellen wird.

Theorem 2.1 (Cheeger, Gromoll) *Falls M eine vollständige, nichtkompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Schnittkrümmung ist, existiert eine kompakte, total konvexe, total geodätische Untermannigfaltigkeit S ohne Rand mit $0 \leq \dim S < \dim M$, so daß M diffeomorph zum Normalenbündel $\nu(S)$ ist.*
Eine solche Menge S heißt dann eine Seele von M.

Um die Voraussetzungen an eine Mannigfaltigkeit M nicht häufig wiederholen zu müssen, bezeichne M im folgenden immer (falls nicht ausdrücklich etwas anderes vorausgesetzt wird) eine vollständige, nichtkompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Schnittkrümmung.

Die Vorgehensweise bei der Konstruktion einer Seele von M wird es nun sein, Schritt für Schritt Teilmengen von M zu konstruieren, die nach und nach alle geforderten Eigenschaften erfüllen.
Dabei stellt sich zunächst die Frage, ob es zum Beispiel überhaupt immer nichttriviale total konvexe Mengen gibt. Diese müssen, wie man am Beispiel einer Standardsphäre sehen kann, auf allgemeinen Mannigfaltigkeiten gar nicht existieren. Oft sind sogar nicht einmal einpunktige Mengen total konvex.
Daß es aber unter den genannten Voraussetzungen an M sogar eine ganze Familie total konvexer Teilmengen mit sehr schönen Eigenschaften gibt, zeigt der folgende Satz.

Satz 2.2 *Zu jedem $p \in M$ existiert eine Familie von kompakten, total konvexen Mengen C_t, $t \geq 0$, so daß*

(1) $t_1 \leq t_2 \Rightarrow C_{t_1} \subset C_{t_2}$ *und* $C_{t_1} = \{q \in C_{t_2} \mid dist(q, \partial C_{t_2}) \geq t_2 - t_1\}$,
insbesondere gilt $\partial C_{t_1} = \{q \in C_{t_2} \mid dist(q, \partial C_{t_2}) = t_2 - t_1\}$;

(2) $\bigcup_{t \geq 0} C_t = M$;

(3) $p \in \partial C_0$.

Um diesen Satz beweisen zu können, sind noch ein paar Definitionen notwendig:

Definition 2.3 Ein *Strahl* ist eine Geodäte $\gamma : [0, \infty) \to M$, die zwischen je zwei ihrer Punkte minimal ist. Zu einem gegebenen Strahl γ seien dann

$$B_\gamma := \bigcup_{t>0} B_t(\gamma(t)) \quad \text{und} \quad H_\gamma := M \setminus B_\gamma \,.$$

Dabei stellt H_γ eine Verallgemeinerung von Halbebenen im $\mathbb{R}^n$ auf Mannigfaltigkeiten dar.
Außerdem bezeichne R_p die Menge aller Strahlen, die von $p \in M$ ausgehen.

Bemerkung 2.4 *In jedem $p \in M$ startet mindestens ein Strahl, das heißt die Menge R_p ist für alle p nicht leer.*

Beweis Weil M nicht kompakt ist, gibt es zu gegebenem $p \in M$ eine Folge von Punkten $p_i \in M$ mit $d(p, p_i) \to \infty$ für $i \to \infty$.
Sei nun $(\gamma_i)_{i \geq 0}$ eine Folge minimaler Geodäten von p nach p_i. Da S_pM kompakt ist, gibt es einen Häufungspunkt v der Folge $(\dot{\gamma}_i(0))_{i \geq 0}$ und eine Geodäte $\gamma : [\,0, \infty) \to M$ mit $\dot{\gamma}(0) = v$.
Da jetzt für alle $a > 0$ das Geodätenstück $\gamma|_{[\,0,a\,]}$ gleichmäßiger Limes einer Teilfolge der Stücke $\gamma_i|_{[\,0,a\,]}$ ist, welche für genügend große a minimal sind, ist auch $\gamma|_{[\,0,a\,]}$ minimal. Also ist γ ein Strahl. $\square$

Nun sind alle Hilfsmittel bereitgestellt, um den Satz zu beweisen.

Beweis (von Satz 2.2): Sei $p \in M$ ein beliebiger Punkt. Die gesuchten Mengen C_t seien dann wie folgt definiert:
$C_t := \bigcap\limits_{\gamma \in R_p} H_{\gamma_t}$, wobei $\gamma_t : [\,0, \infty) \to M$ mit $\gamma_t(s) := \gamma(s + t)$.
Es muß nachgeprüft werden, ob diese Mengen die Bedingungen (1) bis (3) erfüllen. Dies wird in mehreren Schritten durchgeführt.

(i) Für die Konvexität reicht es zu zeigen, daß H_γ für jeden einzelnen Strahl total konvex ist.
Angenommen, dies wäre nicht der Fall, und es existiere folglich eine Geodäte $\gamma_0 : [\,0, 1\,] \to M$ mit $\gamma_0(0)$, $\gamma_0(1) \in H_\gamma$ und $q := \gamma_0(s) \in B_\gamma$ für ein $s \in (0, 1)$.
Da für $0 < t_1 \leq t_2$ stets $B_{t_1}(\gamma(t_1)) \subset B_{t_2}(\gamma(t_2))$ gilt, existiert ein $t_0 > 0$, so daß $q \in B_t(\gamma(t))$ für alle $t \geq t_0$. Mit $0 < \epsilon := t_0 - d(q, \gamma(t_0))$ gilt dann

$(\star) \quad d(q, \gamma(t)) \leq t - \epsilon$ für alle $t \geq t_0$.

Sei nun $\gamma_0(s_t)$ ein Punkt auf γ_0, der minimalen Anstand zu $\gamma(t)$ hat, und man betrachte dazu $\gamma_0^t := \gamma_0|_{[\,s_t, 1\,]}$ und eine minimale Geodäte γ_1^t von $\gamma_0(s_t)$ nach $\gamma(t)$.
Wegen $(\star)$ und der Wahl von $\gamma_0(s_t)$ gilt dann $L(\gamma_1^t) \leq t - \epsilon$ für alle $t \geq t_0$, und für den Winkel α, der bei $\gamma_0(s_t)$ durch γ_1^t und γ_0^t gebildet wird, gilt $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
Dann folgt aber mit dem Theorem von Toponogov Teil (2) (siehe Anhang A), daß $d(\gamma(t), \gamma_0(1)) \leq \sqrt{L(\gamma_0^t)^2 + L(\gamma_1^t)^2}$ und somit

$$t^2 \leq d(\gamma(t), \gamma_0(1))^2 \leq L(\gamma_0^t)^2 + L(\gamma_1^t)^2 \leq L(\gamma_0)^2 + (t - \epsilon)^2 \, .$$

Dies ist aber offensichtlich für große t falsch, da $L(\gamma_0)$ und ϵ fest sind, also ergibt sich ein Widerspruch, und die Aussage ist bewiesen.

(ii) Aufgrund der Definition ist klar, daß alle C_t abgeschlossen sind. Angenommen, die Menge C_t wäre für ein t nicht kompakt, dann existiert eine Folge von Punkten $p_i \in C_t$ mit $p_i \to \infty$ (das heißt $d(p, p_i) \to \infty$ für $i \to \infty$). Betrachtet man nun eine Folge γ_i von minimalen Geodäten in M, die p mit p_i verbinden, so liegen diese alle in der total konvexen Menge C_t. Wegen der Kompaktheit von S_pM kann man dann eine Teilfolge der γ_i auswählen, die gegen einen Strahl γ in C_t konvergiert. Da dann aber nach Definition $\gamma(s) \notin C_t$ für $s > t$ gelten müßte, ergibt sich ein Widerspruch, und somit ist jedes C_t kompakt.

(iii) Für alle Strahlen $\gamma \in R_p$ und $t_1 \leq t_2$ gilt

$$B_s(\gamma_{t_2}(s)) = B_s(\gamma(s + t_2)) \subset B_{s+(t_2-t_1)}(\gamma(s + t_2)) = B_{s+t_2-t_1}(\gamma_{t_1}(s + t_2 - t_1))$$

und somit $B_{\gamma_{t_2}} \subset B_{\gamma_{t_1}}$, was bedeutet, daß $C_{t_1} \subset C_{t_2}$.

(iv) Im letzten Schritt muß noch gezeigt werden, daß für $t_2 > t_1$ und beliebiges $\gamma \in R_p$ die Gleichheit $B_{\gamma_{t_1}} = \{q \mid dist(q, B_{\gamma_{t_2}}) < t_2 - t_1\}$ gilt.

Sei dazu also $dist(q, B_{\gamma_{t_2}}) < t_2 - t_1$, das heißt es existiert ein $q' \in B_{\gamma_{t_2}}$ mit $d(q, q') < t_2 - t_1$. Da $q' \in B_{\gamma_{t_2}}$, gilt auch $q' \in B_s(\gamma_{t_2}(s))$ für genügend große s und somit wegen der Dreiecksungleichung $q \in B_{s+t_2-t_1}(\gamma(s + t_2)) \subset B_{\gamma_{t_1}}$.
Falls umgekehrt $q \in B_{\gamma_{t_1}}$ gilt, so existiert ein $s > 0$ mit

$$q \in B_{s+t_2-t_1}(\gamma_{t_1}(s + t_2 - t_1)) = B_{s+t_2-t_1}(\gamma_{t_2}(s)) \supset B_s(\gamma_{t_2}(s))$$

und somit gilt $dist(q, B_{\gamma_{t_2}}) \leq dist(q, B_s(\gamma_{t_2}(s))) < t_2 - t_1$.

Man sieht nun leicht, daß $\bigcup_{\gamma \in R_p} B_{\gamma_{t_1}} = \{q \mid dist(q, \bigcup_{\gamma \in R_p} B_{\gamma_{t_2}}) < t_2 - t_1\}$ gilt, und hieraus ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
C_{t_1} &= M \setminus \bigcup_{\gamma \in R_p} B_{\gamma_{t_1}} = M \setminus \{q \mid dist(q, \bigcup_{\gamma \in R_p} B_{\gamma_{t_2}}) < t_2 - t_1\} \\
&= \{q \mid dist(q, \bigcup_{\gamma \in R_p} B_{\gamma_{t_2}}) \geq t_2 - t_1\} = \{q \mid dist(q, \partial \bigcup_{\gamma \in R_p} B_{\gamma_{t_2}}) \geq t_2 - t_1\} \\
&= \{q \mid dist(q, \partial C_{t_2}) \geq t_2 - t_1\}.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde im letzten Schritt benutzt, daß $\partial C = \partial(M \setminus C)$ für beliebige Mengen C gilt.

Somit wäre also (1) gezeigt. Wegen der Dreiecksungleichung ist außerdem klar, daß für jedes $q \in M$ und $t \geq d(q, p)$ auch $q \in C_t$ gelten muß. Damit ist auch (2) gezeigt, und (3) folgt sofort aus der Konstruktion. $\square$

Bemerkung 2.5 Die Mengen C_t sind für alle $t \geq 0$ nicht leer, weil wegen $p \notin B_\gamma$ für alle $\gamma \in R_p$ stets $p \in C_t$ gelten muß.

Ein paar sehr einfache Beispiele sollen nun zeigen, wie diese Mengen C_t aussehen können.

Beispiel 2.6 (1) Betrachtet man das Paraboloid als Fläche im $\mathbb{R}^3$, welches durch die Gleichung $z = x^2 + y^2$ gegeben ist, so stellt dieses eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit echt positiver Krümmung dar.
Die Strahlen sind hier gerade die Meridiane und die Mengen H_γ sind dann Kappen, deren Ränder jeweils Kreise parallel zur $(x-y)-$Ebene sind. Da es aber zu jedem Punkt p nur einen Strahl gibt, sind die Mengen C_t ebenfalls solche Kappen.

(2) Analog stellt der Zylinder im $\mathbb{R}^3$, der durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ gegeben ist, eine flache 2-dimensionale Mannigfaltigkeit dar.
Die Strahlen sind dann Geodäten parallel zur $z-$Achse und die Mengen H_γ sind Zylinderstücke ober- oder unterhalb einer Ebene $z \equiv konstant$.
Da hier von einem Punkt immer genau zwei Strahlen ausgehen, sind die Mengen C_t in diesem Fall Flächenstücke, die jeweils durch zwei Ebenen der Form $z \equiv konstant$ beschränkt sind.

(3) Der $\mathbb{R}^n$ mit seiner Standardmetrik ist auch eine Mannigfaltigkeit, welche die Voraussetzungen erfüllt.
Hier sind Strahlen genau Halbgeraden und die Mengen H_γ somit Halbebenen. Da von einem Punkt aus in jede Richtung eine Halbgerade startet, sind die Mengen C_t folglich Kugeln vom Radius t um den Startpunkt.

Nachdem also sichergestellt ist, daß viele kompakte, total konvexe Teilmengen von M zur Verfügung stehen, versucht man nun, daraus Mengen zu konstruieren, die total geodätische, glatt eingebettete Untermannigfaltigkeiten sind.
Die Idee dabei ist zu zeigen, daß das Innere solcher total konvexer Mengen diese Eigenschaften erfüllt.

Für diesen Abschnitt sei deshalb C eine total konvexe Teilmenge einer beliebigen vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit.

Es bezeichne $0 \leq k \leq n$ die größte ganze Zahl, so daß die Menge
$\{N_\alpha \mid N_\alpha \subset C$ ist glatt eingebettete k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $M\}$
nicht leer ist. Für dieses k sei dann $N := \bigcup\limits_\alpha N_\alpha$.

Falls $k = 0$ ist für eine Menge C, falls also nur Punkte glatt in C eingebettet werden können, so ist $N = C$. In allen Fällen gilt zumindest $N \subset C$.

Das Ziel ist jetzt zu zeigen, daß $N = int\, C$ gilt und N die gewünschten Eigenschaften erfüllt.

Lemma 2.7 *Die Menge N ist eine glatt eingebettete Untermannigfaltigkeit von M.*

Beweis Zu jedem $p \in N$ gibt es ein α, so daß $p \in N_\alpha$, und weil N_α bereits eine glatt eingebettete Untermannigfaltigkeit ist, gibt es eine kleine Umgebung U von p mit $U \subset N_\alpha$ und ein $\delta > 0$, so daß die Exponentialabbildung eingeschränkt auf die Vektoren der Länge kleiner δ im Normalenbündel von U ein Diffeomorphismus auf eine Umgebung T_δ von p in M ist. Um zu zeigen, daß N eingebettete Untermannigfaltigkeit ist, reicht es also zu zeigen, daß $N \cap T_\delta = U$ gilt.

Nehme dazu an, daß $q \in (C \cap T_\delta) \setminus U$ existiert und q' ein Punkt in U mit minimalem Abstand zu q ist. Dann steht eine minimale Geodäte von q nach q' senkrecht auf U, das heißt in einer kleinen Umgebung U' von q' mit $U' \subset U$ schneidet jede minimale Geodäte, die q und einen beliebigen Punkt $q'' \in U'$ verbindet, die Menge U' transversal. Das bedeutet wiederum, daß der Kegel

$$K := \{\exp_q(tv) \mid v \in T_qM,\ \exp_q(v) \in U',\ \exp_q(tv) \in T_\delta,\ 0 < t < 1\}$$

eine $(k+1)-$dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von M ist, und aufgrund der Konvexität von C folgt, daß $K \subset C$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Wahl von k, also existiert kein $q \in (C \cap T_\delta) \setminus U$ beziehungsweise kein $q \in (N \cap T_\delta) \setminus U$ und somit folgt wegen $U \subset (N \cap T_\delta)$ die Behauptung. $\square$

Auch die zweite an N geforderte Eigenschaft ist erfüllt:

Lemma 2.8 *Die Menge N ist total geodätisch.*

Beweis Sei dazu γ eine Geodäte in N, aber keine in M, das heißt es gibt zwei Punkte p und p' auf γ und eine Geodäte $\tilde{\gamma}$ von p nach p' in M, so daß die Länge von γ zwischen p und p' größer ist als die Länge von $\tilde{\gamma}$, und diese liegt nicht ganz in N. Wegen der Konvexität von C gilt aber $\tilde{\gamma} \subset C$. Es gibt also einen Punkt q auf $\tilde{\gamma}$, der in N liegt und in dessen Umgebung es Punkte auf $\tilde{\gamma}$ gibt, die in $C \setminus N$ liegen. Da nun aber zu q eine Umgebung T_δ wie oben existiert mit $(C \cap T_\delta) \subset N$, erhält man einen Widerspruch, das heißt jede Geodäte in N muß schon Geodäte in M sein. $\square$

Es muß also nur noch gezeigt werden, daß $N = int\, C$ gilt. Dazu folgendes

Lemma 2.9 *Es gilt $C \subset \overline{N}$.*

Beweis Angenommen, es existiert ein $p \in C$, welches nicht in $\overline{N}$ liegt. Dann gibt es ein $q \in \overline{N}$ mit minimalem Abstand zu p, und es gilt $d(p,q) > 0$. Außerdem gibt es einen Punkt $q' \in N$ mit beliebig kleinem Abstand zu q und somit ein α, so daß $q' \in N_\alpha$. Das bedeutet aber weiter, daß in einer kleinen Umgebung $U \subset N_\alpha$ von q' alle minimalen Geodäten, die p und Punkte aus U verbinden, diese Menge U transversal schneiden. Auf diese Weise erhält man wieder einen Kegel

$$K := \{\exp_p(tv) \mid v \in T_pM,\ \exp_p(v) \in U,\ 0 < t < 1\},$$

der wegen der Konvexität ganz in C liegen muß, was nicht sein kann, da K eine $(k+1)-$dimensionale Untermannigfaltigkeit von M in C wäre. $\square$

Aus den letzten Lemmata geht also hervor, daß das Innere einer total konvexen Teilmenge C eine total geodätische, glatt eingebettete Untermannigfaltigkeit ist. Falls man nun daraus tatsächlich eine Seele gewinnen möchte, sollte die Menge C zusätzlich keinen Rand und eine niedrigere Dimension als M haben.

Um zu zeigen, daß auch kompakte, total konvexe Mengen C mit diesen weiteren Eigenschaften existieren, ist ein kleiner Einschub über sogenannte Tangentialkegel nötig. Dabei handelt es sich um ein Konzept zur Verallgemeinerung von Tangentialräumen auf Mengen, die nicht notwendigerweise Untermannigfaltigkeiten sind.

Definition 2.10 Der *Tangentialkegel* einer abgeschlossenen, total konvexen Menge C im Punkt $p \in C$ ist definiert als

$$C_p := \{v \in T_pM \mid \exp_p(t\frac{v}{\|v\|}) \in int\, C \text{ für ein } 0 < t < r(p)\} \cup \{0\},$$

wobei $r(p)$ der Konvexitätsradius im Punkt p ist (vergleiche Bemerkung 1.1).
Der Unterraum, den C_p in T_pM erzeugt, wird mit $\hat{C}_p$ bezeichnet.

Für $p \in int\, C$ gilt $C_p = \hat{C}_p = T_pC$, während für $p \in \partial C$ stets $C_p \neq \hat{C}_p$ gilt.

Das nun folgende Lemma ist nicht nur in diesem, sondern auch in vielen anderen Zusammenhängen sehr hilfreich.

Lemma 2.11 *Sei $C \subset M$ abgeschlossen und total konvex.*
Falls es Punkte $p \in \partial C$, $q \in int\, C$ und eine minimale Geodäte $\gamma : [\,0, d\,] \to C$ von q nach p gibt, so daß $L(\gamma) = dist(q, \partial C)$, so gilt $C_p \setminus \{0\} = H$ mit
$H := \{v \in T_pM \mid \sphericalangle(v, -\dot{\gamma}(d)) < \frac{\pi}{2}\}$.

Beweis Wähle $s < d$ so, daß $d(\gamma(s), p) < \frac{1}{2}r(p)$ gilt. Weil dann $\gamma|_{[s,d]}$ den Abstand von $\gamma(s)$ zu ∂C realisiert, gilt $\overline{B_{d-s}(\gamma(s))} \cap \partial C = p$, woraus $H \subset C_p \setminus \{0\}$ folgt.
Sei umgekehrt $v \in C_p \setminus \{0\}$, das heißt $q_0 := \exp_p(t_0\frac{v}{\|v\|}) \in int\, C$ für ein $0 < t_0 < \frac{1}{4}r(p)$, und $\sphericalangle(v, -\dot{\gamma}(d)) > \frac{\pi}{2}$. Dann gilt $\sphericalangle(-v, -\dot{\gamma}(d)) < \frac{\pi}{2}$ und somit nach obigem $-v \in C_p$, das heißt $q_1 := \exp_p(t_1\frac{-v}{\|v\|}) \in int\, C$ für ein $0 < t_1 < \frac{1}{4}r(p)$.
Falls nun $\sigma : [\,-t_1, t_0\,] \to M$ die Geodäte bezeichnet mit $\sigma(0) = p$ und $\dot{\sigma}(0) = v$, so folgt aufgrund der totalen Konvexität von C auch $\sigma \subset C$.
Sei nun W eine genügend kleine $(k-1)-$dimensionale Hyperfläche von $int\, C$ durch q_0 senkrecht zu σ. Der Kegel

$$V := \{\exp_{q_1}(tw) \mid w \in T_{q_1}M,\ \|w\| < r(p),\ \exp_{q_1}(w) \in W,\ 0 < t < 1\}$$

ist dann eine $k-$dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von M, die wegen der totalen Konvexität von C ganz in C enthalten ist. Außerdem muß wegen der vorangegangenen Ausführungen auch $V \subset int\, C$ gelten. Das würde aber $p = \sigma(0) \in int\, C$ im Widerspruch zu $p \in \partial C$ bedeuten.
Falls $\sphericalangle(v, -\dot\gamma(d)) = \frac{\pi}{2}$ gilt für ein $v \in C_p \setminus \{0\}$, so gibt es wegen der Offenheit von $int\, C$ und der Definition des Tangentialkegels auch ein $\tilde v \in C_p \setminus \{0\}$ in der Nähe von v mit $\sphericalangle(\tilde v, -\dot\gamma(d)) > \frac{\pi}{2}$, was, wie man gerade gesehen hat, nicht sein kann. Es gilt also somit auch $C_p \setminus \{0\} \subset H$. □

Bemerkung 2.12 Da der Abschluß einer total konvexen Menge ebenfalls total konvex ist, kann dieses Lemma folglich auch auf offene Mengen (beziehungsweise deren Abschluß) angewendet werden. Diese Tatsache wird später einige Male benutzt werden, ohne ausdrücklich darauf hinzuweisen.

