Asymptotisches Verhalten von Singularitäten einer geometrischen Evolutionsgleichung

Diplomarbeit

vorgelegt von

Wolf-Patrick Düll

Betreuer:

Prof. Dr. G. Huisken

Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Mathematische Fakultät

Juni 1999

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **3**

1 Konstruktion von singulären Lösungen des MCF **9**

1.1 Formale asymptotische Entwicklungen 9

1.2 Existenzbedingungen für eine bestimmte Klasse von Lösungen des MCF 16

2 Technische Hilfsmittel **25**

2.1 Einige a priori Abschätzungen 25

2.2 Konstruktion von Sub- und Superlösungen des MCF 37

3 Der Beweis des Haupttheorems **47**

3.1 Der Existenzbeweis 47

3.2 Der Konvergenzbeweis 53

Anhang **70**

Einleitung

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit der Evolution von Hyperflächen, deren Geschwindigkeit in Normalenrichtung von einer skalaren Krümmungsinvariante abhängt. In unserem Fall soll dies die mittlere Krümmung sein. Die zugehörige Evolutionsgleichung nennt man dann den mittleren Krümmungsfluß (mean curvature flow), welchen wir im folgenden mit MCF abkürzen wollen.
Die klassische Formulierung des MCF wurde 1984 von Huisken eingeführt, vgl. [Hu1]. Sie lautet folgendermaßen. Eine glatt immersierte Einparameterfamilie von Hyperflächen

$$F : M^n \times [t_0, t_1) \to \mathbb{R}^{n+1}$$

genügt dem MCF, wenn sie die Evolutionsgleichung

$$\frac{d}{dt} F(p,t) = -H(p,t)\, \nu(p,t)$$

für alle $p \in M^n$ und alle $t \in (t_0, t_1)$ erfüllt. Dabei bezeichnet $H(p,t)$ die mittlere Krümmung und $\nu(p,t)$ den äußeren Normaleneinheitsvektor von $F(M^n, t)$ im Punkt $F(p,t)$.
Huisken zeigte in [Hu1], daß jede konvexe geschlossene Ausgangsfläche unter dem MCF in endlicher Zeit zu einem einzelnen Punkt zusammenschrumpft. Läßt man die Voraussetzung der Konvexität fallen, so können unter dem MCF Singularitäten auftreten, vgl. [Gr]. Eine Singularität ist ein Punkt einer glatt immersierten Hyperfläche, an dem die 2. Fundamentalform unbeschränkt ist. Ab dem Zeitpunkt ihres Auftretens kann der MCF nicht mehr in der klassischen Formulierung beschrieben werden.
Die Singularitäten werden in sogenannte Typ 1 - und Typ 2 - Singularitäten unterteilt. Tritt bei einer Lösung des MCF zur Zeit $t = T$ eine Singularität auf, so heißt diese Singularität eine Typ 1 - Singularität, wenn es ein $C > 0$ gibt, so daß

$$|A|^2(t) \leq \frac{C}{T-t}$$

für alle $t \in [t_0, T)$ ist. Anderenfalls nennt man die Singularität eine Typ 2 - Singularität. Dabei ist

$$|A|^2(t) = \max_{p \in M^n} \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2(F(p,t)) \quad ,$$

wobei $\{\kappa_i(F(p,t)) : 1 \leq i \leq n\}$ die Hauptkrümmungen im Punkt $F(p,t)$ sind.
Die Typ 2 - Singularitäten sind momentan noch weniger gut erforscht als die Typ 1 - Singularitäten. Die Existenz von Typ 2 - Singularitäten wurde erstmals von Hamilton gezeigt. Sie zu konstruieren, gelang als ersten Altschuler, Angenent, Giga und

Velázquez, vgl. [AAG] und [AV].
In ihrer Arbeit "Degenerate neckpinches in mean curvature flow" [AV] aus dem Jahre 1997 konstruierten Angenent und Velázquez Lösungen des MCF, die eine Typ 2 - Singularität ausbilden, für den Fall rotationssymmetrischer Hyperflächen. Sie vermuten, daß jede Typ 2 - Singularität, die von rotationssymmetrischen Hyperflächen ausgebildet wird, so aussieht wie die Singularität aus ihrer Konstruktion.
Ziel meiner Arbeit ist es, den Originaltext von Angenent und Velázquez zu kommentieren und dadurch dem Leser leichter zugänglich zu machen. Insbesondere sollen dabei die einzelnen Beweisschritte des Originalbeweises ausführlicher dargestellt werden. Auch mußten an einigen Stellen dieses Beweises leichte Korrekturen vorgenommen werden.
Zur Zusammenfassung des Ergebnisses von Angenent und Velázquez sei folgende Notation vereinbart. Für jeden Punkt $\vec{x} = (x_0, x_1, ..., x_n) \in I\!R^{n+1}$ sei

$$x := x_0\,, \quad r := \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}\ .$$