Eine sehr zentrale Aussage in diesem Zusammenhang ist das folgende Theorem, welches auch in den weiteren Abschnitten zahlreiche Anwendungen finden wird.

Theorem 2.13 *Sei C eine abgeschlossene, total konvexe Teilmenge mit nichtleerem Rand in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Schnittkrümmung. Dann ist $f : C \to I\!R$ mit $f(p) = dist(p, \partial C)$ konkav.*

Falls sogar $f \circ \gamma \equiv d$ konstant ist für eine Geodäte $\gamma : [\,a, b\,] \to C$, gilt für jedes $s \in [\,a, b\,]$, daß $\exp_{\gamma(s)}(t \cdot V(s))|_{[\,0,d\,]}$ eine minimale Geodäte von $\gamma(s)$ nach ∂C ist und daß das Rechteck $\varphi : [\,a, b\,] \times [\,0, d\,] \to M$ mit $\varphi(s, t) = \exp_{\gamma(s)}(t \cdot V(s))$ flach und total geodätisch ist.

Dabei bezeichnet $V(s)$ das parallele Vektorfeld entlang γ mit $V(a) = \dot\gamma_a(0)$, wobei γ_a eine minimale Geodäte von $\gamma(a)$ nach ∂C ist.

Beweis Sei also $\gamma : [\,a, b\,] \to C$ eine Geodäte, und für $a < s_0 < b$ sei $\gamma_{s_0} : [\,0, d\,] \to C$ eine minimale Geodäte von $\gamma(s_0)$ nach ∂C und $\alpha = \sphericalangle(\dot\gamma(s_0), \dot\gamma_{s_0}(0))$.
Für die Konkavität von f reicht es zu zeigen, daß $f \circ \gamma(s) \le d - \cos\alpha \cdot (s - s_0)$ auf einem Intervall $(\, s_0 - \delta,\ s_0 + \delta\,)$ gilt, denn in diesem Fall ist $f \circ \gamma$ lokal das Minimum linearer (also insbesondere konkaver) Funktionen und somit selber konkav nach Bemerkung 1.2.
Um dies zu zeigen, werden 3 Fälle für den Winkel α unterschieden.

Fall 1 : $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Dazu bezeichne $E(t)$ das parallele Vektorfeld entlang γ_{s_0}, das durch $\dot\gamma(s_0)$ erzeugt wird. Nach Bergers Version von Rauchs Theorem (siehe Anhang A) existiert nun ein $\delta_1 > 0$, so daß für die Länge der Kurven $\gamma_s(t) := \exp_{\gamma_{s_0}(t)}(s - s_0)E(t)$ mit $s_0 \le s < s_0 + \delta_1$ gilt $L(\gamma_s) \le d$, und Gleichheit gilt für ein $\tilde s$ genau dann, wenn die Abbildung $[\, s_0, \tilde s\,] \times [\,0, d\,] \to C$, $(s, t) \mapsto \gamma_s(t)$ ein flaches total geodätisches Rechteck definiert.
Angenommen, es existiert nun ein $s \in [\, s_0, \tilde s\,]$ mit $\gamma_s(t) \in int\, C$ für $0 \le t \le d$,

also insbesondere $\gamma_s(d) \in int\, C$, so ergibt sich wegen des vorhergehenden Lemmas ein Widerspruch, da wegen $\alpha = \frac{\pi}{2}$ auch $\sphericalangle(-\dot\gamma_{s_0}(d), \dot\sigma(s_0)) = \frac{\pi}{2}$ gelten muß, wobei $\sigma(s) = \exp_{\gamma_{s_0}(d)}(s-s_0)E(d)$.

Folglich gilt also $f \circ \gamma(s) \leq d$ für alle $s_0 \leq s < s_0 + \delta_1$.
Analog gibt es ein $\delta_2 > 0$, so daß $f \circ \gamma(s) \leq d$ für alle $s_0 - \delta_2 < s \leq s_0$, also gilt für $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ die Behauptung für alle $s \in (\, s_0 - \delta,\ s_0 + \delta\,)$.

Fall 2 : $\alpha > \frac{\pi}{2}$. In diesem Fall sei $E(0) = \lambda\dot\gamma_{s_0}(0) + \mu\dot\gamma(s_0) \in T_{\gamma(s_0)}M$ mit $\lambda,\ \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$ so gewählt, daß $E(0)$ senkrecht auf $\dot\gamma_{s_0}(0)$ steht.
Durch die Konstruktion einer Familie von Kurven $\gamma_s(t)$ wie oben folgt wie in Fall 1 für ein $\delta > 0$ und $s_0 \leq s < s_0 + \delta$, daß

$$(\star) \quad dist(\exp_{\gamma(s_0)} \cos(\alpha - \tfrac{\pi}{2})(s-s_0)E(0), \partial C) \leq d.$$

Andererseits bilden $\gamma(s_0)$, $\gamma(s)$ und $q_s := \exp_{\gamma(s_0)} \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})(s-s_0)E(0)$ ein geodätisches Dreieck und somit gilt wegen des Theorems von Toponogov Teil (2) (siehe Anhang A) $d(\gamma(s), q_s) \leq -(s-s_0)\cos\alpha$, da die Länge der Seite eines entsprechenden Dreiecks im euklidischen Raum $(s-s_0)\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -(s-s_0)\cos\alpha$ beträgt.
Zusammen mit $(\star)$ ergibt sich also

$$dist(\gamma(s), \partial C) \leq d(\gamma(s), q_s) + dist(q_s, \partial C) \leq d - (s-s_0)\cos\alpha\,.$$

Fall 3 : $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Sei nun σ_s eine minimale Geodäte von γ_{s_0} nach $\gamma(s)$, wobei $\sigma_s(0) = \gamma_{s_0}(t_s)$. Es gilt also $\dot\sigma_s(0) \perp \dot\gamma_{s_0}(t_s)$ und somit folgt wie in Fall 1 für ein $\delta > 0$

$$(\star\star) \quad dist(\gamma(s), \partial C) \leq d - t_s \ \text{ für } s \in (\, s_0 - \delta,\ s_0 + \delta\,).$$

Weiterhin bilden die Punkte $\gamma(s_0)$, $\gamma(s)$ und $\gamma_{s_0}(t_s)$ ein geodätisches Dreieck, das heißt mit dem Kosinussatz im euklidischen Raum und dem Theorem von Toponogov Teil (2) folgt jetzt

$$d(\gamma_{s_0}(t_s), \gamma(s))^2 \leq t_s^2 + (s-s_0)^2 - 2t_s(s-s_0)\cos\alpha\,.$$

Außerdem gilt ebenfalls mit dem Theorem von Toponogov Teil (2)
$(s-s_0)^2 \leq t_s^2 + d(\gamma_{s_0}(t_s), \gamma(s))^2$, da der Winkel bei $\gamma_{s_0}(t_s)$ ein rechter Winkel ist.
Insgesamt gilt also

$$2\,t_s \cdot (s-s_0)\cos\alpha \leq t_s^2 + (s-s_0)^2 - d(\gamma_{s_0}(t_s), \gamma(s))^2 \leq 2\,t_s^2$$

beziehungsweise $(s-s_0)\cos\alpha \leq t_s$. Zusammen mit $(\star\star)$ folgt also auch in diesem Fall $dist(\gamma(s), \partial C) \leq d - (s-s_0)\cos\alpha$.

Das Theorem ist somit bewiesen, wobei der zweite Teil der Aussage direkt aus Fall 1 folgt. $\square$

Eine sehr wichtige Folgerung dieses Theorems ist das nächste Korollar.

Korollar 2.14 *Für jedes C wie im letzten Theorem sind die Mengen*
$C^a := \{p \in C \mid dist(p, \partial C) \geq a\}$ *mit* $a \geq 0$ *total konvex.*

Beweis Seien p und q Punkte in C^a und $\gamma : [\,b, d\,] \to M$ eine Geodäte von p nach q. Weil die Distanzfunktion nach dem letzten Theorem konkav ist, gilt jetzt für alle $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$

$$\begin{aligned} dist(\gamma(\lambda b + \mu d), \partial C) &\geq \lambda\, dist(\gamma(b), \partial C) + \mu\, dist(\gamma(d), \partial C) \\ &= \lambda\, dist(p, \partial C) + \mu\, dist(q, \partial C) \geq \lambda a + \mu a = a. \end{aligned}$$

Also gilt $\gamma|_{[\,b,d\,]} \subset C^a$, was zu zeigen war. □

Aufgrund dieser Tatsache ergibt sich nun die Möglichkeit, alle bisher behandelten Aspekte zu kombinieren, um alle Bedingungen, die an eine Seele gestellt werden, gleichzeitig zu erfüllen.

Dazu wählt man eine kompakte, total konvexe Teilmenge C wie aus Satz 2.2 mit $\partial C \neq \emptyset$ und bildet die Menge

$$C^{max} := \bigcap_{C^a \neq \emptyset} C^a.$$

Dann ist die Menge C^{max} wegen obigen Korollares total konvex. Außerdem gilt $C^{max} = C^{a_0}$ mit $a_0 := \max\{a \mid C^a \neq \emptyset\}$, weil die Distanzfunktion stetig und die Menge C kompakt ist.

In dieser Situation gilt folgendes

Lemma 2.15 *Es gilt* $\dim C^{max} < \dim C$.

Dabei ist die Dimension einer kompakten, total konvexen Teilmenge definiert durch $\dim C := \dim\,(int\, C)$.

Beweis Angenommen $p \in C^{max}$ wäre ein innerer Punkt von C^{max} in C und γ eine minimale Geodäte von p nach ∂C. Dann gibt es eine kleine Umgebung $U \subset int\, C^{max}$ um p in C und somit ein $\delta > 0$, so daß $\gamma|_{[\,0,\delta\,]} \subset int\, C^{max}$.
Weil aber p und $\gamma(\delta)$ in C^{a_0} liegen, würde dann

$$a_0 = dist(p, \partial C) = d(p, \gamma(\delta)) + dist(\gamma(\delta), \partial C) = \delta + a_0$$

gelten, was nicht sein kann. Also gibt es keine inneren Punkte von C^{a_0} in C und es gilt $\dim C^{a_0} < \dim C$. □

Die soeben konstruierte Menge C^{max} ist also kompakt, total konvex und hat eine niedrigere Dimension als M. Da sie allerdings noch einen Rand haben kann, iteriert man diesen Prozeß so lange, bis man eine Menge mit leerem Rand erhält. Weil man bei jedem Schritt mindestens eine Dimension verliert, muß der Prozeß nach einer endlichen Anzahl von Schritten zum Ziel führen.

Auf diese Weise erhält man eine endliche Fahne von kompakten, total konvexen Mengen

$$C \supset C(1) \supset C(2) \supset \ ... \ \supset C(k-1) \supset C(k)$$

mit $C(1) = C^{max}$ und $C(i) = C(i-1)^{max} \quad (i = 2, ... k)$, und bei jedem Schritt wird die Dimension der Menge $C(i)$ kleiner.

Die Menge $int\,(C(k))$ hat, wie bereits gezeigt, die Eigenschaft, total geodätische eingebettete Untermannigfaltigkeit von M zu sein. Weil aber $\partial C(k) = \emptyset$ gilt, folgt $C(k) = int\,(C(k))$ und somit besitzt auch $C(k)$ selbst diese Eigenschaft.

Bezeichnet man nun also die Menge $C(k)$ mit S, so ist diese eine kompakte, total konvexe, total geodätische Untermannigfaltigkeit von M ohne Rand mit $\dim S < \dim M$, also eine Seele.

Allein die Existenz einer solchen Seele, die hiermit gezeigt wurde, ist sehr bemerkenswert, aber von eigentlichem Interesse ist die noch nicht bewiesene Tatsache, daß die Mannigfaltigkeit M dann diffeomorph zum Normalenbündel der Seele ist.

Da die Exponentialabbildung $\exp|_{\nu(S)}$ für kleine r einen Diffeomorphismus zwischen $\nu(S)$ und einer schlauchförmigen Umgebung $B_r(S)$ von S darstellt (siehe [Cha], 3.6), reicht es an dieser Stelle, das folgende Lemma zu beweisen.

Lemma 2.16 *Für kleine $r > 0$ existiert ein Diffeomorphismus $\varphi : M \to B_{2r}(S)$ mit $\varphi = id$ auf $B_r(S)$, wobei $B_r(S) = \{q \in M \mid dist(q, S) < r\}$.*

Beweis Zuerst wird gezeigt, daß zu jedem $p \in M \setminus S$ ein Vektor $v \in T_pM$ existiert, so daß $\langle v, \dot\gamma(0)\rangle < 0$ für jede minimale Geodäte γ von p nach S gilt. Ein solcher Vektor heißt dann gradientenartiger Vektor der Distanzfunktion.
Sei also $p \in M \setminus S$ beliebig. Dann gilt $p \in C(i-1) \setminus C(i)$ für ein $i \in \{1, ... k\}$ und ein C aus Satz 2.2 (dabei ist $C(0) = C$), und dann auch $p \in \partial(C(i-1))_t$ für genau ein $t \geq 0$. Da $(C(i-1))_t$ abgeschlossen und total konvex ist mit $S \subset int\,(C(i-1))_t$, zeigt $\dot\gamma(0)$ für jede minimale Geodäte γ von p nach S ins Innere von $(C(i-1))_t$, und somit ist wegen Lemma 2.11 der Vektor $-\dot\gamma(0)$ für jedes solche γ ein gradientenartiger Vektor der Distanzfunktion.

Weil S eine kompakte Untermannigfaltigkeit ist, kann man jetzt $r > 0$ so klein wählen, daß die Distanzfunktion auf $B_{2r}(S) \setminus S$ glatt ist. Wie gerade gezeigt, ist es möglich, zu jedem $p \in M \setminus B_r(S)$ einen gradientenartiger Vektor der Distanzfunktion auszuwählen. Außerdem kann man diesen jeweils in einer kleinen Umgebung U_p zu einem gradientenartigen Vektorfeld V_p fortsetzen. Weil jedoch $M \setminus B_r(S)$ parakompakt ist, gibt es eine lokal endliche Teilüberdeckung $(U_{p_i})_{i \geq 1}$. Mit der Bezeichnung $V_0 := \nabla_{dist}$ auf $B_{2r}(S) \setminus S$ und $V_i = V_{p_i}$ (hierbei bezeichnet ∇_{dist} den Gradienten der

Distanzfunktion zu S) und der Wahl einer glatten untergeordneten Zerlegung der Eins $(\varphi_i)_{i\geq 0}$ kann man durch $V := \sum_{i\geq 0} \varphi_i\, V_i$ ein glattes gradientenartiges Vektorfeld auf $M \setminus S$ erhalten, welches auf $B_r(S) \setminus S$ mit ∇_{dist} übereinstimmt.

Zu jedem Punkt p sei jetzt c_p die Integralkurve an V mit $c_p(0) = p$. Da alle Integralkurven die Menge $\partial B_r(S)$ transversal (sogar orthogonal) schneiden, gibt es eine glatte Funktion $t : M \setminus S \to \mathbb{R}$ mit $c_p(t(p)) \in \partial B_r(S)$. Durch Umparametrisierung der Integralkurven erhält man jetzt Kurven $\tilde{c}_p$ durch $\tilde{c}_p(t) = c_p(r + t(p) - t)$ mit $\tilde{c}_p(0) \in S$. Weiter sei $\psi : \mathbb{R}_+ \to [\,0, 2r\,)$ eine glatte Funktion mit $\psi(t) = t$ für $t \in [\,0, r\,]$ und $\psi' > 0$. Definiert man nun $\varphi : M \to B_{2r}(S)$ durch

$$\varphi(p) = \begin{cases} p & \text{falls } \; p \in B_r(S) \\ \tilde{c}_p(\psi(r + t(p))) & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

so ist dies der gewünschte Diffeomorphismus von M auf $B_{2r}(S)$. □

Bemerkung 2.17 Cheeger und Gromoll, die diese Aussage als erste bewiesen haben (siehe [CG2]), haben keine untergeordnete Zerlegung der Eins benutzt. Dadurch wird der Beweis allerdings sehr kompliziert, da man nur mit stückweisen Geodäten arbeiten kann und diese dann glätten muß. Zur Idee dieses Beweises vergleiche auch Bemerkung 5.7. Der hier ausgeführte Beweis stammt von J.-H. Eschenburg (siehe [Ebg], Kapitel 10).

3 Busemann-Funktionen

Die wichtigsten Schritte der Seelenkonstruktion im letzten Kapitel waren zunächst Satz 2.2 und somit die Konstruktion der total konvexen Mengen C_t und dann die Kontraktion einer kompakten, total konvexen Menge C mit nichtleerem Rand auf die Menge C^{max} mit niedrigerer Dimension.

Diese Schritte und die damit verbundenen Aussagen und Beweise lassen sich auch mit Hilfe der sogenannten Busemann-Funktionen sehr schön beschreiben.
Dabei ist die Busemann-Funktion zu einem gegebenen Strahl wie folgt definiert.

Sei $\gamma : [\,0, \infty\,) \to M$ ein Strahl und $(b_t)_{t \geq 0}$ die Familie von Funktionen $b_t : M \to I\!R$ mit $b_t(p) = t - d(p, \gamma(t))$. Aufgrund der Dreiecksungleichung sind die Funktionen b_t alle durch $d(p, \gamma(0))$ beschränkt und monoton fallend in t, weil für $t > s$

$$\begin{aligned} b_t(p) - b_s(p) &= d(p, \gamma(t)) - d(p, \gamma(s)) - (t - s) \\ &= d(p, \gamma(t)) - d(\gamma(t), \gamma(s)) - d(\gamma(s), p) \leq 0 \end{aligned}$$

gilt. Das heißt für jeden Punkt $p \in M$ existiert der folgende Grenzwert.

$$b_\gamma(p) := \lim_{t \to \infty} (t - d(p, \gamma(t)).$$

Die so definierte Funktion $b_\gamma : M \to I\!R$ ist die zu γ gehörende *Busemann-Funktion*, und ihre Niveaumengen heißen *Horosphären.*

Da die Mengen $\{p \in M \mid b_t(p) = a\}$ geodätische Sphären um $\gamma(t)$ sind, kann man sich intuitiv die Horosphären als geodätische Sphären um $\gamma(\infty)$ vorstellen.

Weil alle b_t Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante 1 sind, gilt dies auch für die Funktion b_γ, und diese ist folglich fast überall differenzierbar.

Für Punkte auf γ gilt außerdem

$$b_\gamma(\gamma(s)) = \lim_{t \to \infty} (t - d(\gamma(s), \gamma(t))) = \lim_{t \to \infty} (t - (t - s)) = s\,.$$

Weiterhin gibt es zu jedem $p \in M$ und zu jeder positiven Folge $t_n \to \infty$ eine konvergente Teilfolge der normierten Tangentialvektoren von minimalen Geodäten von p nach $\gamma(t_n)$.
Die Geodäte in einer solchen Grenzrichtung ist wieder ein Strahl und heißt *Asymptote* von γ. Asymptoten sind allerdings im allgemeinen nicht eindeutig.

Falls man sogar eine geodätische Linie in M hat, das heißt eine Geodäte $\gamma : (-\infty, \infty) \to M$, die zwischen je zwei ihrer Punkte minimal ist, so kann man noch eine zweite Busemann-Funktion b_γ^- betrachten mit $b_\gamma^-(p) := \lim_{t \to -\infty} -(t + d(p, \gamma(t)).$

Zu gegebenem $p \in M$ bezeichne $b : M \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion mit

$$b(q) := \max_{\gamma \in R_p} b_\gamma(q) .$$

Daraus erhält man dann eine Familie $(\tilde{C}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ von Mengen durch

$$\tilde{C}_t := \{q \in M \mid b(q) \leq t\} ,$$

die für $t \geq 0$ mit der Familie $(C_t)_{t\geq 0}$ übereinstimmt.

Um dies sehen zu können, werden die Mengen C_t zu

$$C_t = \{q \in M \mid d(q, \gamma(s+t)) \geq s \text{ für alle } s \geq 0 \text{ und alle } \gamma \in R_p\}$$

und die Mengen $\tilde{C}_t$ zu $\tilde{C}_t = \{q \in M \mid \lim_{s\to\infty}(s - d(q, \gamma(s))) \leq t \text{ für alle } \gamma \in R_p\}$ umformuliert.

Die Inklusion $C_t \subset \tilde{C}_t$ ist jetzt offensichtlich, denn für jedes $q \in C_t$ und $\gamma \in R_p$ gilt dann

$$\begin{aligned}\lim_{s\to\infty}(s - d(q, \gamma(s))) - t &= \lim_{s\to\infty}(s - d(q, \gamma(s)) - d(\gamma(s), \gamma(s+t))) \\ &\leq \lim_{s\to\infty}(s - d(q, \gamma(s+t))) \leq 0 ,\end{aligned}$$

was bedeutet, daß $q \in \tilde{C}_t$ gilt.

Die andere Inklusion $\tilde{C}_t \subset C_t$ folgt aus einer weiteren Umformulierung der Mengen $\tilde{C}_t$ zu

$$\tilde{C}_t = \{q \in M \mid \lim_{s\to\infty}(s - d(q, \gamma(s+t))) \leq 0 \text{ für alle } \gamma \in R_p\}.$$

Falls nämlich $q \notin C_t$ gilt, so gibt es ein $s_0 \geq 0$ und einen Strahl $\gamma_0 \in R_p$, so daß $d(q, \gamma_0(s_0+t)) < s_0$. Mit $\epsilon := s_0 - d(q, \gamma_0(s_0+t)) > 0$ folgt dann

$$\begin{aligned}s - d(q, \gamma_0(s+t)) &\geq s - d(q, \gamma_0(s_0+t)) - d(\gamma_0(s_0+t), \gamma_0(s+t)) \\ &= s + \epsilon - s_0 - (s - s_0) = \epsilon > 0\end{aligned}$$

für alle $s \geq s_0$ und somit $\lim_{s\to\infty}(s - d(q, \gamma_0(s+t))) > 0$, was $q \notin \tilde{C}_t$ bedeutet.

Um zu zeigen, daß die zweite Umformulierung richtig ist, reicht es, die Aussage $\lim_{s\to\infty}(d(q, \gamma(s+t)) - d(q, \gamma(s))) = t$ zu zeigen, denn dann gilt

$$\begin{aligned}\lim_{s\to\infty}(s - d(q, \gamma(s))) - t &= \lim_{s\to\infty}(s - d(q, \gamma(s)) + d(q, \gamma(s)) - d(q, \gamma(s+t))) \\ &= \lim_{s\to\infty}(s - d(q, \gamma(s+t))) .\end{aligned}$$

Betrachte dazu die Punkte q, $\gamma(s)$ und $\gamma(s+t)$ für jedes große s als Ecken eines geodätischen Dreiecks mit Seiten γ_s^i $(i = 1, 2, 3)$. Dabei bezeichnet γ_s^1 eine minimale

Geodäte von q nach $\gamma(s)$, γ_s^2 eine minimale Geodäte von q nach $\gamma(s+t)$, und für die dritte Seite gelte $\gamma_s^3 = \gamma|_{[s,s+t]}$. Außerdem sei $\beta(s) = \sphericalangle(\dot{\gamma}_s^1(0), \dot{\gamma}_s^2(0))$, und $\alpha(s)$ bezeichne den Winkel zwischen γ_s^1 und γ_s^3 bei $\gamma(s)$.
Im $\mathbb{R}^2$ gilt für eine Familie entsprechender Dreiecke mit Seiten $\bar{\gamma}_s^i$, das heißt mit $L(\bar{\gamma}_s^i) = L(\gamma_s^i)$, die Aussage $\lim\limits_{s\to\infty} \bar{\beta}(s) = 0$ (zum Beispiel mit dem Sinussatz) beziehungsweise $\lim\limits_{s\to\infty} \bar{\alpha}(s) = \pi$.
Mit dem Satz von Toponogov Teil (1) (siehe Anhang A) folgt dann $\alpha(s) \geq \bar{\alpha}(s)$ für alle großen s und folglich $\lim\limits_{s\to\infty} \alpha(s) \geq \pi$.
Das bedeutet, daß γ_s^1 und γ_s^2 gemeinsam gegen einen Strahl konvergieren (einer Asymptote zu γ durch q), woraus die Behauptung folgt.

Es stellt sich an dieser Stelle natürlich die Frage, worin die Unterschiede dieser neuen Interpretation der Mengen C_t zu der Konstruktion in Kapitel 2 liegen.
Die Hauptintention bei dieser Art der Betrachtung ist es, die geometrischen Eigenschaften der benutzten Mengen mit analytischen Hilfsmitteln zu zeigen.

Um beispielsweise zu zeigen, daß die Mengen C_t total konvex sind, zeigt man zunächst, daß alle Busemann-Funktionen konvex sind und erhält daraus, daß die Funktion b als Maximum konvexer Funktionen ebenfalls konvex ist. Der Rest folgt dann analog zu Korollar 2.14.

Die Hauptarbeit steckt in diesem Fall also darin, die Konvexität der Busemann-Funktionen zu zeigen.
Wichtig ist dabei die Tatsache, daß für C^2-Funktionen f die Konvexität gleichbedeutend ist mit $D\nabla f \geq 0$. (Dabei bezeichnet ∇ den Gradienten von f und D die kovariante Ableitung auf M.) Es stellt sich heraus, daß man nun diese hinreichende Bedingung auf stetige Funktionen f verallgemeinern kann, indem man sie nur für Trägerfunktionen von f und deren Ableitungen fordert. (Eine Trägerfunktion von f an der Stelle p ist eine C^2-Funktion $\tilde{f} \leq f$ mit $\tilde{f}(p) = f(p)$.)

Um allerdings zu zeigen, daß $D\nabla\tilde{f} \geq 0$ für Trägerfunktionen der Busemann-Funktion zu einem Strahl γ gilt, benötigt man dann noch ein Vergleichstheorem für Lösungen der Riccati-Gleichung $A' + A^2 + R(\,.\,,\dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0$ mit $A = D_{\dot{\gamma}}$.
Die Riccati-Gleichung erhält man als eine der beiden Gleichungen, wenn man die Jakobi-Gleichung in ein System von Gleichungen erster Ordnung aufspaltet.
Dieses Theorem wendet man an, um für $K_M \geq 0$ den Ausdruck $D\nabla\tilde{f}$ durch die Lösung der Gleichung $A' + A^2 = 0$ abzuschätzen. Auf diese Weise erhält man tatsächlich die gewünschte Bedingung für die Trägerfunktionen und somit die Konvexität der Busemann-Funktionen.

Mit ähnlichen Methoden kann man in diesem Kontext auch die Konkavität der Distanzfunktion zum Rand einer total konvexen Menge zeigen (Theorem 2.13).

Vollständige Ausführungen der hier leider nur kurz angeschnittenen Methoden, um Theorem 2.1 zu beweisen, findet man in [Ebg], Kapitel 10.

Die Untersuchung der Busemann-Funktionen ist aber auch in anderen Zusammenhängen, die nicht direkt mit der Seele in Verbindung stehen, sehr interessant. In Kapitel 7 zum Beispiel werden Mannigfaltigkeiten betrachtet, die eine geodätische Linie beinhalten. Man wird sehen, daß es auch dort wieder alternative Beweismethoden des Splitting Theorems mittels Busemann-Funktionen geben wird.

4 Beispiele und Ausblicke

Nachdem in den vorangegangenen beiden Kapiteln gezeigt wurde, wie man eine Seele einer nichtkompakten Mannigfaltigkeit nichtnegativer Schnittkrümmung konstruieren kann, eröffnen sich nun einige neue Fragestellungen.

Als erstes wäre es vielleicht hilfreich, Beispiele dafür zu haben, wie eine solche Seele aussehen kann. Dazu kann man beispielsweise die Flächen aus Beispiel 2.6 wieder betrachten, nämlich das in den $\mathbb{R}^3$ eingebettete Paraboloid beziehungsweise den Zylinder und den $\mathbb{R}^n$.
Es stellt sich heraus, daß

(1) die Seele des Paraboloids einpunktig ist, sie besteht nur aus dem Scheitelpunkt.

(2) Die Seele des Zylinders ist hingegen eine $1-$dimensionale Sphäre, die senkrecht zur Achse um den Zylinder gewickelt ist.

(3) Im $\mathbb{R}^n$ ist jede Seele einpunktig.

Die Seele kann außerdem stark vom Startpunkt der Konstruktion abhängen. Man sieht zum Beispiel sehr leicht, daß die Seele des $\mathbb{R}^n$ immer genau dem Startpunkt p entspricht, und auch beim Zylinder gilt offensichtlich stets $p \in S$.
Das heißt, in diesen Fällen gibt es jeweils unendlich viele verschiedene Seelen, wohingegen die Seele des Paraboloids eindeutig ist. In Satz 6.21 wird man sehen, daß aber alle Seelen einer Mannigfaltigkeit isometrisch zueinander sein müssen, und wenn es zwei verschiedene Seelen gibt, dann gibt es auch unendlich viele isometrische Kopien dieser Seelen.

Umgekehrt kann man natürlich auch jede kompakte Mannigfaltigkeit S mit nichtnegativer Schnittkrümmung als Seele einer größeren nichtkompakten Mannigfaltigkeit auffassen. Dazu muß man nur das Riemannsche Produkt von S mit dem Euklidischen Raum $\mathbb{R}^m$ (für ein $m > 0$) nehmen, und erhält auf diese Weise S als Seele von $M := S \times \mathbb{R}^m$.

Das Interessante an diesem Beispiel ist die Tatsache, daß in diesem Fall M sogar isometrisch zum Normalenbündel von S ist.
Genauso kann man den Zylinder als isometrisches Produkt $S \times \mathbb{R}$ auffassen.

Wie man am Beispiel des Paraboloids sieht, wäre es aber falsch, zu denken, man könnte immer eine Isometrie von M zu einem Produkt $S \times \mathbb{R}^m$ finden. Unter welchen Voraussetzungen man trotzdem Aussagen in dieser Richtung machen kann, wird im Kapitel über Splitting Theoreme untersucht werden.

Eine weitere sehr interessante Frage ist es, herauszufinden, wann eine Seele einpunktig und die Mannigfaltigkeit somit diffeomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist.
Aus diesem Grund ist der folgende Satz so wichtig.

Satz 4.1 *Falls alle Schnittkrümmungen einer nichtkompakten, vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit M echt positiv sind, besteht die Seele von M nur aus einem Punkt.*

Beweis Angenommen, γ sei eine Geodäte in S und es gelte $S = C(k)$. Da aber $C(k) = C(k-1)^{max}$ gilt, haben alle Punkte in S den gleichen Abstand zu $\partial C(k-1)$, das heißt $t \mapsto dist(\gamma(t), \partial C(k-1))$ ist konstant und somit müßte nach Theorem 2.13 ein flaches, total geodätisches Rechteck existieren, was wegen $K_M > 0$ nicht sein kann. Also gibt es keine Geodäte in S, und diese ist folglich einpunktig. $\square$

Es schließt sich jetzt natürlich die Frage an, ob die Einpunktigkeit der Seele schon unter schwächeren Voraussetzungen erreicht werden kann. Die berühmte Vermutung von Cheeger und Gromoll bestand nun darin, daß es bereits reicht, einen Punkt zu finden, in dem alle Schnittkrümmungen positiv sind.
Um dies beweisen zu können, ist allerdings noch ein wenig Vorarbeit notwendig.

5 Eine Retraktion von M auf die Seele

In diesem Kapitel geht es darum, alle Hilfsmittel bereitzustellen, um das Theorem von Perelman beweisen zu können, welches wiederum einen Beweis für die Vermutung von Cheeger und Gromoll liefert.
G. Perelman verwendet in seinem Beweis ganz wesentlich die Existenz einer Retraktion von M auf S, welche eine gewisse Kontraktionseigenschaft erfüllen soll. Die Existenz einer solchen Retraktion soll deshalb hier gezeigt werden.

Definition 5.1 Eine stetige Funktion $P : M \to S$ heißt *Retraktion*, falls $S \subset M$ und $P \circ i = id_S$, wobei $i : S \to M$ die kanonische Einbettung ist.

Man sagt dann, daß P *Abstände nicht vergrößert*, falls P Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante 1 ist, das heißt falls $d(P(p), P(q)) \leq d(p, q)$ für alle $p, q \in M$ gilt.

Bemerkung 5.2 Das Problem liegt nicht darin, eine Retraktion von M auf S zu finden, denn diese würde man auch direkt aus einem Diffeomorphismus von M auf $\nu(S)$ wie in Kapitel 2 erhalten. Die Schwierigkeit liegt vielmehr darin, sicherzustellen, daß die Retraktion Abstände nicht vergrößert.

Für die folgende Konstruktion werden die Mengen C_t, $t \geq 0$, aus Satz 2.2 wieder benutzt. Dabei kann man ohne Einschränkung annehmen, daß bereits
$\dim C_0 < \dim M$ gilt. Falls dies nämlich nicht der Fall sein sollte, und somit
${C_0}^{max} = {C_0}^{a_0}$ gilt mit $a_0 > 0$, so bezeichne ${C_0}^{a_0}$ mit $\tilde{C}_0$ und beginne mit $\tilde{C}_0$ statt mit C_0. Dadurch erhält man $\dim C_t = \dim M$ für alle $t > 0$ und $\dim C_0 < \dim M$.
Es gibt also eine Fahne von Mengen

$$C = C(0) \supset C_0 = C(1) \supset ... \supset C(k) = S,$$

wobei S eine Seele von M ist und $C(i+1) = C(i)^{max}$ für $0 \leq i \leq k-1$.
In dieser Situation setze $0 < a_i := \max\{dist(p, \partial C(i)) | p \in C(i)\}$, das heißt es gilt $C(i+1) = C(i)^{a_i}$.

Lemma 5.3 *Sei C eine kompakte, total konvexe Menge, $p \in M \setminus C$ und $q \in C$ mit $dist(p, C) = d(p, q) =: t$. Weiter sei γ eine minimale Geodäte von p nach q und σ eine minimale Geodäte, die q mit einem weiteren Punkt in C verbindet.*
Dann gilt $\langle \dot\gamma(t), \dot\sigma(0) \rangle \geq 0$.

Beweis Betrachte für kleine $\epsilon > 0$ die Variation von Geodäten γ_ϵ, wobei γ_ϵ minimale Geodäte von p nach $\sigma(\epsilon)$ ist. Unter der Annahme $\langle \dot\gamma(t), \dot\sigma(0) \rangle < 0$ würde dann mit der ersten Variationsformel (siehe Anhang B)

$$\frac{d}{d\epsilon} L(\gamma_\epsilon)\big|_{\epsilon=0} = \frac{1}{t} \langle \dot\gamma(t), \dot\sigma(0) \rangle < 0$$

gelten, was bedeuten würde, daß q nicht minimalen Abstand zu p haben könnte. $\square$

Eine entscheidende Idee in der folgenden Konstruktion ist es, die globale Betrachtung total konvexer Mengen durch einen eher lokalen Ansatz zu ersetzen. Eine grundlegende Rolle spielt dabei folgendes

Lemma 5.4 *Für jede kompakte Teilmenge $D \subset M$ gibt es ein $\epsilon(D) > 0$, so daß für alle $p \in D$ und $0 < r \leq \epsilon(D)$ Folgendes gilt.*

(1) *$B_r(p)$ ist diffeomorphes, stark konvexes Bild einer euklidischen Kugel um $0 \in T_pM$ unter $\exp_p$.*

(2) *Sei $\gamma : [0, \delta] \to B_r(p)$ eine Geodäte und $\gamma_0 : [0, 1] \to B_r(p)$ die minimale Geodäte von p nach $\gamma(0)$. Falls jetzt $\langle\dot\gamma(0), \dot\gamma_0(1)\rangle \geq 0$ gilt, so ist die Funktion $g : [0, \delta] \to \mathbb{R}$ mit $g(s) = d(\gamma(s), p)$ streng monoton wachsend auf $[0, \delta]$.*

Beweis Zu (1): Der Konvexitätsradius $r(p)$ ist nach Bemerkung 1.1 eine stetige, positive Funktion und nimmt damit sein Minimum auf der kompakten Menge D an. Die Behauptung folgt jetzt mit $\tilde\epsilon(D) := \min\limits_{p \in D} r(p) > 0$.

Zu (2): Für $r \leq \tilde\epsilon(D)$ ist γ_0 wegen Teil (1) eindeutig bestimmt.
Wähle nun $0 < \epsilon(D) \leq \tilde\epsilon(D)$ so klein, daß die Indexform I (siehe Anhang B) auf Jakobifeldern J entlang Geodäten $\gamma_0 : [0, r] \to M$ mit $\gamma_0(0) \in D$,
$0 < r \leq \epsilon(D)$, $J \perp \dot\gamma_0$, $J(0) = 0$ positiv definit ist. Betrachtet man dann die Variation von Geodäten $\sigma_s : [0, 1] \to D$, $s \in [0, \delta]$, wobei σ_s minimale Geodäte von p nach $\gamma(s)$ ist, so liefert die erste Variationsformel (siehe ebenfalls Anhang B)

$$\frac{d}{ds} L(\sigma_s)|_{s=0} = \frac{d}{ds} g(s)|_{s=0} = \frac{1}{L(\gamma_0)} \langle\dot\gamma_0(1), \dot\gamma(0)\rangle \geq 0\,,$$

und wegen der Wahl von $\epsilon(D)$ folgt aus der zweiten Variationsformel

$$\frac{d^2}{ds^2} L(\sigma_s)|_{s=0} = \frac{d^2}{ds^2} g(s)|_{s=0} > 0\ ,$$

was bedeutet, daß g in der Nähe der 0 streng monoton wachsend ist. $\square$

Lemma 5.5 *Sei C eine kompakte, total konvexe Menge mit $\partial C \neq \emptyset$ und $0 < 3\epsilon = \epsilon(C) \leq a_0$, wobei $\epsilon(C)$ wie im letzten Lemma gewählt ist.*
Dann gibt es $0 < \delta \leq \epsilon$, so daß $dist(p, C(i)^b) < \epsilon$ für alle $p \in C(i)^a$ mit $0 \leq a \leq b \leq a_i$, $b - a < \delta$, $0 \leq i \leq k - 1$.

Beweis Es genügt zu zeigen, daß die Funktion $(b, p) \mapsto dist(p, C^b)$ stetig auf $[0, a_0] \times C$ ist, denn wegen der Kompaktheit von $[0, a_0] \times C$ ist die Funktion dann sogar gleichmäßig stetig, was zu zeigen ist.
Außerdem reicht es natürlich, die Aussage für $i = 0$ zu zeigen.

Sei also (b_n, p_n) eine Folge mit $(b_n, p_n) \to (b, p)$ für $n \to \infty$ und $q_n \in C^{b_n}$ sei die Folge mit $d(p_n, q_n) = dist(p_n, C^{b_n})$. Weil C kompakt ist, besitzt (q_n) eine konvergente Teilfolge (q_{n_k}). Für $q := \lim\limits_{k\to\infty} q_{n_k}$ gilt dann $q \in C^b$, weil wegen $dist(q_{n_k}, \partial C) \geq b_{n_k}$ und der Stetigkeit von $dist$ auch $dist(q, \partial C) \geq b$ gelten muß. Das bedeutet aber

$$\lim_{k\to\infty} dist(p_{n_k}, C^{b_{n_k}}) = \lim_{k\to\infty} d(p_{n_k}, q_{n_k}) = d(p, q) \geq dist(p, C^b).$$

Andererseits gibt es ein $\bar{q} \in C^b$ mit $dist(p, C^b) = d(p, \bar{q})$ und (weil C^b abgeschlossen ist) eine Folge $\bar{q_n} \in C^{b_n}$ mit $\bar{q_n} \to \bar{q}$. Dann gilt aber $dist(p_n, C^{b_n}) \leq d(p_n, \bar{q_n})$, und somit $\lim\limits_{n\to\infty} dist(p_n, C^{b_n}) \leq \lim\limits_{n\to\infty} d(p_n, \bar{q_n}) = d(p, \bar{q}) = dist(p, C^b)$.

Insgesamt gilt also $\lim\limits_{n\to\infty} dist(p_n, C^{b_n}) = dist(p, C^b)$ für jeden Häufungspunkt der Folge (q_n), woraus die Behauptung folgt. □

Korollar 5.6 *Sei C eine kompakte, total konvexe Menge mit $\partial C \neq \emptyset$. Außerdem seien $0 \leq a \leq b \leq a_0$ mit $b - a < \delta$ gegeben.*
Für alle $p \in C^a$ gibt es dann einen eindeutigen Punkt $h(p) \in C^b$ mit $dist(p, C^b) = d(p, h(p))$, was bedeutet, daß die Projektion $h : C^a \to C^b$ wohldefiniert ist.

Beweis Für $p \in C^b$ ist nichts zu zeigen, deshalb sei $p \notin C^b$. Angenommen, es gäbe $q_0 \neq q_1$ in C^b mit $dist(p, C^b) = d(p, q_0) = d(p, q_1)$ und $\gamma : [0, 1] \to C^b$ sei eine minimale Geodäte von q_0 nach q_1. Dann ist wegen Lemma 5.5 $d(p, q_0) = d(p, q_1) < \epsilon$ und somit gilt wegen der Wahl von ϵ und Lemma 5.4 $\gamma([0, 1]) \subset B_\epsilon(p)$.
Sei nun $\gamma_0 : [0, 1] \to C^a$ eine minimale Geodäte von p nach q_0. Wegen Lemma 5.3 gilt $\langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma_0}(1) \rangle \geq 0$, woraus mit Lemma 5.4 folgt, daß die Funktion $s \mapsto d(\gamma(s), p)$ streng monoton wachsend ist. Dies ist aber ein Widerspruch zu $d(p, q_0) = d(p, q_1)$, womit die Behauptung bewiesen ist. □

Bemerkung 5.7 (1) Die Funktion $h : C^a \to C^b$ ist eine Retraktion, da die Distanzfunktion $p \mapsto dist(p, C^b)$ stetig ist.

(2) Sei $U_p := \{v \in T_pM \mid \|v\| < \epsilon\}$ für jedes $p \in C^a$.
Dann ist $p \mapsto X_p := (\exp_p|_{U_p})^{-1}(h(p))$ ein stetiges Vektorfeld auf C^a.
Cheeger und Gromoll haben dieses Vektorfeld benutzt, um einen Diffeomorphismus von M auf $\nu(S)$ zu konstruieren (vergleiche [CG2], Kapitel 2). Dabei haben sie mit Hilfe von X_p Homöomorphismen $F : \partial C^a \times [0, 1] \to C^a \setminus int\, C^b$ definiert, die sich dann iterativ zu einem Homöomorphismus auf ganz M zusammensetzen lassen. Durch Glättung erhält man daraus einen Diffeomorphismus, der sehr nahe an der Exponential-Abbildung $\exp|_{\nu(S)}$ liegt.

(3) Für $a_0 - a < \delta$ definiert $H : C^a \times [0,1] \to C^a$ mit $H(p,t) = \exp_p(tX_p)$ eine Homotopie zwischen id_{C^a} und h, denn es gilt $H(\,.\,,0) = id_{C^a}$ und $H(\,.\,,1) = h$, wobei $h : C^a \to C^{a_0}$ eine Retraktion ist.
Das heißt h ist eine Deformationsretraktion, und C^{a_0} ist folglich ein Deformationsretrakt von C^a. (Zur Definition dieser Begriffe siehe Anhang C.) Auf diese Weise kann man zeigen, daß die Seele ein Deformationsretrakt von M ist (siehe [CG2], Theorem 2.5). Vergleiche dazu auch Kapitel 6, insbesondere Lemma 6.19.

Die Idee des weiteren Vorgehens ist jetzt, die Funktion h als Ausgangspunkt zu nehmen, um eine Folge Lipschitzstetiger Funktionen zu konstruieren, die dann gegen eine Lipschitzfunktion mit Lipschitzkonstante 1 konvergieren sollen. Das folgende Lemma und vor allem das daraus folgende Korollar sind, wie man im Beweis des Theorems sehen wird, nötig, um diese Lipschitzkonstanten zu erhalten.

Lemma 5.8 (Buser, Karcher) *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K_M \leq K$ für eine Konstante $K \geq 0$ und J ein Jakobifeld entlang einer Geodäten σ mit $\|\dot\sigma\| = r$. Außerdem sei J orthogonal zu $\dot\sigma$, und f_K eine Lösung der Gleichung $f'' + Kr^2 f = 0$ mit den gleichen Anfangswerten wie die Funktion $\|J\|$, das heißt*
$f_K(\tau) = \|J(0)\| \cdot \cos(\tau K^{\frac{1}{2}} r) + \|J\|'(0) \cdot \sin(\tau K^{\frac{1}{2}} r)$.
Falls $f_K(\tau) > 0$ für $\tau \in (0, \tau_0)$, so gilt $\|J(\tau)\| \geq f_K(\tau)$ für alle $\tau \in [0, \tau_0]$.

Beweis Es gilt

$$
\begin{aligned}
\|J\|'' + Kr^2\|J\| &= (\langle J,J\rangle^{\frac{1}{2}})'' + Kr^2\langle J,J\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&= (\langle J,J\rangle^{-\frac{1}{2}}\langle J',J\rangle)' + Kr^2\langle J,J\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&= -\langle J,J\rangle^{-\frac{3}{2}}\langle J',J\rangle^2 + \langle J,J\rangle^{-\frac{1}{2}}(\langle J'',J\rangle + \langle J',J'\rangle) + Kr^2\langle J,J\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&= -\|J\|^{-3}\langle J',J\rangle^2 + \|J\|^{-1}\langle J'',J\rangle + \|J\|^{-1}\|J'\|^2 + Kr^2\|J\| \\
&= \|J\|^{-1}(\langle J'',J\rangle + Kr^2\langle J,J\rangle) + \|J\|^{-3}\underbrace{(\|J\|^2\|J'\|^2 - \langle J',J\rangle)}_{\geq 0 \text{ wg. Cauchy-Schwarz}} \\
&\geq \|J\|^{-1}(\langle J'',J\rangle + Kr^2\langle J,J\rangle) \\
&= \|J\|^{-1}(\langle R(\dot\sigma,J)\dot\sigma,J\rangle + Kr^2\|J\|^2) \\
&= \|J\|^{-1}(\langle -R(\dot\sigma,J)J,\dot\sigma\rangle + Kr^2\|J\|^2) \\
&= \|J\|^{-1}(\underbrace{-K(E)\,r^2\|J\|^2}_{\geq -Kr^2\|J\|^2 nachVor.} + Kr^2\|J\|^2) \\
&\geq 0\,.
\end{aligned}
$$

Dabei bezeichnet R den Riemann-Tensor von M und $K(E)$ die jeweilige Schnittkrümmung der Ebene, die durch $\dot\sigma$ und J aufgespannt wird. Außerdem wurde die Jakobigleichung $J'' = R(\dot\sigma,J)\dot\sigma$ und die Definition der Schnittkrümmungen $K(v,w) = \frac{\langle R(v,w)w,v\rangle}{\|v\|^2\|w\|^2 - \langle v,w\rangle^2}$ benutzt.

(Es bezeichne stets $J' = \frac{d}{d\tau}J(\tau)$.) Aus dem Bisherigen folgt jetzt

$$\begin{aligned}(\|J\|' \cdot f_K - \|J\| \cdot f_K')' &= \|J\|'' f_K - \|J\| f_K'' = \|J\|'' f_K + \|J\| K r^2 f_K \\ &= f_K(\|J\|'' + K r^2 \|J\|) \geq 0 \quad .\end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wurde dabei benutzt, daß f_K eine Lösung der Gleichung $f'' + Kr^2 f = 0$ ist, und die letzte Ungleichung folgt aus der Voraussetzung $f_K > 0$. Wegen der gleichen Anfangswerten von f_K und $\|J\|$ gilt auch noch $\lim\limits_{\tau \to 0}(\|J\|'(\tau) f_K(\tau) - \|J\|(\tau) f_K'(\tau)) = 0$, woraus dann insgesamt $\|J\|' f_K - \|J\| f_K' \geq 0$ folgt.

Es gilt also auch $(\frac{\|J\|}{f_K})' = \frac{1}{{f_K}^2}(\|J\|' f_K - \|J\| f_K') \geq 0$, was wieder wegen der gleichen Anfangswerten und somit $\lim\limits_{\tau \to 0} \frac{\|J(\tau)\|}{f_K(\tau)} = 1$ bedeutet, daß $\frac{\|J(\tau)\|}{f_K(\tau)} \geq 1$ für alle $\tau \in [\,0, \tau_0\,]$ gilt. □

Sowohl das letzte Lemma als auch das folgende Korollar findet man in [Yim], einen Beweis des Lemmas allerdings nur in [BK].

Korollar 5.9 *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K_M \leq K$ für eine Konstante $K \geq 0$, $\gamma_0 : [\,0, l_0\,] \to M$ eine Geodäte und $\gamma : [\,t_1, t_2\,] \to M$ eine glatte Kurve, so daß $\gamma(t) = \exp_{\gamma_0(s_t)} v(t)$ für alle $t \in [\,t_1, t_2\,]$ gilt, wobei $v(t)$ ein Vektorfeld entlang γ_0 ist, $v(t) \perp \gamma_0(s_t)$, und $s_t = s(t)$ für eine glatte surjektive Funktion $s : [\,t_1, t_2\,] \to [\,0, l_0\,]$.*
Falls $\|v\| \leq \epsilon < \frac{\pi}{2}K^{-\frac{1}{2}}$, so gilt $L(\gamma) \geq (\cos \epsilon K^{\frac{1}{2}}) L(\gamma_0)$.

Beweis Sei $t_0 \in [\,0, l_0\,]$ fest. Aufgrund der Voraussetzungen bilden die Geodäten $\sigma_t(\tau) = \exp_{\gamma_0(s_t)}(\tau \cdot v(t))$ mit $t \in [\,0, l_0\,]$, $\tau \in [\,0, 1\,]$ eine Variation der Geodäte σ_{t_0}. Da aber alle variierten Kurven σ_t wieder Geodäten sind, ist das zugehörige Variationsvektorfeld $J(\tau) := \frac{d}{dt}\sigma_t(\tau)\,|_{t=t_0}$ ein Jakobifeld entlang σ_{t_0}.
Falls nun also $c : [\,t_1, t_2\,] \to M$ die Kurve $\gamma_0 \circ s$ bezeichnet, das heißt $c(t) = \gamma_0(s_t)$, gilt $J(0) = \dot{\gamma_0}(s_t) \cdot \dot{s}(t_0) = \dot{c}(t_0)$, und wegen $\sigma_t(1) = \gamma(t)$ für alle $t \in [\,0, l_0\,]$ gilt auch $J(1) = \dot{\gamma}(t_0)$.
Außerdem ist $\|J\|' = (\langle J, J\rangle^{\frac{1}{2}})' = \langle J, J\rangle^{-\frac{1}{2}}\langle J', J\rangle$, woraus wegen der Voraussetzung $v(t_0) \perp \gamma_0(s_{t_0})$ dann $\|J\|'(0) = \|J(0)\|^{-1}\langle v(t_0), \dot{\gamma_0}(s_{t_0})\rangle \dot{s}(t_0) = 0$ folgt. Mit dem letzten Lemma folgt jetzt $\|J(\tau)\| \geq f_K(\tau)$ für alle τ mit $f_K(\tau) > 0$, wobei $f_K(\tau) = \|J(0)\| \cos(\tau K^{\frac{1}{2}} \|v(t_0)\|)$ für alle $\tau \in [\,0, 1\,]$. Das heißt $f_K(\tau) > 0$ für alle $\tau < \frac{\pi}{2}\|v(t_0)\|^{-1} K^{-\frac{1}{2}}$. Da aber $\|v(t_0)\| < \epsilon < \frac{\pi}{2}K^{-\frac{1}{2}}$ nach Voraussetzung, das heißt $1 < \frac{\pi}{2}K^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\|v(t_0)\|}$, folgt, daß $f_K(\tau) > 0$ für alle $\tau \in [\,0, 1\,]$.
Das bedeutet also insbesondere
$\|J(1)\| \geq \|J(0)\| \cos(K^{\frac{1}{2}}\|v(t_0)\|) \geq \|J(0)\| \cos(K^{\frac{1}{2}}\epsilon)$ beziehungsweise
$\|\dot{\gamma}(t_0)\| \geq \|\dot{c}(t_0)\| \cos(K^{\frac{1}{2}}\epsilon)$.

Da dies für jedes $t_0 \in (t_1, t_2)$ gilt, folgt somit

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_{t_1}^{t_2} \|\dot\gamma(t)\|\, dt \geq \int_{t_1}^{t_2} \|\dot c(t)\| \cos(K^{\frac12}\epsilon)\, dt = \cos(K^{\frac12}\epsilon) \int_{t_1}^{t_2} \|\dot\gamma_0(s_t)\| \cdot \|\dot s(t)\|\, dt \\ &\geq \cos(K^{\frac12}\epsilon) \int_0^{l_0} \|\dot\gamma_0(t)\|\, dt = \cos(K^{\frac12}\epsilon) L(\gamma_0), \end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt die Surjektivität von s ausgenutzt wurde. $\square$

Bevor endgültig die Existenz der gesuchten Retraktion gezeigt werden kann, ist noch ein letzter Schritt notwendig. Dazu braucht man folgende Definition.

Definition 5.10 Zu jeder kompakten, total konvexen Menge $C^b \subset M$ bezeichne wieder C_p^b den entsprechenden Tangentialkegel und $\hat C_p^b$ den von C_p^b in T_pM erzeugten Unterraum (vergleiche Definition 2.10).
Weiter sei $h : C^a \to C^b$ für a, b wie in Korollar 5.6 die wohldefinierte Projektion.
Mit diesen Bezeichnungen definiert man jetzt

$$\tilde C_p^b := \{v \in \hat C_p^b \cap S_pM \mid \exp_p(tv) \in h^{-1}(p) \text{ für kleine } t > 0\}\,.$$

Bemerkung 5.11 (1) Falls C^b in $p \in \partial C^b$ einen glatten Rand besitzt, gilt $\tilde C_p^b = \{\nu\}$, wobei $\nu \in S_pM$ die äußere Normale an ∂C^b bezeichnet.

(2) Für jedes $p \in \partial C^b$ ist die Menge $\tilde C_p^b$ kompakt.

Begründung: Wegen $\tilde C_p^b \subset S_pM$ reicht es zu zeigen, daß $\tilde C_p^b$ abgeschlossen ist. Betrachte dazu eine Folge $(v_n)_{n \in I\!N} \subset \tilde C_p^b$ mit $v_n \to v$. Da h stetig, und somit $h^{-1}(p)$ eine abgeschlossene Menge ist, gilt dann $\exp_p(tv) = \lim_{n\to\infty} \exp_p(tv_n) \in h^{-1}(p)$ für kleine $t > 0$, also $v \in \tilde C_p^b$. Dabei wurde benutzt, daß die Exponential-Abbildung stetig ist.

(3) Genauere Untersuchungen der Eigenschaften von Tangentialkegeln und Teilmengen davon (zum Beispiel auch der Mengen $\tilde C_p^b$) findet man in [Yim].

Lemma 5.12 *Sei C eine kompakte, total konvexe Menge, $a \leq b$ mit $b - a < \delta$, wobei δ wie in Lemma 5.5 gewählt ist. Dann gibt es eine Konstante $\alpha > 0$, so daß für jedes $p \in \partial C^b$ und $v \in \tilde C_p^b$ gilt: $\gamma(t_0) \in \partial C^a$ für ein t_0 mit $0 < t_0 \leq \alpha(b-a)$, wobei γ die Geodäte mit $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ bezeichnet.*

Beweis Nimmt man an, daß die Aussage falsch ist, so gibt es zu jedem $n \in I\!N$ einen Punkt $p_n \in \partial C^b$ und einen Vektor $v_n \in \tilde C_{p_n}^b$ mit $\gamma_n(t) = \exp_{p_n}(tv_n) \notin \partial C^a$ für

alle $0 < t \leq n \cdot (b-a)$. Da aber ∂C^b nach Voraussetzung und $\tilde{C}^b_{p_n}$ für jedes p_n wegen Bemerkung 5.11 kompakt sind, gibt es eine konvergente Teilfolge $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $p_{n_k} \to p_0 \in \partial C^b$ für $k \to \infty$ und eine Geodäte γ_0, die in p_0 startet mit $\gamma_0(t) = \exp_{p_0}(tv_0)$ für ein $v_0 \in \tilde{C}^b_{p_0}$ und $\gamma_{n_k}(t) \to \gamma_0(t)$ für $k \to \infty$ und alle $t \geq 0$. Es gilt dann $\gamma_0(t) \notin \partial C^a$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $0 < t \leq n_k \cdot (b-a)$, also insbesondere $\gamma_0(t) \notin \partial C^a$ für alle $t > 0$, das heißt $\gamma_0([0,\infty)) \subset int\, C^a$ und somit $dist(\gamma_0(t), \partial C^a) > 0$ für alle $t > 0$. Wegen $\gamma_0(0) = p_0 \in \partial C^b$, $dist(\gamma(0), \partial C^a) = b-a$ und $v_0 \in \tilde{C}^b_p$ gilt außerdem $\gamma_0(t) \notin C^b$ für kleine t, da sonst $h(\gamma_0(t)) = \gamma_0(t) \neq p$, also $\gamma_0(t) = \exp_{p_0}(tv_0) \notin h^{-1}(p)$ im Widerspruch zu $v_0 \in \tilde{C}^b_p$ gelten würde.
Insgesamt ist also die Distanzfunktion $t \mapsto dist(\gamma_0(t), \partial C^a)$ nach Theorem 2.13 eine konkave Funktion, die außerdem auf ganz $\mathbb{R}^+$ definiert und beschränkt ist mit $dist(\gamma_0(0), \partial C^a) = b-a$ und $dist(\gamma_0(t), \partial C^a) < b-a$ für kleine $t > 0$. Da es eine Funktion mit diesen Eigenschaften nicht geben kann, ist die Aussage bewiesen. $\square$

Bemerkung 5.13 Die Konstante α des Lemmas hängt nur von der Menge C ab. Man kann diese Konstante auch konkreter in Abhängigkeit eines Winkels β angeben, welcher wiederum von C abhängt. Dabei ist $\beta > 0$ so gewählt, daß für alle t mit $a \leq t \leq b$ und $p \in \partial C^t$ ein abgeschlossener Kegel $\{v \in \hat{C}^t_p \mid \sphericalangle(v_p, v) \leq \beta\}$ mit passendem $v_p \neq 0$ in C^t_p enthalten ist. Dies ist in Kapitel 1 von [Yim] ausgeführt.

Korollar 5.14 *Es gilt* $dist(q, C^b) \leq \alpha(b-a)$ *für alle* $q \in C^a$ *und* C, a, b *wie im letzten Lemma.*

Beweis Zu jedem $q \in C^a$ gibt es wegen Korollar 5.6 genau einen Punkt $h(p) \in \partial C^b$ mit $dist(q, C^b) = d(q, h(q))$. Dann gilt für die eindeutige minimale Geodäte γ von $h(q)$ nach q aufgrund der Konstruktion $\dot{\gamma}(0) \in \tilde{C}^b_{h(q)}$, und damit folgt die Behauptung mit obigem Lemma wegen $dist(q, C^b) = d(q, h(q)) = L(\gamma) \leq \alpha(b-a)$. $\square$

Mit Hilfe der bisher geleisteten Vorarbeit kann jetzt das eigentliche Theorem gezeigt werden.

Theorem 5.15 *Sei* M *eine nichtkompakte, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Schnittkrümmung. Dann gibt es zu jeder wie in Kapitel 2 konstruierten Seele* S *von* M *eine Retraktion* P *von* M *auf* S*, die Abstände nicht vergrößert.*

Beweis Falls $\dim M = 1$ gilt, ist nichts zu zeigen, deshalb sei $\dim M \geq 2$.
Der Beweis wird in 4 Schritten durchgeführt:

Schritt 1 : Zuerst wird gezeigt, daß es zu jeder kompakten, total konvexen Menge $C \subset M$ eine Retraktion $f : C^a \to C^b$ gibt, die Abstände nicht vergrößert, wobei

$0 \leq a \leq b \leq a_0$, $b - a < \delta$ und δ wieder wie in Lemma 5.5. Nach Lemma 5.5 und 5.12 gilt in dieser Situation für alle $q \in C^a$

$$d(q, C^b) \leq \epsilon := \min\{\frac{1}{3}\,\epsilon\,(C), \alpha(b-a)\}\,.$$

Sei außerdem ohne Einschränkung angenommen, daß $\alpha(b-a) < \frac{1}{3}\,\epsilon\,(C)$ gilt.
Falls dies nicht der Fall ist, wähle eine Unterteilung $a = b_0 < b_1 < \ldots < b_m = b$ von $[\,a, b\,]$, so daß $\alpha(b_i - b_{i-1}) < \frac{1}{3}\,\epsilon\,(C)$ $(i = 1 \ldots m)$, und wende die folgende Konstruktion auf die Intervalle $[\,b_{i-1}, b_i\,]$ an.
Sei wieder $h : C^a \to C^b$ die in Korollar 5.6 definierte Projektion. Für zwei Punkte $p, q \in C^a$ mit $d(p,q) < \epsilon$ sind dann die vier Punkte $p, q, h(p), h(q)$ in einer stark konvexen Kugel vom Radius $\epsilon\,(C)$ enthalten, weil nach Lemma 5.5 $d(p, h(p)) < \epsilon$ beziehungsweise $d(q, h(q)) < \epsilon$ und nach Voraussetzung $\epsilon < \frac{1}{3}\,\epsilon\,(C)$ gilt.
Weiter sei $\gamma : [\,0, l\,] \to M$ die minimale Geodäte von p nach q und $\gamma_0 : [\,0, l_0\,] \to M$ die minimale Geodäte von $h(p)$ nach $h(q)$. Dann gibt es zu jedem $t \in [\,0, l\,]$ einen eindeutigen Punkt $h_0(\gamma(t))$ auf γ_0, so daß $d(\gamma(t), h_0(\gamma(t))) = dist(\gamma(t), \gamma_0([\,0, l_0\,]))$ (analog zum Beweis von Korollar 5.6), und somit ist $h_0 : \gamma([\,0, l\,]) \to \gamma_0([\,0, l_0\,])$ eine stetige Projektion. Die Stetigkeit von h_0 folgt dabei aus der Stetigkeit der Abstandsfunktion $p \mapsto dist(p, \gamma_0([\,0, l_0\,]))$. Weil $h_0(\gamma([\,0, l\,]))$ als stetiges Bild einer zusammenhängenden Menge ebenfalls zusammenhängend ist und für die Randpunkte $h_0(\gamma(0)) = h(p) = \gamma_0(0)$ beziehungsweise $h_0(\gamma(l)) = h(q) = \gamma_0(l_0)$ gilt, muß h_0 surjektiv sein. Setzt man nun

$$t_1 := \sup\{t \in [\,0, l_0\,] \mid h_0(t) = \gamma_0(0) = h(p)\},$$

$$t_2 := \inf\{t \in [\,t_1, l_0\,] \mid h_0(t) = \gamma_0(l_0) = h(q)\},$$

so ist $h_0 : \gamma([\,t_1, t_2\,]) \to \gamma_0([\,0, l_0\,])$ immer noch surjektiv und für alle $t \in [\,t_1, t_2\,]$ kann man dann $\gamma(t)$ schreiben als $\gamma(t) = \exp_{\gamma_0(s_t)} v(t)$, wobei $\gamma_0(s_t) := h_0(\gamma(t))$, $v(t) \perp \dot{\gamma_0}(s_t)$ und $\|v\| < 2\epsilon < \epsilon(C)$.
Da C kompakt ist, sind alle Schnittkrümmungen auf C durch eine Konstante K nach oben beschränkt, und folglich kann das Korollar 5.9 mit $\epsilon\,(C) < \frac{\pi}{2} K^{-\frac{1}{2}}$ auf diese Situation angewendet werden. Es gilt also

$$d(h(p), h(q)) \leq (\cos{(2\epsilon K^{\frac{1}{2}})})^{-1} d(p,q),$$

was bedeutet, daß h lokal Lipschitzstetig ist mit Lipschitzkonstante $(\cos{(2\epsilon K^{\frac{1}{2}})})^{-1}$. Um zu zeigen, daß h auch globale Lipschitzfunktion ist, betrachte nun beliebige Punkte $p, q \in C^a$ und eine minimale Geodäte $\gamma : [\,0, l\,] \to C^a$ von p nach q mit $\|\dot{\gamma}(t)\| \equiv 1$. Wählt man nun eine endliche Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = l$ des Intervalls $[\,0, l\,]$, so daß $t_i - t_{i-1} \leq \epsilon$ $(i = 1 \ldots m)$, und wendet die obige Argumentation für jedes $i = 1 \ldots m$ auf die Punkte $p_i = \gamma(t_{i-1})$, $q_i = \gamma(t_i)$ an, so erhält man

$$d(h(p_i), h(q_i)) \leq (\cos{(2\epsilon K^{\frac{1}{2}})})^{-1} d(p_i, q_i).$$

Da aber alle Punkte auf der minimale Geodäte γ liegen, gilt

$$\sum_{i=1}^{m} d(p_i, q_i) = d(\gamma(0), \gamma(l)) = d(p, q)\,,$$

und damit also auch für beliebige $p, q \in C^a$

$$\begin{aligned} d(h(p), h(q)) &\leq \sum_{i=1}^{m} d(h(p_i), h(q_i)) \leq \sum_{i=1}^{m} (\cos(2\epsilon K^{\frac{1}{2}}))^{-1} d(p_i, q_i) \\ &= (\cos(2\epsilon K^{\frac{1}{2}}))^{-1} d(p, q). \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Funktion h mit f_0, so ist f_0 also Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $(\cos(2\epsilon K^{\frac{1}{2}}))^{-1}$. Da aber $2\epsilon K^{\frac{1}{2}} \leq 2\alpha(a-b)K^{\frac{1}{2}} =: \beta$ aufgrund der Definition von ϵ gilt, und folglich $(\cos(2\epsilon K^{\frac{1}{2}}))^{-1} \leq (\cos\beta)^{-1}$, falls ϵ klein genug ist, ist f_0 auch Lipschitzstetig mit Konstante $(\cos\beta)^{-1}$.

Wenn $h_1 : C^a \to C^{a-\frac{(a-b)}{2}}$ und $h_2 : C^{a-\frac{(a-b)}{2}} \to C^b$ die entsprechenden Projektionen aus Korollar 5.6 sind, so sind beide ebenfalls Lipschitzstetig mit der gemeinsamen Konstante $(\cos\frac{\beta}{2})^{-1}$, und ihre Komposition $f_1 := h_2 \circ h_1 : C^a \to C^b$ ist eine Lipschitzfunktion mit Konstante $(\cos\frac{\beta}{2})^{-2}$.
Iteriert man diese Konstruktion weiter, so erhält man eine Folge $(f_i)_{i\geq 0}$ von Lipschitzfunktionen $f_i : C^a \to C^b$ mit Konstanten $c_i = (\cos\frac{\beta}{2^i})^{-2^i}$.
Da $c_i \to 1$ für $i \to \infty$ (vergleiche folgendes Lemma), ist die Menge $\{c_i \,|\, i \geq 0\}$ beschränkt und damit die Menge $\{f_i \,|\, i \geq 0\}$ gleichgradig stetig. Zusammen mit der Kompaktheit von C^a folgt also mit dem Theorem von Arcela-Ascoli (siehe Anhang C), daß $\{f_i \,|\, i \geq 0\}$ relativ kompakt ist und es somit eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $(f_{i_j})_{j\geq 0}$ gibt mit $f_{i_j} \to f$ für $j \to \infty$. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der Teilfolge ist auch $f : C^a \to C^b$ wieder Lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstante 1, was bedeutet, daß f Abstände nicht vergrößert.

Schritt 2 : Zu jeder beliebigen kompakten Menge $C \subset M$ gibt es eine Funktion $f : C \to C^{max}$, die Abstände nicht vergrößert.
Wähle dazu eine endliche Unterteilung $0 = b_0 < b_1 < \ldots < b_m = a_0$ des Intervalls $[\,0, a_0\,]$ mit $b_i - b_{i-1} < \epsilon$ für alle $i = 1 \ldots m$. Da es nach Schritt 1 Funktionen $f_i : C^{b_{i-1}} \to C^{b_i}$ mit der gewünschten Eigenschaft gibt, kann man f als Komposition $f_m \circ \ldots \circ f_1 : C \to C^{a_0}$ wählen.

Schritt 3 : Zu jeder kompakten Menge $C \subset M$ gibt es eine Funktion $f : C \to S$, die Abstände nicht vergrößert.
Dies folgt aus der Tatsache, daß man eine Fahne $C = C(0) \supset \ldots \supset C(k) = S$ von total konvexen Teilmengen hat und auf jeder Stufe Schritt 2 anwenden kann.

Schritt 4 : Sei $C = C_{t_0}$ eine feste kompakte Menge wie in Satz 2.2 mit $\partial C_{t_0} \neq \emptyset$, $t_0 > 0$. Nach Schritt 3 existiert also eine Funktion $f : C_{t_0} \to S$, die Abstände nicht vergrößert. Wählt man ein festes $r > 0$, so gibt es außerdem analog zu Schritt 2 zu jedem $m \in I\!N$ ebenfalls eine Funktion $f_m : C_{t_0+(m+1)r} \to C_{t_0+mr}$, die Abstände nicht vergrößert und somit insbesondere mit $g_m := f_m \circ ... \circ f_0$ eine Funktion von $C_{t_0+(m+1)r}$ nach C mit derselben Eigenschaft. Da es weiterhin zu jedem $p \in M \setminus C$ genau ein $m(p)$ mit $p \in C_{t_0+(m(p)+1)r} \setminus C_{t_0+m(p)r}$ gibt, ist $P : M \to S$ mit

$$P(p) := \begin{cases} f(p) & , \; falls \quad p \in C \\ f(g_{m(p)}(p)) & , \; falls \quad p \in M \setminus C \end{cases}$$

eine Retraktion von M auf S mit der gewünschten Kontraktionseigenschaft. □

Bemerkung 5.16 Die in den Schritten 1 bis 4 konstruierte Retraktion ist nicht eindeutig, aber für jede auf diese Weise konstruierte Funktion P gilt $P|_S = id_S$.

Lemma 5.17 *Für beliebiges* $\beta > 0$ *und* $c_n := (\cos\frac{\beta}{n})^{-n}$, $n \geq 1$, *gilt* $c_n \to 1$ *für* $n \to \infty$.

Beweis Für alle $n > \beta$ gilt $\cos\frac{\beta}{n} = \sum\limits_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(\frac{\beta}{n})^{2j}}{(2j)!} \geq 1 - \frac{(\frac{\beta}{n})^2}{2} = 1 - \frac{\beta^2}{2n^2}$, also folgt mit der Ungleichung von Bernoulli

$$(\cos\frac{\beta}{n})^n \geq (1 - \frac{\beta^2}{2n^2})^n \geq 1 - \frac{\beta^2}{2n}$$

und somit $(\cos\frac{\beta}{n})^{-n} \leq (1 - \frac{\beta^2}{2n})^{-1} \to 1$ für $n \to \infty$. Außerdem gilt $(\cos\frac{\beta}{n})^{-n} \geq 1$, falls n groß genug ist, woraus die Behauptung folgt. □

Bemerkung 5.18 (1) Die Beweisidee des letzten Theorems stammt von Yim (siehe [Yim], Kapitel 2), und dessen Arbeit baut wiederum auf den Resultaten von Cheeger und Gromoll auf (vergleiche Bemerkung 5.7).

(2) Yim zeigt noch ein bißchen mehr, nämlich daß S sogar ein Deformationsretrakt von M ist. Diese Aussage wird im nächsten Kapitel auch noch gezeigt werden, allerdings mit einer anderen Retraktion (siehe Lemma 6.19).

(3) Die Existenz einer solchen kontrahierenden Retraktion beziehungsweise sogar einer Deformationsretraktion von M auf S, wurde zuerst von V. A. Sharafutdinov gezeigt (in [Sha]), allerdings in einem etwas anderen Kontext. Sharafutdinov leitet mit Hilfe dieser Retraktion eine Abschätzung für den Injektivitätsradius von M her. Er zeigt unter der Voraussetzung, daß alle Schnittkrümmungen auf ganz M nach oben durch eine Konstante K beschränkt sind, die Abschätzung

$$injrad\,(M) \geq \min\{injrad\,(S), \pi K^{-\frac{1}{2}}\}.$$

Dieses Resultat wurde für den Fall, daß M eine Hyperfläche im $I\!R^n$ ist, bereits von Vainer (siehe [Vai]) gezeigt. Ein sehr wichtiges Hilfsmittel in seinem Beweis ist die

Anwendung des sogenannten Busemann-Feller-Theorems, welches besagt, daß die metrische Projektion $\phi : I\!R^n \to C$ zu einer konvexen Menge $C \subset I\!R^n$, die jedem Punkt p den nächsten Punkt in C zuordnet, die Eigenschaft besitzt, die Länge von Kurven nicht zu vergrößern.
Sharafutdinov hat dann gezeigt, daß sich dieses Resultat unter gewissen Voraussetzungen auf Mannigfaltigkeiten übertragen läßt, wobei die gesuchte Retraktion die Stelle der metrischen Projektion einnimmt.
Die Hauptidee in dieser Konstruktion ist die Tatsache, daß die Abstandsfunktion $p \mapsto dist(p, \partial C)$ auf einer kompakten, total konvexen Menge $C \subset M$ Lipschitzstetig und somit fast überall differenzierbar ist, und man auf diese Weise ein Vektorfeld auf C konstruieren kann, das eine Art verallgemeinertes Gradienten-Vektorfeld der Abstandsfunktion darstellt. Die Retraktion läßt sich dann über Integralkurven an dieses Vektorfeld definieren, und man erhält ebenfalls eine Abbildung mit der gewünschten Eigenschaft.
Es sei allerdings erwähnt, daß dieser Beweis technisch sehr aufwendig ist.

6 Das Theorem von Perelman

Nachdem in Kapitel 2 gezeigt wurde, daß jede nichtkompakte, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Schnittkrümmung eine Seele S besitzt, und im letzten Kapitel die Existenz einer Retraktion von M auf S gezeigt wurde, welche Abstände nicht vergrößert, sind nun alle Hilfsmittel bereitgestellt, um zunächst das Theorem von Perelman und anschließend die Vermutung von Cheeger und Gromoll zu beweisen.

Theorem 6.1 (Perelman 1994) *Sei M vollständige, nichtkompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Schnittkrümmung und S eine Seele von M. Weiter sei $P : M \to S$ eine Retraktion, die Abstände nicht vergrößert. Dann gilt*
(1) Für jedes $p \in S$ und $v \in S\nu(S)$ ist

$$P(\exp_p(tv)) = p \quad \textit{für} \quad \textit{alle} \quad t \geq 0.$$

(2) Für jede Geodäte $\gamma \subset S$ und jedes parallele Vektorfeld $X \in \Gamma(S\nu(S))$ entlang γ sind die Kurven γ_t mit $\gamma_t(s) = \exp_{\gamma(s)}(tX)$ für alle $t \geq 0$ Geodäten, die einen flachen, total geodätischen Streifen ausfüllen.
Es gilt sogar, daß alle $\gamma_t|_{[s_0,s_1]}$ minimal sind, falls $\gamma|_{[s_0,s_1]}$ minimal ist.

Beweis Es reicht zu zeigen, daß die beiden Aussagen auch noch für $0 \leq t \leq l + \epsilon(l)$ für ein $\epsilon(l) > 0$ gelten, falls sie bereits für $0 \leq t \leq l$ gelten.
Sei also angenommen, daß die Aussagen für $0 \leq t \leq l$ richtig sind.
Für kleine $r \geq 0$ betrachte die Funktion f mit

$$f(r) := \max\{\, d(p, P(\exp_p((l + r)v))) \mid p \in S,\ v \in \nu_p(S) \text{ mit } \|v\| = 1\,\},$$

und zeige, daß $f \equiv 0$, denn dann ist die Aussage (1) des Theorems bewiesen.
Man sieht, daß f aufgrund der Definition nichtnegativ ist und es gilt $f(0) = 0$. Außerdem ist f Lipschitzstetig, denn es gilt

$$\begin{aligned}
& |f(r_1) - f(r_2)| \\
\leq\ & \max\{\, d(P(\exp_p((l + r_1)v)), P(\exp_p((l + r_2)v))) \mid p \in S,\ v \in \nu_p(S) \text{ mit } \|v\| = 1\,\} \\
\leq\ & \max\{\, d(\exp_p((l + r_1)v), \exp_p((l + r_2)v)) \mid p \in S,\ v \in \nu_p(S) \text{ mit } \|v\| = 1\,\} \\
\leq\ & \max\{\, |(l + r_1 - l - r_2)v| \ \mid p \in S,\ v \in \nu_p(S) \text{ mit } \|v\| = 1\,\} \\
\leq\ & |\, r_1 - r_2 \,|\,.
\end{aligned}$$

Der vorletzte Schritt folgt dabei aus dem Theorem von Toponogov Teil (2) (siehe Anhang A).
Sei nun $r > 0$ fest, das heißt es gibt ein $p_0 \in S$ und $v_0 \in \nu_{p_0}(S)$ mit $\|v_0\| = 1$, so daß $f(r) = d(p_0, \bar{p}_0)$, wobei $\bar{p}_0 = P(\exp_{p_0}((l + r)v_0))$. Weil r klein ist, und

P Abstände nicht vergrößert, kann man annehmen, daß $d(p_0, \bar{p}_0) < injrad(S)$ erfüllt ist. (Dabei bezeichnet $injrad(S)$ den Injektivitätsradius von S.) Sei γ eine minimale Geodäte von $\bar{p}_0$ nach p_0. Nach Voraussetzung kann man diese bis zu einem Punkt $p_1 \in S$ verlängern, so daß γ zwischen $\bar{p}_0$ und p_1 minimal bleibt. Außerdem sei $X \in \Gamma(S\nu(S))$ ein paralleles Vektorfeld entlang γ mit $X(p_0) = v_0$, und man bezeichne $X(p_1) = v_1$ und $P(\exp_{p_1}((l+r)v_1)) = \bar{p}_1$.
Nach Voraussetzung sind die Kurven $\gamma_t(s) = \exp_{\gamma(s)}(tX)$, $0 \le t \le l$, bereits minimale Geodäten konstanter Länge, die ein flaches, total geodätisches Rechteck aufspannen. Das bedeutet insbesondere, daß die Tangentialvektoren an die Kurven $\exp_{\gamma(s)}(tX)$ ein paralleles Vektorfeld entlang γ_l bilden, welches die Bedingungen für das Theorem von Berger (siehe Anhang A) erfüllt.

Zwischenbehauptung: Es gilt $d(p_1, \bar{p}_1) = d(p_0, \bar{p}_0) = f(r)$, $d(\bar{p}_0, \bar{p}_1) = d(p_0, p_1)$ und die Punkte p_0, p_1, $\exp_{p_0}((l+r)v_0)$, $\exp_{p_1}((l+r)v_1)$ spannen ein flaches, total geodätisches Rechteck auf.

Denn: Wegen der Kontraktionseigenschaft von P gilt

$$d(\bar{p}_0, \bar{p}_1) \le d(\exp_{p_0}((l+r)v_0), \exp_{p_1}((l+r)v_1))$$

und mit Bergers Version von Rauchs Theorem gilt weiter

$$d(\exp_{p_0}((l+r)v_0), \exp_{p_1}((l+r)v_1)) \le d(p_0, p_1),$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn p_0, p_1, $\exp_{p_0}((l+r)v_0)$ und $\exp_{p_1}((l+r)v_1)$ ein flaches, total geodätisches Rechteck aufspannen. Die Aussage ist also gezeigt, falls außerdem noch $d(p_0, p_1) \le d(\bar{p}_0, \bar{p}_1)$ gilt.
Aufgrund der Definition von f gilt $d(p_1, \bar{p}_1) \le f(r) = d(p_0, \bar{p}_0)$ und wegen der Wahl von p_1 gilt $d(\bar{p}_0, p_1) = d(p_0, \bar{p}_0) + d(p_0, p_1)$. Daraus folgt aber zusammen mit der Dreiecksungleichung

$$d(p_0, p_1) = d(\bar{p}_0, p_1) - d(p_0, \bar{p}_0) \le d(\bar{p}_0, \bar{p}_1) + d(p_1, \bar{p}_1) - d(p_0, \bar{p}_0) \le d(\bar{p}_0, \bar{p}_1)\,,$$

womit also die Zwischenbehauptung bewiesen ist.

Für kleine $\epsilon > 0$ gilt folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} f(r-\epsilon) &\ge d(p_1, P(\exp_{p_1}((l+r-\epsilon)v_1))) \\ &\ge d(\bar{p}_0, p_1) - d(\bar{p}_0, P(\exp_{p_1}((l+r-\epsilon)v_1))) \\ &\ge d(\bar{p}_0, p_1) - d(\exp_{p_0}((l+r)v_0), \exp_{p_1}((l+r-\epsilon)v_1))\,. \end{aligned}$$

Dabei wurden hintereinander die Definition von f, die Dreiecksungleichung und die Kontraktionseigenschaft von P benutzt.
Da aber p_0, p_1, $\exp_{p_0}((l+r)v_0)$ und $\exp_{p_1}((l+r)v_1)$ ein flaches Rechteck aufspannen, gilt

$$\begin{aligned} & d(\exp_{p_0}((l+r)v_0), \exp_{p_1}((l+r-\epsilon)v_1))^2 \\ \le\ & d(\exp_{p_0}((l+r)v_0), \exp_{p_1}((l+r)v_1))^2 + \epsilon^2 = d(p_0, p_1)^2 + \epsilon^2\,, \end{aligned}$$

und somit $f(r-\epsilon) \geq d(\bar{p}_0, p_1) - d(p_0, p_1) - O(\epsilon^2) = d(\bar{p}_0, p_0) - O(\epsilon^2) = f(r) - O(\epsilon^2)$, wobei wieder verwendet wurde, daß $\bar{p}_0$, p_0 und p_1 auf einer minimalen Geodäten liegen.
Weil f als Lipschitzfunktion fast überall differenzierbar, und die Ableitung, falls sie existiert, aufgrund der letzten Ungleichung immer nichtpositiv ist, muß f monoton fallend sein. Das bedeutet aber insbesondere wegen $f(0) = 0$ und $f(r) \geq 0$, daß $f \equiv 0$ für $0 \leq r \leq \epsilon(l)$ gelten muß.
Die Aussage (2) wird nun analog zur Zwischenbehauptung bewiesen, wobei jetzt p_0, v_0, γ und p_1 beliebig gewählt werden können und wegen Aussage (1) $\bar{p}_0 = p_0$, $\bar{p}_1 = p_1$ bereits gilt. □

Bemerkung 6.2 Die Aussage des Theorems kann auch anders formuliert werden (vergleiche [Ebg], Theorem 10.10):
Für jedes $p \in S$ und Vektoren $v \in T_pS$, $w \in \nu_p(S)$ mit $v \neq 0$, $w \neq 0$ ist die Halbebene, die durch v und w aufgespannt wird, flach und total geodätisch.

Dies ist eine Verallgemeinerung von Theorem 3.1 in [CG2]. Dort erhält man das entsprechende Ergebnis allerdings mit anderen Methoden, insbesondere ohne die Existenz einer Retraktion.

Die volle Aussagekraft dieses Theorems wird einem vielleicht erst bewußt, wenn man die folgenden Korollare genauer betrachtet.
Eine wichtige Folgerung aus dem Theorem ist zum Beispiel folgendes

Korollar 6.3 *Die Retraktion P ist eine Riemannsche Submersion.*

Beweis Sei γ eine beliebige minimale Geodäte in S und p ein innerer Punkt von γ, $p = \gamma(s_0)$. Außerdem sei σ eine Geodäte, die in p senkrecht zu γ startet mit $\dot{\sigma}(0) \in \nu_pS$. Nach Teil (2) des Theorems spannen dann σ und γ einen flachen, total geodätischen Streifen auf, und für jedes q auf σ, $q = \sigma(t)$, gibt es eine Verschiebung γ_q von γ durch q als horizontale Geodäte γ_t des Streifens.
Diese Verschiebung ist unabhängig von der Wahl von σ, denn:
Sei $q = \tilde{\sigma}(\tilde{t})$ und $\tilde{\gamma}_q \neq \gamma_q$. Dann würde $d(\tilde{\gamma}_q(s_1), \gamma_q(s_2)) < d(\gamma(s_1), \gamma(s_2))$ gelten für $s_1 < s_0 < s_2$, was wegen Teil (1) des Theorems der Kontraktionseigenschaft von P widerspricht.
Also erhält man durch diese Verschiebungen eine wohldefinierte, stetige horizontale Aufspaltung mit der folgenden Eigenschaft.
Falls γ^1 und γ^2 zwei Geodäten in S sind, die sich in ihrem Schnittpunkt p unter dem Winkel $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ schneiden, so schneiden sich auch ihre Verschiebungen γ_q^1, γ_q^2 in q unter dem Winkel α.
Wenn dies nicht der Fall ist, und sie sich unter einem kleineren Winkel schneiden, gilt $d(\gamma_q^1(s_0), \tilde{q}) < d(\gamma^1(s_0), P(\tilde{q}))$ für ein $\tilde{q}$ auf γ_q^2 nahe bei q, was wieder wegen

Teil (1) des Theorems der Kontraktionseigenschaft von P widerspricht. Falls sie sich umgekehrt unter einem größeren Winkel schneiden, gilt das gleiche Argument für einen Punkt $\tilde{q}$ auf γ_q^1.
Insgesamt erhält man also, daß Geodäten in horizontaler Richtung durch P auf Kurven gleicher Länge in S abgebildet werden, Geodäten, die senkrecht zu S starten, auf einen Punkt abgebildet werden (Teil (1) des Theorems), und Schnittwinkel unter Verschiebung erhalten bleiben.
Das bedeutet, daß P ein wohldefiniertes Differential DP besitzt. Insbesondere ist DP in jedem Punkt q eine lineare Abbildung, die auf dem Unterraum von T_qM, der durch die Geschwindigkeitsvektoren aller Geodäten in q aufgespannt wird, die sich als verschobene Geodäte γ_q von Geodäten γ durch $P(q) \in S$ auffassen lassen, eine Isometrie ist und auf dem orthogonalen Komplement verschwindet. Damit hat DP in jedem Punkt also mindestens den Rang $k = \dim S$ und ist somit surjektiv. □

Bemerkung 6.4 (1) Die Existenz einer solchen Submersion war ebenfalls schon von D. Gromoll vermutet worden.

(2) G. Walshap hat für den Fall $\dim S = \operatorname{co}\dim S = 2$ gezeigt, daß es entweder eine Riemannsche Submersion von M auf S gibt, oder $\nu(S)$ flach ist bezüglich des induzierten Zusammenhangs (vergleiche [Wal]).
Außerdem folgt aus seiner Arbeit, daß die Fasern einer Submersion nicht notwendigerweise isometrisch zueinander sein müssen.

Eine weitere direkte Konsequenz aus dem Theorem ist der folgende Satz, welcher eine Abschätzung für die Dimension der Seele liefert.

Satz 6.5 *Falls es einen Punkt $p \in M$ und ein $0 \leq k < n$ gibt, so daß in jedem orthonormalen n-Bein $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ von T_pM nicht mehr als k paarweise verschiedene Schnittkrümmungen $K(e_i, e_j)$ $(i \neq j)$ verschwinden, so gilt $\dim S \leq k$.*

Beweis Sei $p \in M$ beliebig, und γ eine minimale Geodäte von p nach S, das heißt γ trifft S in $\gamma(t)$ für ein $t \geq 0$ senkrecht. Falls $p \in S$ gilt, kann eine beliebige Geodäte γ gewählt werden, so daß diese S in p senkrecht trifft.
Wenn nun $\dim S > k$ gilt, gibt es in $\gamma(t)$ ein orthonormales n-Bein $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ von $T_{\gamma(t)}M$, so daß $e_i \in T_{\gamma(t)}S$ gilt für alle $1 \leq i \leq k+1$ und $e_n = -\dot{\gamma}(t)$. Nach Bemerkung 6.2 spannen dann jeweils e_i und γ eine flache, total geodätische Halbebene auf. Durch Paralleltransport des n-Beines entlang γ erhält man auf diese Weise in p ein orthonormales n-Bein $\{\tilde{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ von T_pM, in welchem $K(\tilde{e}_i, \tilde{e}_n) = 0$ für alle $1 \leq i \leq k+1$ gilt. □

Satz 6.6 (Vermutung von Cheeger und Gromoll) *Falls es einen Punkt $p \in M$ gibt, in dem alle Schnittkrümmungen positiv sind, besteht die Seele nur aus einem Punkt, und M ist somit diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$.*

Beweis Der Satz ist ein Spezialfall des letzten Satzes für $k = 0$. $\square$

Das jetzt folgende letzte Korollar zum Theorem von Perelman ist der Ausgangspunkt für eine Reihe weiterer Überlegungen.

Korollar 6.7 *Zu jedem Punkt $p \in M \setminus S$ gibt es genau eine Geodäte von p nach S, welche die Seele senkrecht trifft. Diese ist dann genau die minimale Verbindung von p nach S.*

Beweis Die Behauptung folgt sofort aus Teil (1) des Theorems. Falls nämlich σ und γ zwei Geodäten sind mit $\sigma(t_0) = \gamma(t_1) = p$, $\sigma(0) = p_1 \in S$, $\gamma(0) = p_2 \in S$ und $\dot\sigma(0)$, $\dot\gamma(0) \in S\nu(S)$, so gilt wegen des Theorems $P(\exp_{p_1}(t\dot\sigma(0)) = p_1$ beziehungsweise $P(\exp_{p_2}(t\dot\gamma(0)) = p_2$ für alle $t \geq 0$, was wegen $\exp_{p_1}(t_0\dot\sigma(0)) = \exp_{p_2}(t_1\dot\gamma(0)) = p$ bedeutet, daß $p_1 = p_2$ gelten muß. Da jede minimale Geodäte von p nach S senkrecht auf S trifft, folgt daraus die Behauptung. $\square$

Bemerkung 6.8 Das letzte Korollar besagt also, daß die Abstandsfunktion $dist_S : M \setminus S \to I\!R$ mit $dist_S(p) = dist(p, S)$ auf ganz $M \setminus S$ keine kritischen Punkte besitzt und somit glatt ist.

Außerdem gilt der folgende

Satz 6.9 *Die Exponentialabbildung $\exp|_{\nu(S)}$ ist ein Diffeomorphismus vom Normalenbündel $\nu(S)$ auf die Mannigfaltigkeit M.*

Beweis Wegen des Korollars ist die Exponentialabbildung $\exp|_{\nu(S)}$ injektiv, also aufgrund der Vollständigkeit von M bijektiv. Falls die Funktion $\exp|_{\nu(S)}$ kein Diffeomorphismus zwischen $\nu(S)$ und M wäre, das heißt wenn es kritische Punkte von $\exp|_{\nu(S)}$ in $M \setminus S$ geben würde, so wären dies sogenannte Brennpunkte ("focal points") zu S. Ein Punkt $q \in M$ heißt Brennpunkt von S, falls es eine Geodäte $\gamma : [0, l] \to M$ mit $\gamma(0) = p \in S$, $\dot\gamma(0) \in \nu_p(S)$, $\gamma(l) = q$ und ein nicht verschwindendes Jakobifeld J entlang γ gibt, so daß $J(0) \in T_pS$, $J'(0) + S_{\dot\gamma(0)}(J(0)) \in \nu_p(S)$ und $J(l) = 0$, wobei $S_{\dot\gamma(0)}$ den durch die zweite Fundamentalform gegebenen linearen Operator auf T_pS bezeichnet. (Siehe dazu [doC], Kapitel 10 §4.)
Falls es aber Brennpunkte zu S gibt, kann $\exp|_{\nu(S)}$ nicht mehr injektiv sein, da eine Geodäte, die lokal den Abstand zur Seele minimiert, nach einem Brennpunkt nicht mehr minimal ist. Dies kann man zum Beispiel in [GKM], Kapitel 4 nachlesen.
Da $\exp|_{\nu(S)}$ aber wegen Korollar 6.7 bijektiv ist, kann diese Funktion keine kritischen Punkte haben und ist folglich ein Diffeomorphismus. $\square$

Aus dieser Erkenntnis lassen sich jetzt einige Folgerungen ziehen, welche die Struktur dieser Mannigfaltigkeiten besser aufzeigen.

Lemma 6.10 *Für alle* $p \in S$ *und* $v \in \nu_p(S)$ *ist* $\gamma : [\,0, \infty\,) \to M$ *mit* $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ *ein Strahl.*

Beweis Falls γ zwischen zwei seiner Punkte $p_1 = \gamma(t_1)$, $p_2 = \gamma(t_2)$, $t_1 < t_2$, nicht minimal ist, so gibt es eine minimale Geodäte σ von p_2 nach S mit $\sigma \neq \gamma$ und $L(\sigma) \leq L(\gamma) = t_2$, was wegen Korollar 6.7 nicht sein kann, da σ die Seele ebenfalls senkrecht treffen würde. □

Lemma 6.11 *Die Umgebungen* $S_t := \{\, p \in M \mid dist(p, S) \leq t \,\}$ *von* S *sind für alle* $t \geq 0$ *total konvex.*

Beweis Sei $t > 0$ fest. (Für $t = 0$ ist $S_t = S$ und somit nichts zu zeigen.) Falls es nun zwei Punkte p_1, $p_2 \in S_t$ und eine Verbindungsgeodäte σ von p_1 nach p_2 mit $q = \sigma(s_0) \notin S_t$ gibt, so gilt $t_0 := dist(q, S) > t$.
Da wegen des letzten Lemmas die Geodäte γ, die den Abstand von q zu S minimiert, ein Strahl ist, gilt mit den Bezeichnungen aus 2.3, daß $q = \gamma(t_0) \in B_{\gamma_t}$ (wegen $t_0 > t$). Andererseits liegt aber p_i nicht in B_{γ_t} $(i = 1, 2)$, da sonst für alle $\tau > t_0$

$$\tau = dist(\gamma(\tau), S) \leq d(\gamma(\tau), p_i) + dist(p_i, S) < (\tau - t) + t = \tau$$

gelten würde, was nicht sein kann. Da aber nach Satz 2.2 die Menge $M \setminus B_{\gamma_t}$ total konvex ist, müßte im Widerspruch zu $p \in B_{\gamma_t}$, σ in $M \setminus B_{\gamma_t}$ enthalten sein, womit das Lemma bewiesen ist. □

Bemerkung 6.12 (1) Für den Fall $\dim S = \dim M - 1$ gilt $S_t = C_t$, falls der Startpunkt der Seelenkonstruktion bereits in S liegt. Dann ist nämlich bereits $S = C_t^{max}$ für beliebiges $t > 0$.

(2) Die Niveaumengen $\{\, p \in M \mid dist(p, S) = t \,\} = \partial S_t$ sind glatte Hyperflächen in M, da die Distanzfunktion glatt ist.

In diesem Zusammenhang läßt sich nun eine Verallgemeinerung des Gauß-Lemmas zeigen:

Lemma 6.13 *Für alle* $p \in S$, $v \in \nu_p(S)$ *und* $t \geq 0$ *schneidet der Strahl* $\gamma(\tau) = \exp_p(\tau v)$ *die Niveaumengen* ∂S_t *senkrecht.*

Beweis Falls die Aussage falsch ist, gibt es einen Vektor $w \in T_q(\partial S_t)$, $q = \gamma(t)$, so daß $\langle w, -\dot\gamma(t) \rangle > 0$. Betrachtet man nun eine Variation von minimalen Geodäten γ_ϵ von p nach $\exp_q(\epsilon w)$ für kleine $\epsilon > 0$, so ergibt sich mit der ersten Variationsformel (siehe Anhang B) $\frac{d}{d\epsilon} L(\gamma_\epsilon)|_{\epsilon=0} = \frac{1}{t}\langle w, \dot\gamma(t) \rangle < 0$, das heißt $L(\gamma_\epsilon)$ ist monoton fallend für kleine $\epsilon > 0$, und somit erhält man einen Widerspruch zu $w \in T_q(\partial S_t)$, da für kleine $\epsilon > 0$ ansonsten $\exp_q(\epsilon w) \notin \partial S_t$ gelten würde. □

Bemerkung 6.14 (1) Falls M diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, entspricht diese Aussage genau dem bekannten Gauß-Lemma, da in diesem Fall die Mengen ∂S_t gerade geodätische Sphären mit Abstand t um eine einpunktige Seele sind.
(2) Betrachtet man die Abbildung $E : [\,0, \infty) \times S\nu(S) \to M$ mit $E(t, v) = \exp|_{\nu(S)} tv$, so liefert E radiale Koordinaten auf ganz M, die sogenannten *Fermi-Koordinaten*. Diese entsprechen den Gaußschen Normalkoordinaten in einem Punkt. (Vergleiche dazu [Cha], 3.6.)

Eine weitere Eigenschaft in diesem Zusammenhang liefert das folgende

Lemma 6.15 *Für jedes $p \in S$ und $v \in \nu_p(S)$ gilt für die Geodäte γ mit $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ und jedes $\tau \geq 0$, daß $\gamma(\tau) \in \partial S_\tau$.*

Beweis Es gilt $dist(\gamma(\tau), S) \leq L(\gamma|_{[\,0,\tau\,]}) = \tau$. Falls nun $dist(\gamma(\tau), S) < \tau$ gelten würde, gäbe es eine minimale Geodäte σ von $\gamma(\tau)$ nach S mit $L(\sigma) < \tau$, die S senkrecht treffen würde. Dies kann aber wegen Korollar 6.7 nicht sein, also gilt $dist(\gamma(\tau), S) = \tau$ für jedes $\tau \geq 0$. $\square$

Da man wegen Korollar 6.7 jedem $p \in M \setminus S$ einen eindeutigen Fußpunkt $\tilde{p} \in S$ zuordnen kann mit $dist(p, S) = d(p, \tilde{p})$, ist die Abbildung $Q : M \to S$ mit

$$Q(p) = \begin{cases} p & \text{für } p \in S \\ \tilde{p} & \text{für } p \in M \setminus S \end{cases}$$

wohldefiniert. Sie ist sogar eine Retraktion, weil die Abbildung offensichtlich stetig ist. Mit Hilfe der letzten Lemmata kann man zeigen, daß Q weiterhin die Eigenschaft besitzt, Abstände nicht zu vergrößern.
Dazu sind allerdings noch zwei weitere kleine Lemmata notwendig.

Lemma 6.16 *Zu gegebenen Punkten $p_0, p_1 \in M \setminus S$ mit $dist(p_0, S) = dist(p_1, S) = t$ ist die Funktion $g : [\,0, t\,] \to \mathbb{R}$ mit $g(\tau) = d(\gamma_{p_0}(\tau), \gamma_{p_1}(\tau))$ monoton fallend. Dabei bezeichnet γ_{p_i} die eindeutige minimale Geodäte von p_i nach S $(i = 0, 1)$.*

Beweis Da die Funktion g Lipschitzstetig ist ($|g(\tau_1) - g(\tau_2)| \leq 2|\tau_1 - \tau_2|$), ist sie fast überall differenzierbar, und es reicht zu zeigen, daß $g'(\tau) \leq 0$ dort gilt, wo die Ableitung existiert.
Dazu sei $\tau_0 \in [\,0, t\,]$ so gewählt, daß $g'(\tau_0)$ existiert, und es bezeichne $\sigma : [\,0, 1\,] \to M$ eine minimale Geodäte von $\gamma_{p_0}(\tau_0)$ nach $\gamma_{p_1}(\tau_0)$. Wegen $\gamma_{p_0}(\tau_0), \gamma_{p_1}(\tau_0) \in \partial S_{t-\tau_0}$ und somit $\sigma \subset S_{t-\tau_0}$ gilt mit Lemma 2.11 und Lemma 6.15 $\langle \dot{\gamma}_{p_0}(\tau_0), \dot{\sigma}(0) \rangle \geq 0$ beziehungsweise $\langle \dot{\gamma}_{p_1}(\tau_0), -\dot{\sigma}(1) \rangle \geq 0$.
Sei weiter $X(s)$ ein glattes Vektorfeld entlang σ mit $X(i) = \dot{\gamma}_{p_i}(\tau_0)$ $(i = 0, 1)$ und für kleine $\epsilon > 0$ seien die Geodäten $\sigma_\epsilon : [\,0, 1\,] \to M$ gegeben durch $\sigma_\epsilon(s) = \exp_{\sigma(s)}(\epsilon X(s))$. Mit der ersten Variationsformel erhält man dann

$$g'(\tau_0) = \tfrac{d}{d\epsilon} L(\sigma_\epsilon)|_{\epsilon=0} = -\tfrac{1}{g(\tau_0)} (\langle \dot{\gamma}_{p_1}(\tau_0), -\dot{\sigma}(1) \rangle + \langle \dot{\gamma}_{p_0}(\tau_0), \dot{\sigma}(0) \rangle) \leq 0\,. \qquad \square$$

Lemma 6.17 *Die Funktion $g : [\,0, t_0 - t_1\,] \to M$ ist zu gegebenen Punkten p_0, p_1 aus $M \setminus S$ mit $t_0 = dist(p_0, S) \geq dist(p_1, S) = t_1$ monoton fallend.*
Dabei bezeichnet wieder γ_{p_0} die minimale Geodäte von p_0 nach S.

Beweis Der Beweis läuft völlig analog zu dem des vorherigen Lemmas und wird deshalb nicht ausgeführt. Der einzige Unterschied ist die Wahl des Vektorfeldes X mit $X(0) = \dot{\gamma}_{p_0}(t_0)$ und $X(1) = 0$. □

Satz 6.18 *Falls S eine Seele von M ist, so ist die Funktion $Q : M \to S$ eine Retraktion, die Abstände nicht vergrößert.*

Beweis Im folgenden sollen 3 Fälle unterschieden werden.
(1) Für alle p_0, $p_1 \in S$ gilt $d(P(p_0), P(p_1)) = d(p_0, p_1)$.

(2) Für $p_0 \in S$, $p_1 \in M \setminus S$ gilt wegen 6.17 $d(P(p_0), P(p_1)) = d(p_0, \tilde{p_1}) \leq d(p_0, p_1)$.

(3) Für p_0, $p_1 \in M \setminus S$ gilt $d(P(p_0), P(p_1)) = d(\tilde{p_0}, \tilde{p_1}) \leq d(\gamma_{p_0}(t), p_1)$ mit Lemma 6.17, wobei für p_0, p_1 ohne Einschränkung $t := dist(p_0, S) - dist(p_1, S) \geq 0$ angenommen werden kann. Mit Lemma 6.16 gilt dann aber weiter $d(\gamma_{p_0}(t), p_1) \leq d(p_0, p_1)$.

Insgesamt gilt also $d(P(p_0), P(p_1)) \leq d(p_0, p_1)$ für beliebige p_0, $p_1 \in M$. □

Man kann sogar noch mehr über die Eigenschaften dieser Abbildung sagen. Q ist nämlich nicht nur eine Retraktion von M auf S, sondern zusätzlich noch homotop zur Identität auf M. Das bedeutet, daß Q eine Deformationsretraktion ist. (Zur Definition der Begriffe siehe Anhang C.)

Lemma 6.19 *Die Funktion $H : M \times [\,0, 1\,] \to M$ mit*

$$H(p,t) := \begin{cases} \gamma_p(t) & \text{für } p \in M \setminus S \\ p & \text{für } p \in S \end{cases}$$

ist eine Homotopie zwischen Q und id_M.
Zu jedem $p \in M \setminus S$ sei dabei $\gamma_p : [\,0, 1\,] \to M$ die nach Korollar 6.7 eindeutige minimale Geodäte von p nach S.

Beweis Die Tatsache, daß $H(\,.\,, 0) = id_M$ beziehungsweise $H(\,.\,, 1) = Q$ gilt, ist aufgrund der Definition klar. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß H stetig ist.
Sei dazu $(p_0, t_0) \in M \times [\,0, 1\,]$ fest. Offensichtlich ist die Funktion $H(p_0\,, .\,) : [\,0, 1\,] \to M$ stetig. Das bedeutet, daß für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß $d(H(p_0, t_0), H(p_0, t)) < \frac{\epsilon}{2}$ gilt, falls $|t - t_0| < \delta$.
Sei nun (p, t) so gewählt, daß $d(p, p_0) < \frac{\epsilon}{2}$ und $|t - t_0| < \delta$ gilt. Dann gilt auch

$$\begin{aligned} d(H(p_0, t_0), H(p, t)) &\leq d(H(p_0, t_0), H(p_0, t)) + d(H(p_0, t), H(p, t)) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + d(\gamma_p(t), \gamma_{p_0}(t)) \leq \frac{\epsilon}{2} + d(p, p_0) < \epsilon. \end{aligned}$$

Dabei wurde im zweiten Schritt Lemma 6.16 benutzt. □

Bemerkung 6.20 (1) Die Einbettung $i : S \to M$ ist also eine Homotopieäquivalenz, und somit haben S und M denselben Homotopietyp. (Zur Definition der Begriffe siehe Anhang C.)

(2) Falls es also einen Punkt in M gibt, in dem alle Schnittkrümmungen positiv sind, folgt aus Satz 6.6, daß M zusammenziehbar ist.

(3) J. Cheeger und D. Gromoll haben in [CG2] bereits gezeigt, daß die Einbettung $C \subset M$ für jede kompakte, total konvexe Menge in M mit $\partial C = \emptyset$ eine Homotopieäquivalenz ist. Für ihren Beweis benötigten sie allerdings Morse-Theorie.

Eine Anwendung der letzten Ergebnisse ist der folgende

Satz 6.21 (Yim) *Falls es zwei Seelen S_1 und S_2 von M gibt, sind diese zueinander isometrisch, und es gibt unendlich viele isometrische Kopien von S_1, die in M total geodätisch sind.*

Beweis Zu zwei Seelen S_1 und S_2 von M gibt es nach Satz 6.18 die beiden Retraktionen $Q_i : M \to S_i$ $(i = 1, 2)$, welche Abstände nicht vergrößern und wegen Lemma 6.19 die Homotopien $H_i : M \times I \to M$ mit $H_i(\,.\,, 0) = id_M$ und $H_i(\,.\,, 1) = Q_i$.
Seien nun $j_i : S_i \to M$ isometrische Einbettungen von S_i nach M.
Weil Q_i sogar Deformationsretraktionen sind, sind die H_i Homotopien zwischen $j_i \circ Q_i$ und der Identität auf M. Die Schreibweise dafür sei $j_i \circ Q_i \simeq id_M\ (H_i)$.
Durch Komposition mit Q_2 erhält man daraus auch $Q_2 \circ j_1 \circ Q_1 \simeq Q_2\ (Q_2 \circ H_1)$ und wegen $Q_2\,|_{S_2} = id_{S_2}$ folgt dann $Q_2 \circ j_1 \circ Q_1\,|_{S_2} \simeq id_{S_2}\ (Q_2 \circ H_1\,|_{S_2})$.
Da also $(Q_2 \circ H_1\,|_{S_2}) : S_2 \times I \to S_2$ eine Homotopie auf S_2 ist, sind $Q_2 \circ j_1 \circ Q_1(S_2)$ und S_2 in der selben Homologieklasse der $k-$ten Homologiegruppe $H^k(S_2)$ von S_2, wobei $k = \dim\, S_2$ ist. (Zur Theorie der Homologiegruppen siehe [Vic].)
Das bedeutet aber, daß $Q_2 \circ j_1 \circ Q_1\,|_{S_2} : S_2 \to S_2$ eine surjektive Abbildung sein muß, weil S_2 eine abgeschlossene Mannigfaltigkeit ist.
Dann muß $Q_2 \circ j_1 \circ Q_1$ Abstände erhalten, weil die Q_i Abstände nicht vergrößern und j_1 eine Isometrie ist. Folglich ist $Q_1\,|_{S_2} : S_2 \to S_1$ eine Isometrie und analog auch $Q_2\,|_{S_1} : S_1 \to S_2$, das heißt S_1 und S_2 sind tatsächlich zueinander isometrisch.

Aufgrund der Homotopie H_1 kann man nun für jedes $t \in [\,0, 1\,]$ Funktionen $Q_0^t : S_2 \to M$ und $Q_t^1 : Q_0^t(S_2) \to S_1$ finden, die Abstände nicht vergrößern und für die $Q_1\,|_{S_2} = Q_t^1 \circ Q_0^t$ gilt.
Weil aber $Q_1\,|_{S_2}$ eine Isometrie ist, müssen auch Q_0^t und Q_t^1 Abstände in M erhalten und sind somit Isometrien.

Um nun noch zu zeigen, daß für jedes $t \in [\,0, 1\,]$ die Menge $Q_0^t(S_2)$ total geodätisch in M ist, reicht es zu zeigen, daß die minimale Geodäte zwischen je zwei Punkten darin enthalten ist, weil jede Geodäte lokal minimal ist.

Dazu seien $p,\, q \in Q_0^t(S_2)$ mit $d(p,q) < \epsilon(C)$ für eine kompakte Menge C, die sowohl S_2 als auch $Q_0^t(S_2)$ beinhaltet, und $\gamma : [\,0,1\,] \to M$ sei dann die minimale Geodäte von p nach q. Außerdem sei $\gamma_1 : [\,0,1\,] \to S_2$ die minimale Geodäte , so daß $Q_0^t(\gamma_1(0)) = p$ und $Q_0^t(\gamma_1(1)) = q$.
Da S_2 total geodätisch ist in M, gilt $\gamma_1([\,0,1\,]) \subset S_2$ und $Q_0^t(\gamma_1) \subset Q_0^t(S_2)$. Falls $\gamma([\,0,1\,])$ nicht in $Q_0^t(S_2)$ enthalten ist, gibt es ein $p_0 := Q_0^t(\gamma_1(s_0)) \in Q_0^t(S_2)$, so daß

$$d(p,p_0) + d(p_0,q) > L(\gamma) = d(p,q)\,.$$

Weil aber die Funktion $Q_0^t : S_2 \to M$ Abstände erhält, gilt

$$\begin{aligned} d(p,q) &= d(Q_0^t(\gamma_1(0)), Q_0^t(\gamma_1(1))) \\ &= d(\gamma_1(0),\gamma_1(1)) \\ &= d(\gamma_1(0),\gamma_1(s_0)) + d(\gamma_1(s_0),\gamma_1(1)) \\ &= d(p,p_0) + d(p_0,q)\,, \end{aligned}$$

was nicht sein kann. Somit ist der Satz bewiesen. □

Aufgrund der Definition der Homotopie H sieht man, daß eigentlich sogar gezeigt wurde, daß die isometrischen Kopien einer Seele Bilder der Exponentialabbildung $\exp_S$ sind.
Diese Aussage wurde zwar bereits in [Yim], Korollar 3.7 gezeigt, allerdings wird dort eine beliebigere Homotopie benutzt, was zur Folge hat, daß dieser Zusatz nicht so einfach zu sehen ist.

Die isometrischen Kopien einer Seele, die in der gleichen Homologieklasse wie diese liegen, heißen *Pseudo-Seelen*.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß die Seele einer Mannigfaltigkeit bis auf Isometrie eindeutig bestimmt ist, und somit insbesondere die Dimension der Seele eindeutig ist.

Zum Abschluß dieses Kapitels und zur Abrundung der Thematik sollen im folgenden noch verschiedene globale Eigenschaften von Geodäten zusammengestellt und untersucht werden. Dabei gehen die meisten Aussagen und Beweisideen auf Cheeger und Gromoll zurück (siehe [CG2]).

Lemma 6.22 *Falls $\gamma : (-\infty,\,\infty) \to M$ eine Geodäte ist, die ganz in einer kompakten, total konvexen Menge C enthalten ist, so gilt $\gamma \subset \partial C^a$ für ein $a > 0$.*

Beweis Nach Theorem 2.13 ist $dist(\gamma(\,.\,), \partial C)$ eine konkave Funktion, die auf ganz $I\!R$ definiert und beschränkt ist, also ist sie konstant. Das bedeutet $\gamma \subset \partial C^a$ für ein $a > 0$. □

Bemerkung 6.23 Es gilt also entweder $\gamma \subset \partial C_t$ für ein $t \geq 0$ oder γ läuft mindestens in einer Richtung ins Unendliche.
Außerdem gilt das Lemma auch für die kompakten, total konvexen Mengen S_t aus Lemma 6.11, und da es zu jeder kompakten Menge C ein $t(C)$ gibt, so daß $C \subset S_{t(C)}$ gilt, bedeutet dies, daß $\gamma \subset \partial(S_{t(C)})^a$ für ein $a \geq 0$ und somit $dist(\gamma(\,.\,), S) \equiv t(C) - a$.
Das heißt, alle Geodäten, die in einer kompakten Teilmenge enthalten sind, verlaufen parallel zu jeder Seele von M.

Lemma 6.24 *Jede Geodäte $\gamma : (-\infty, \infty) \to M$, die S quer schneidet, läuft in beiden Richtungen ins Unendliche, das heißt γ ist in keiner kompakten Menge vollständig enthalten.*
Falls γ die Seele in $\gamma(0)$ senkrecht schneidet, sind $\gamma\,|_{[0,\infty)}$ und $-\gamma\,|_{[0,\infty)}$ sogar Strahlen. (Dabei ist $-\gamma(t) = \gamma(-t)$.)

Beweis Es sei $C = C(0) \supset C(1) \supset \dots \supset C(k) = S$ eine Fahne von total konvexen Mengen wie in Kapitel 2, und γ schneide S in $\gamma(0)$. Wenn nun $\gamma\,|_{[0,\infty)} \subset C(k-1)$ gelten würde, wäre $g(s) := dist(\gamma(s), \partial C(k-1))$ eine beschränkte, konkave Funktion. Da aber γ die Seele $S = C(k-1)^{max}$ transversal schneidet, ist g bei $s = 0$ streng monoton fallend. Eine solche Funktion kann es aber nicht geben, und somit schneidet $\gamma\,|_{[0,\infty)}$ die Menge $C(k-1)$ ebenfalls transversal.
Induktiv folgt jetzt, daß $\gamma\,|_{[0,\infty)}$ in keiner der Mengen $C(i)$ enthalten sein kann.
Der Fall, daß γ die Seele senkrecht schneidet, wurde bereits in 6.10 behandelt. □

Lemma 6.25 *Seien $\sigma, \gamma : [0,\infty) \to M$ Geodäten mit $\sigma(0) = \gamma(0)$ und $\langle \dot\sigma(0), \dot\gamma(0) \rangle > 0$. Falls σ ein Strahl ist, läuft auch γ ins Unendliche.*

Beweis Sei $p = \sigma(0)$ Startpunkt der Seelenkonstruktion aus Kapitel 2, das heißt $p = \gamma(0) \in \partial C_0$. Wegen Lemma 2.11 gilt dann $\gamma \not\subset C_0$, da $\langle \dot\sigma(0), \dot\gamma(0) \rangle > 0$. Also ist die Funktion $dist(\gamma(s), \partial C_t)$ für alle $t \geq 0$ nicht konstant, konkav und streng monoton fallend bei $s = 0$, das heißt $\gamma \not\subset C_t$ für alle $t \geq 0$. □

Korollar 6.26 *Zu jedem $p \in S$ gibt es mindestens einen Strahl, der von p ausgeht, und jeder solche Strahl muß senkrecht auf S starten.*

Beweis Die Existenz eines Strahls $\sigma : [0,\infty) \to M$ mit $\sigma(0) = p$ wurde in Bemerkung 2.4 gezeigt. Für jede Geodäte $\gamma : [0,\infty) \to S$ mit $\gamma(0) = p$ muß dann wegen des letzten Lemmas $\langle \dot\sigma(0), \dot\gamma(0) \rangle \leq 0$ gelten. Da dies aber auch für alle Geodäten $\gamma_- : [0,\infty) \to S$ gelten muß mit $\dot\gamma_-(0) = -\dot\gamma(0)$, gilt insgesamt $\dot\sigma(0) \perp \dot\gamma(0)$ für jede Geodäte $\gamma : (-\infty, \infty) \to S$, die durch p läuft.
Dabei wurde benutzt, daß S total geodätische Untermannigfaltigkeit ohne Rand ist, und man dadurch jede Geodäte in S auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen kann. □

Lemma 6.27 *Falls alle Schnittkrümmungen von M positiv sind, läuft jede Geodäte $\gamma : [\,0,\infty\,) \to M$ ins Unendliche.*

Beweis Angenommen, es gelte $\gamma \subset C$ für eine kompakte, total konvexe Menge C, dann ist $g(\,.\,) = dist(\gamma(\,.\,), \partial C)$ eine konkave, beschränkte Funktion auf $[\,0,\infty\,)$. Falls diese jedoch konstant wäre, gäbe es nach Theorem 2.13 ein flaches, total geodätisches Rechteck in C, was wegen der positiven Schnittkrümmung von M nicht sein kann.
Also muß g eine monoton wachsende Funktion sein, die sich asymptotisch einer Konstante K annähert. Wegen der Kompaktheit von C gibt es dann eine Teilfolge von $(\dot\gamma(i))_{i\in I\!\!N}$, die gegen einen Tangentenvektor v konvergiert. Bezeichnet nun σ die Geodäte mit $\dot\sigma(0) = v$, so gilt $dist(\sigma(t), \partial C) \equiv K$, und man würde wieder mit Theorem 2.13 ein flaches, total geodätisches Rechteck in C erhalten, was nicht sein kann. $\square$

Bemerkung 6.28 Falls umgekehrt M nicht diffeomorph zu $I\!\!R^n$ ist, das heißt $\dim S \geq 1$, so gibt es immer Geodäten, die nicht ins Unendliche laufen.
Dies folgt zum Beispiel daraus, daß S total geodätische Untermannigfaltigkeit ohne Rand ist und deshalb jede Geodäte, die in S startet, auch ganz in S bleibt. Wegen $\dim S \geq 1$ gibt es immer solche Geodäten in S.
Mit Hilfe von Morse-Theorie kann man außerdem zeigen, daß es sogar durch jeden Punkt einer kompakten, total konvexen Menge C mindestens eine Geodäte $\gamma : [\,0,\infty\,) \to M$ gibt, die in C bleibt. (Vergleiche dazu [CG2], Theorem 5.1 (4) oder [CE], Theorem 8.22 (5).)

Lemma 6.29 *Sei $\sigma : [\,0,1\,] \to S$ eine Geodäte, welche die Punkte p und q in S verbindet, und $\gamma : [\,0,\infty\,) \to M$ sei ein Strahl, der von p ausgeht.*
Falls man $v \in T_qM$ durch Paralleltransport von $\dot\gamma(0) \in T_pM$ entlang σ erhält, ist $t \mapsto \exp_q(tv)$ ebenfalls ein Strahl.

Beweis Da S eine total geodätische Untermannigfaltigkeit ohne Rand und M vollständig ist, kann man σ auf ganz $I\!\!R$ fortsetzen. Führt man nun die Konstruktion aus Satz 2.2 in p durch, so daß $M = \bigcup\limits_{t\geq 0} C_t$ mit $\gamma(t) \in \partial C_t$ für alle $t \geq 0$, so erhält man wegen $\sigma(I\!\!R) \subset S$ auch $\sigma(I\!\!R) \subset C_{t_0}$ für ein t_0, also insbesondere $\sigma(I\!\!R) \subset C_t$ für alle $t \geq t_0$. Die Funktion $dist(\sigma(\,.\,), \partial C_t)$ muß folglich für jedes $t \geq t_0$ konstant sein, da sie konkav und auf ganz $I\!\!R$ beschränkt ist. Bezeichnet dann X das parallele Vektorfeld entlang σ mit $X(0) = \dot\gamma(0)$, so ist wegen Theorem 2.13 σ_s mit
$\sigma_s(t) := \exp_{\sigma(s)}(tX(s))$ für alle $s \in I\!\!R$ eine minimale Geodäte von $\sigma(s)$ zu ∂C_t für jedes $t \geq t_0$, also ist σ_s ein Strahl. $\square$

Zusatz: Jedes Rechteck der Form $\varphi : [\,0,1\,] \times [\,0,d\,] \to M$ definiert durch $\varphi(s,t) = \exp_{\sigma(s)}(tX(s))$ ist nach Theorem 2.13 flach und total geodätisch.

Außerdem folgt aus dem Beweis des Lemmas, daß für eine feste Menge C, die kompakt und total konvex ist, und für jede Geodäte $\gamma : [\,0,1\,] \to S$ die Identität $dist(\gamma(s), \partial C) \equiv konstant$ gilt, was insbesondere bedeutet, daß

$$dist(q, \partial C) \equiv konstant \text{ für alle } q \in S$$

ist, da man je zwei Punkte in S durch eine Geodäte in S verbinden kann.

7 Splitting Theoreme

Wie schon in Kapitel 4 angekündigt, soll in diesem Kapitel schließlich noch die Frage untersucht werden, in welchen Situationen eine Mannigfaltigkeit mit den üblichen Voraussetzungen isometrisch zu einem Produkt $N \times I\!R^k$ ist.
Im Zusammenhang mit der Seele läßt sich dazu folgendes Theorem zeigen.

Theorem 7.1 (Cheeger, Gromoll) *Falls $S \subset M$ eine Seele einer nichtkompakten, vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit M mit nichtnegativer Schnittkrümmung ist und falls $\dim S = \dim M - 1$ gilt, so ist $\exp_S|_{\nu(S)}$ eine Isometrie zwischen $\nu(S)$ mit seiner flachen Metrik und M.*

Beweis Nach Satz 6.9 ist $\exp_S|_{\nu(S)}$ ein Diffeomorphismus zwischen $\nu(S)$ und M. Die Tatsache, daß $\exp_S|_{\nu(S)}$ sogar eine Isometrie ist, folgt aus dem Theorem von Perelman (Theorem 6.1) beziehungsweise dessen Umformulierung (Bemerkung 6.2), da es wegen $\operatorname{co}\dim S = 1$ nur eine Normalenrichtung gibt. $\square$

Bemerkung 7.2 (1) Die Aussage wurde von Cheeger und Gromoll bereits 1972 gezeigt, also ohne Verwendung des Theorems von Perelman.

(2) Dieses Theorem ist eine spezielle Version eines Splitting Theorems. Eine allgemeinere Version ist das folgende Theorem.

Theorem 7.3 (Splitting Theorem von Toponogov) *Sei M eine nichtkompakte, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Schnittkrümmung. Dann kann M eindeutig als isometrisches Produkt $N \times I\!R^k$ geschrieben werden, wobei N keine Linien mehr enthält, und $I\!R^k$ seine flache Metrik besitzt.*

(Eine Linie ist eine Geodäte $\gamma : (-\infty, \infty) \to M$, die zwischen je zwei ihrer Punkte minimal ist.)

Beweis Es reicht zu zeigen, daß M isometrisch zu $N \times I\!R$ ist, falls M eine Linie enthält, da der Rest dann induktiv folgt.
Sei also $\sigma : (-\infty, \infty) \to M$ eine Linie. Bezeichnet man die Mengen B_{σ_a} und $B_{-\sigma_a}$ wie in Definition 2.3, wobei $-\sigma$ der Strahl $[0, \infty) \to M$ mit $-\sigma(t) = \sigma(-t)$ sei, so haben diese beiden Mengen für jedes $a > 0$ den Abstand $2a$, da σ sonst keine Linie sein könnte.
Sei außerdem $\tau : (-\infty, \infty) \to M$ eine Geodäte mit $\tau(0) = \sigma(0)$ und $\dot\tau(0) \perp \dot\sigma(0)$.
Angenommen es gelte $\tau(t) \in \mathit{int}\, H_{\sigma_0}$ für ein $t > 0$ (mit $H_{\sigma_0} = M \setminus B_{\sigma_0}$ wie in Definition 2.3), dann gilt $\tau|_{[0,t]} \subset H_{\sigma_0}$, da H_{σ_0} nach Teil (i) des Beweises von Satz 2.2 total konvex ist. Andererseits gilt aber $\sigma(0) \in \partial H_{\sigma_0}$ aufgrund der Konstruktion der Mengen H_{σ_0}, und außerdem ist für alle $s > 0$ die Kurve $-\sigma|_{[0,s]}$ eine minimale

Geodäte von $-\sigma(s)$ nach ∂H_{σ_0}, weil sonst σ keine Linie sein könnte.
Das heißt aber, daß mit Lemma 2.11 $\sphericalangle\,(\dot\tau(0),\dot\sigma(0)) < \frac{\pi}{2}$ gelten müßte, was wegen der Voraussetzung $\dot\tau(0)\perp\dot\sigma(0)$ nicht sein kann.
Also gilt für alle Geodäten τ wie oben, daß τ das Innere von H_{σ_0} nicht schneidet, was wiederum bedeutet, daß $\tau\subset\overline{B}_{\sigma_0}$.
Analog gilt $\tau\subset\overline{B}_{-\sigma_0}$, also insgesamt $\tau\subset\partial B_{\sigma_0}=\partial B_{-\sigma_0}$ (da nach Konstruktion $B_{\sigma_0}\cap B_{-\sigma_0}=\emptyset$ gilt). Da aber nach Satz 2.2 (Teil (iv) des Beweises)
$\partial B_{\sigma_0}=\partial H_{\sigma_0}=\{p\in H_{\sigma_0}\mid dist(p,\partial H_{\sigma_a})=a\}$ gilt, folgt $dist(\tau(t),\partial B_{\sigma_a})\equiv a$ beziehungsweise analog $dist(\tau(t),\partial B_{-\sigma_a})\equiv a$.
Sei nun $D_a:=H_{\sigma_a}\cap H_{-\sigma_a}$, das heißt nach Teil (i) und (ii) des Beweises von Satz 2.2 sind alle D_a abgeschlossen und total konvex. Angenommen es gelte $dist(q,\partial D_a)\geq a$ für ein $q\in D_a$, und γ bezeichne eine minimale Geodäte von $\sigma(0)$ nach q, dann gilt wieder wegen Teil (iv) des Beweises von Satz 2.2, daß $q\in D_0$ und somit $\gamma\subset D_0$, da D_0 total konvex ist. Dies bedeutet aber mit Lemma 2.11, daß $\dot\tau(0)\perp\dot\sigma(0)$ gilt, und damit folgt nach obiger Argumentation $dist(q,\partial D_a)=a$.
Insgesamt ist also bisher gezeigt, daß $D_a^{max}=\exp_{\sigma(0)}\nu(\sigma)$ gilt.
Weiter gilt, daß $\exp_{\sigma(0)}\nu(\sigma)$ keinen Rand hat.
Sei dazu angenommen, daß q ein Randpunkt ist und $q=\exp_{\sigma(0)}(t_0\cdot v)$ mit $v\in\nu(\sigma)$, dann gilt $\exp_{\sigma(0)}(tv)\in D_a^{max}$ für alle $t\leq t_0$, weil D_a^{max} total konvex ist. Andererseits müßte aber $\exp_{\sigma(0)}(tv)\notin D_a^{max}$ für $t>t_0$ gelten, da q ein Randpunkt ist, was nicht sein kann, da $D_a^{max}=\exp_{\sigma(0)}\nu(\sigma)$.
Sei nun $N:=D_a^{max}$. Da N also keinen Rand hat, folgt wie in Kapitel 2, daß N eine total geodätische eingebettete Untermannigfaltigkeit ist. Außerdem gilt wegen $N=D_a^{max}$ für jede Geodäte $\gamma\subset N$ $dist(\gamma(t),D_a)\equiv a$ und deshalb folgt, da alle D_a total konvex waren, mit Theorem 2.13, daß $\exp_N|_{\nu(N)}$ eine lokale Isometrie ist. Falls es nun zwei Urbilder von $p\in N$ unter $\exp_N|_{\nu(N)}$ geben würde, so müßte jede Geodäte durch diese Punkte in N liegen, und man erhält einen Widerspruch.
Also ist $\exp_N|_{\nu(N)}$ sogar eine globale Isometrie, und das Theorem ist bewiesen. $\square$

Korollar 7.4 *Falls es einen Punkt in M gibt, in dem alle Schnittkrümmungen positiv sind, kann M keine Linien enthalten.*

Bemerkung 7.5 Für den $2-$dimensionalen Fall wurde das Splitting Theorem bereits 1936 von S. Cohn-Vossen gezeigt (siehe [CV]). In der obigen Allgemeinheit wurde es dann 1964 von V. Toponogov und später von J. Cheeger und D. Gromoll im Kontext der Seelenkonstruktion (wie oben ausgeführt) neu bewiesen (vergleiche [Top] beziehungsweise [CG2]).

Die Tatsache, daß dieselbe Aussage auch unter der schwächeren Voraussetzung von nichtnegativer Ricci-Krümmung noch richtig ist, haben Cheeger und Gromoll 1971 bewiesen (siehe [CG1]).

In ihrer Arbeit benutzen sie aber sehr stark die Existenz - und Regularitätstheorie für elliptische Gleichungen, die sie auf Busemann-Funktionen anwenden.

Im Gegensatz dazu haben J. Eschenburg und E. Heintze 1984 einen einfacheren, direkteren Beweis des Theorems mit elementaren Methoden gefunden, wobei diese vor allem darin bestehen, die Geometrie der Busemann-Funktion zu einer Linie besser zu analysieren.

Die Grundidee dabei ist die folgende:

Man betrachtet die Busemann-Funktionen b_γ und b_γ^- zu einer Linie γ und erhält $b_\gamma + b_\gamma^- \leq 0$ auf ganz M und $b_\gamma + b_\gamma^- = 0$ auf γ. Mit einer leichten Verallgemeinerung des Hopf Maximumprinzips erhält man daraus $b_\gamma + b_\gamma^- \equiv 0$ auf ganz M. Außerdem ist b_γ differenzierbar mit $\|grad\, b_\gamma\| \equiv 1$, was bedeutet, daß die Asymptoten der Strahlen $\gamma|_{[0,\infty)}$ und $-\gamma|_{[0,\infty)}$ eindeutig bestimmt sind und jeweils zu einer Linie zusammenpassen.
Wählt man dann $N := (b_\gamma)^{-1}(0)$, so erhält man schließlich die gewünschte Isometrie zwischen M und $N \times I\!R$.
Man erhält also die Produktstruktur des Raumes als Aufspaltung durch Niveaumengen und Integralkurven an den Gradienten der Busemann-Funktion.

R. Schoen und S.-T. Yau haben in [SY], Kapitel 2 noch einen weiteren Beweis des Splitting Theorems für nichtnegative Ricci-Krümmung gegeben. Die Beweisschritte sind dabei fast dieselben wie bei Eschenburg und Heintze, allerdings werden diese wieder mit analytischen Methoden gezeigt.

Zunächst zeigt man mit Hilfe der zweiten Variationsformel (siehe Anhang B) unter der Voraussetzung nichtnegativer Ricci-Krümmung die Ungleichung

$$(\star) \int\limits_M d(p,q) \triangle\varphi(q)\, dq \leq \int\limits_M \frac{n-1}{d(p,q)} \cdot \varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(M),\ \varphi \geq 0\,,$$

was bedeutet, daß $\triangle d \leq \frac{n-1}{d}$ im Sinn der Distributionen gilt. Daraus erhält man dann, daß $\triangle b_\gamma \leq 0$ beziehungsweise $\triangle b_\gamma^- \leq 0$ ebenfalls im Sinne der Distributionen gelten.
Mit einer Mittelwertungleichung für $b_\gamma + b_\gamma^-$ kann man anschließend die Ungleichung

$$b_\gamma(p) + b_\gamma^-(p) \geq \frac{1}{\omega_{n-1} R^n} \int\limits_{B_R(p)} (b_\gamma(q) + b_\gamma^-(q))\, dq$$

für alle $p \in M$ und kleine $R > 0$ zeigen, wobei ω_{n-1} das Volumen der $(n-1)-$dimensionalen Einheitssphäre ist. Da also $b_\gamma + b_\gamma^- \equiv 0$ auf $B_R(p)$ für $p \in \gamma$ gilt, ist insbesondere $b_\gamma + b_\gamma^- \equiv 0$ in einer ganzen Umgebung von γ.
Wiederholte Anwendung dieser Mittelwertungleichung ergibt dann sogar $b_\gamma + b_\gamma^- \equiv 0$ auf ganz M und somit $\triangle(b_\gamma + b_\gamma^-) \equiv 0$. Aufgrund der Regularitätstheorie für

lineare elliptische partielle Differentialgleichungen folgt jetzt, daß b_γ und b_γ^- glatte Funktionen sind.
Wegen $|\nabla d(p,q)| = 1$ für fast alle $q \in M$ und festes $p \in M$ erhält man auch $|\nabla b_\gamma| \equiv 1$, woraus man dann folgern kann, daß ∇b_γ ein paralleles Vektorfeld auf M ist. (Dazu rechnet man direkt aus, daß $\nabla(\nabla b_\gamma) = 0$ gilt.)
Auch hier wird die Menge N durch $N := (b_\gamma)^{-1}(0)$ definiert, und man erhält die gewünschte Isometrie zwischen M und $N \times \mathbb{R}$.

Die oben benutzte Mittelwertungleichung ist eine Ungleichung, die auf einer allgemeinen vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit M mit nichtnegativer Ricci-Krümmung und für Lipschitzstetige Funktionen $f \geq 0$ mit $\triangle f \leq 0$ im Sinn der Distributionen gilt. Deshalb bestand der erste Schritt darin zu zeigen, daß $\triangle(b_\gamma + b_\gamma^-) \leq 0$ im Sinn der Distributionen gilt, um diese Ungleichung anwenden zu können.
Die wesentliche Idee im Beweis dieser Ungleichung ist (neben dem Divergenztheorem) wieder die Aussage $(\star)$, welche man aus Vergleichstheoremen für die Hesse-Matrix und den Laplace-Operator der Abstandsfunktion auf M mit den entsprechenden Funktionen im $\mathbb{R}^n$ erhält.

Vollständige Beweise der hier angeschnittenen Aussagen und Ideen findet man in [SY], Kapitel 1 und 2.

Anhang A: Vergleichstheoreme

Ein sehr wichtiges Hilfsmittel bei der Untersuchung geometrischer Eigenschaften einer Mannigfaltigkeit, deren Schnittkrümmungen nach unten beschränkt sind, ist das *Vergleichstheorem von Toponogov*, welches eine globale Verallgemeinerung des ersten Theorems von Rauch darstellt.

Theorem 1 (Toponogov, Aleksandrov)
Sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K_M \geq K$, wobei K eine Konstante ist.

(1) Seien γ_i $(i = 1, 2, 3)$ die Seiten eines geodätischen Dreiecks in M, wobei γ_1, γ_3 minimal sind, und, falls $K > 0$, zusätzlich $L(\gamma_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ gilt.
In M_K (dem einfach zusammenhängenden 2-dimensionalen Raum konstanter Krümmung K) gibt es dann ein geodätisches Dreieck mit Seiten $\bar{\gamma}_i$, so daß $L(\gamma_i) = L(\bar{\gamma}_i)$, und es gilt $\bar{\alpha}_1 \leq \alpha_1$, $\bar{\alpha}_3 \leq \alpha_3$, wobei α_i beziehungsweise $\bar{\alpha}_i$ den Winkel des Dreiecks gegenüber der Seite γ_i beziehungsweise $\bar{\gamma}_i$ bezeichnet.
Außer in den Fällen $K > 0$ und $L(\gamma_i) = \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ für ein i, ist das Dreieck in M_K eindeutig bestimmt.

(2) Seien $\gamma_1 : [\,0, l_1\,] \to M$, $\gamma_2 : [\,0, l_2\,] \to M$ Geodäten mit $\gamma_1(l_1) = \gamma_2(0)$ und $\sphericalangle(-\dot{\gamma}_1(l_1), \dot{\gamma}_2(0)) = \alpha$.
Außerdem sei γ_1 minimal und, falls $K > 0$, zusätzlich $L(\gamma_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{K}}$.
Dann gibt es Geodäten σ_1, σ_2 in M_K mit $\sigma_1(l_1) = \sigma_2(0)$, $L(\sigma_i) = L(\gamma_i)$ und $\sphericalangle(-\dot{\sigma}_1(l_1), \dot{\sigma}_2(0)) = \alpha$, und es gilt $d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) \leq d(\sigma_1(0), \sigma_2(l_2))$.

Im Kontext wird dieses Theorem oft mit $K = 0$ angewendet. In diesem Fall erhält man also Abschätzungen zu Größen im $\mathbb{R}^n$, die man dort normalerweise genau bestimmen kann.
Einen Beweis des Theorems findet man beispielsweise in [CE], [Ebg] oder [Ber].

Im gleichen Zusammenhang findet man in dieser Literatur auch Beweise zu *Bergers Version von Rauchs Vergleichstheorem*, welche nun folgt.

Theorem 2 (Berger)
Sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Schnittkrümmung, $p_0, p_1 \in M$ und $\gamma : [\,0, 1\,] \to M$ eine minimale Geodäte von p_0 nach p_1. Weiter sei X ein paralleles Vektorfeld entlang γ mit $X(s) \perp \dot{\gamma}(s)$ und $\sigma_s(t) = \exp_{\gamma(s)} tX(s)$ für alle $s \in [\,0, 1\,]$.
Dann gilt $d(\sigma_0(t), \sigma_1(t)) \leq d(p_0, p_1)$ für alle t, und Gleichheit gilt für ein $t > 0$ genau dann, wenn p_0, p_1, $\sigma_0(t)$, $\sigma_1(t)$ ein flaches total geodätisches Rechteck aufspannen.

Anhang B: Variationsformeln

In einigen Beweisen, in denen mit einer lokalen Variation von minimalen Geodäten argumentiert wird, benutzt man die sogenannte *erste Variationsformel*.

Sei dazu α eine *glatte Variation* der Kurve $\gamma_0 : [\,a, b\,] \to M$ in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M, das heißt $\alpha : [\,a, b\,] \times (-\epsilon,\, \epsilon) \to M$ ist eine glatte Funktion, so daß $\alpha\,|_{[\,a,b\,]\times\{0\}} = \gamma_0$ ist.
Wenn dann T und V die Tangentialvektorfelder an α bezeichnen, die zur ersten beziehungsweise zweiten Variablen gehören, gilt für die Länge $L(\gamma_s)$ der variierten Kurven $\gamma_s = \alpha\,|_{[\,a,b\,]\times\{s\}}$ mit $s \in (-\epsilon,\, \epsilon)$

$$\frac{d}{ds} L(\gamma_s)\,|_{s=0} = \frac{1}{l}(\,\langle V, T\rangle|_a^b - \int_a^b \langle V, \nabla_T T\rangle\, dt\,).$$

Dabei ist $l = L(\gamma_0)$, und ∇ bezeichnet die kovariante Ableitung auf M.

Da in den meisten Anwendungen γ_0 eine Geodäte ist, entfällt in diesen Fällen der zweite Term, weil für Geodäten $\nabla_T T \equiv 0$ gilt.

Betrachtet man nun die zweite Ableitung des Längenfunktionals in dieselbe Richtung, so erhält man die *zweite Variationsformel*:

$$\frac{d^2}{ds^2} L(\gamma_s)\,|_{s=0} = \int_a^b (\,\langle \nabla_T V, \nabla_T V\rangle - \langle R(V,T)T, V\rangle - (T\langle V, T\rangle)^2\,) + \langle \nabla_V V, T\rangle\,|_a^b\,.$$

Falls die Variation durch Geodäten läuft, gilt sogar

$$\frac{d^2}{ds^2} L(\gamma_s)\,|_{s=0} = \int_a^b \langle \nabla_T V, \nabla_T V\rangle - \langle R(V,T)T, V\rangle\,.$$

In diesem Zusammenhang ist die $Indexform\ I$ wie folgt definiert.

$$I(V, W) := \int_a^b \langle \nabla_T V, \nabla_T W\rangle - \langle R(W,T)T, V\rangle$$

für glatte Vektorfelder V, W entlang γ_0 mit $\langle V, T\rangle \equiv \langle W, T\rangle \equiv 0$.

Beweise und weitere Ausführungen findet man zum Beispiel in [CE].

Anhang C: Topologische Begriffe

Zum Abschluß folgen noch die Definitionen einiger Begriffe aus der algebraischen Topologie, die vor allem in Kapitel 5 und 6 benutzt wurden. (Vergleiche dazu [Vic].)

Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen X und Y heißen *homotop*, falls es eine stetige Abbildung $H : X \times [\,0,1\,] \to Y$ gibt, so daß $H(\,.\,,0) = f$ und $H(\,.\,,1) = g$.
Man sagt dann, H ist eine *Homotopie* zwischen f und g.

Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ besitzt eine *Homotopie-Umkehrung*, falls es eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ gibt, so daß $g \circ f$ homotop zur Identität auf X ist.

Falls $f : X \to Y$ eine Homotopie-Umkehrung besitzt, heißt f *Homotopieäquivalenz*, und man sagt, X und Y haben denselben *Homotopietyp*.

Eine Retraktion $g : X \to A$, $A \subset X$, in einem topologischen Raum X heißt dann *Deformationsretraktion*, wenn $i \circ g : X \to X$ homotop zu id_X ist, wobei $i : A \to X$ die kanonische Einbettung bezeichnet.
Die Tatsache, daß g eine Retraktion ist, bedeutet dabei, daß g stetig ist und $g \circ i = id_A$ gilt.

In diesem Fall ist also i eine Homotopieäquivalenz, und somit haben X und A den selben Homotopietyp.

Ebenfalls in Kapitel 5 wurde der folgende Kompaktheitssatz von Arzela-Ascoli benutzt (siehe [Die]).

Theorem 1 (Arzela-Ascoli)
Sei E ein kompakter metrischer Raum und F ein Banachraum. Dann ist eine Teilmenge H von C(E,F) genau dann relativ kompakt, wenn H gleichgradig stetig ist und für alle $x \in E$ die Menge $H(x) = \{f(x) \mid f \in H\}$ relativ kompakt in F ist.

Eine Teilmenge H von $C(E,F) = \{f : E \to F \mid f \text{ stetig}\}$ heißt dabei *gleichgradig stetig* in $x_0 \in E$, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $f \in H$ gilt $\|f(x) - f(x_0)\|_F < \epsilon$, falls $d(x, x_0) < \delta$.

Literatur

[Ber] M. Berger,
An extension of Rauch's metric comparison theorem and some applications,
Illinois J. Math. 6, S.700-712 (1962)

[BK] P. Buser, H. Karcher,
Gromov's almost flat manifolds,
Société mathématique de France (1981)

[CE] J. Cheeger, D. Ebin,
Comparison theorems in Riemannian geometry,
North-Holland Publishing Company (1975)

[CG1] J. Cheeger, D. Gromoll,
The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature,
J. Differential Geometry 6, S.119-128 (1971)

[CG2] J. Cheeger, D. Gromoll,
On the structure of complete manifolds of nonnegative curvarture,
Ann. of Math. 96, S.413-443 (1972)

[Cha] I. Chavel,
Riemannian geometry - A modern introduction,
Cambridge University Press (1993)

[CV] S. Cohn-Vossen,
Totalkrümmung und geodätische Linien auf einfach zusammenhängenden, offenen, vollständigen Flächenstücken,
Math. Sb. 43, S.139-163 (1936)

[Die] J. Dieudonné,
Foundations of Modern Analysis,
Academic Press, New York and London (1960)

[doC] M. P. do Carmo,
Riemannian Geometry,
Birkhäuser Boston (1992)

[Ebg] J.-H. Eschenburg,
Comparison theorems in Riemannian geometry,
Lecture Notes Series, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Trento 3 (1994)

[EH] J.-H. Eschenburg, E. Heintze,
An elementary proof of the Cheeger-Gromoll Splitting theorem,
Ann. Glob. Analysis and Geometry, Vol.2, No. 2, S.141-151 (1984)

[GKM] D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer,
Riemannsche Geometrie im Großen,
Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics 55 (1968)

[GM] D. Gromoll, W. Meyer,
On complete open manifolds of positive curvature,
Ann. of Math. 90, S.75-90 (1969)

[Per] G. Perelman,
Proof of the soul conjecture of Cheeger and Gromoll,
J. Differential Geometry 40, S.209-212 (1994)

[Sha] V. Sharafutdinov,
The Pogorelov-Klingenberg theorem for manifolds homeomorphic to $\mathbb{R}^n$,
Sib. Mat. Zh. 18, S.915-925 (1977)

[SY] R. Schoen, S.-T. Yau,
Lectures on Differential Geometry,
International Press (1994)

[Top] V. A. Toponogov,
Riemannian spaces which contain straight lines,
A. M. S. Translations 37, S.287-290 (1964)

[Vai] E. Vainer,
The Pogorelov-Klingenberg theorem for convex hypersurfaces,
Sib. Mat. Zh. 11, S.1396-1399 (1970)

[Vic] J. W. Vick,
Homology theory,
Springer-Verlag, New York u. a. (1993)

[Wal] G. Walschap,
Nonnegatively curved manifolds with souls of codimension 2,
J. Differential Geometry 27, S.525-537 (1988)

[Yim] J.-W. Yim,
Distance nonincreasing retraction on a complete open manifold of nonnegative sectional curvature,
Ann. Global Anal. Geom. 6, S.191-206 (1988)