Jede zusammenhängende, geschlossene rotationssymmetrische Hyperfläche schreiben wir dann vermöge

$$\Gamma = \{\vec{x} \in I\!R^{n+1} : r = u(x),\, a \le x \le b\}\ ,$$

wobei a,b beliebige Konstanten sind und $u \in C([a,b])$ mit $u(a) = u(b) = 0$ und $u(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$ ist. Sei außerdem $\Gamma_* \subset I\!R^{n+1}$ eine zusammenhängende, geschlossene rotationssymmetrische Hyperfläche mit Radiusfunktion $u_* \in C([0,b))$. Diese Hyperfläche sei glatt, außer bei $x = 0$. In der Nähe der Singularität habe der Radius die Werte

$$r(x) = u_*(x) = (\sqrt{K} + o(1))\, x^{m/2}\,, \quad (x \downarrow 0)\,,$$

wobei $K > 0$ und m eine ungerade Zahl größer gleich 3 sei.
Angenent und Velázquez haben für jede Wahl von n, m und K Lösungen $\{\Gamma(t) \subset I\!R^{n+1} :\ t_0 \le t < T\}$ des MCF konstruiert, die zur Zeit T eine Typ 2 - Singularität ausbilden. Diese Lösungen haben die folgende geometrische Gestalt.
Außerhalb einer kleinen Umgebung des Ursprungs sehen die Lösungsflächen während des gesamten Verformungsprozesses so ähnlich aus wie die Hyperfläche Γ_* für die jeweiligen Werte von n, m und K. Je kürzer die Dauer zwischen dem Einsetzen der Verformung und dem Auftreten der Singularität ist, desto stärker bleibt die Ähnlichkeit im Laufe des Verformungsprozesses erhalten. Die Singularität der jeweiligen Grenzfläche $\Gamma(T)$ hat dieselbe geometrische Form wie die Singularität von Γ_* und liegt ebenfalls im Ursprung. Genauer gesagt, es existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine Lösung $\{\Gamma(t) :\ t_0(\varepsilon) \le t < T\}$ des MCF, für die

$$\mathrm{dist}(\Gamma(t), \Gamma_*) \le \varepsilon K + \sqrt{2n(t - t_0)}$$

ist und der Radius von $\Gamma(T)$ nahe des Ursprungs die Werte

$$u(x,T) = (\sqrt{K_\infty} + o(1))\, x^{m/2}\,, \quad (x \downarrow 0)\,,$$

annimmt, wobei K_∞ eine Konstante mit $|K_\infty - K| \leq \varepsilon K$ ist. Je kleiner ε ist, desto kürzer ist die Zeitspanne zwischen t_0 und T.
Um die Herausbildung der Singularität genauer zu verstehen, betrachteten Angenent und Velázquez die sich verformenden Hyperflächen nicht in ihrer normalen Größe, sondern vergrößerten sie mit zunehmender Annäherung an den Zeitpunkt, an dem die Singularität auftritt, immer stärker. Sie nahmen dabei verschiedene Vergrößerungen (Blow-ups) vor und gelangten dadurch zu folgenden Resultaten.
Macht man einen anisotropen Blow-up, bei welchem die x-Achse mit Faktor $(T-t)^{-1/m}$ und die anderen Koordinatenachsen mit Faktor $(T-t)^{-1/2}$ gestreckt werden, und bezeichnet die neuen x-Koordinaten als ξ-Koordinaten, dann konvergieren die vergrößerten Lösungsflächen für $t \to T$ gleichmäßig in kompakten ξ-Regionen gegen eine rotationssymmetrische Hyperfläche $\hat{\Gamma}(T)$, welche eine Radiusfunktion $\hat{u}(T) \in C([-\xi_{(K)}, \hat{b}])$ mit $\xi_{(K)} = (2(n-1)/K)$ und $\hat{b} > 0$ hat, die durch

$$\hat{u}(\xi) = \sqrt{2(n-1) + K\xi^m}$$

definiert ist. Anhand dieses Konvergenzverhaltens erkennt man, daß der "linke Endpunkt" der unvergrößerten Lösungsflächen zur Zeit t bei

$$a(t) = -(\xi_{(K)} + \varepsilon(t))(T-t)^{-1/m}$$

liegt, wobei $\varepsilon(t)$ für $t \to T$ gegen 0 geht.
Streckt man alle Koordinatenachsen des ursprünglichen Koordinatensystems mit Faktor $(T-t)^{-1/2}$ und bezeichnet die neuen x-Koordinaten als y-Koordinaten, dann konvergieren die vergrößerten Lösungsflächen für $t \to T$ gleichmäßig in kompakten y-Regionen gegen einen Zylinder mit Radius $\sqrt{2(n-1)}$. Aus diesem Phänomen erklärt sich im übrigen der Titel des Originaltextes. Eine genauere Untersuchung dieser Konvergenz liefert, daß die Radiusfunktion der unvergrößerten Lösungsflächen auf jedem Intervall der Ordnung $O((T-t)^{-1/2})$ durch

$$\begin{aligned} \frac{u(x(T-t)^{-1/2},t)}{(T-t)^{1/2}} &= \sqrt{2(n-1)} + \frac{K}{2\sqrt{2(n-1)}} Hm_m(x(T-t)^{-1/2})(T-t)^{m/2-1} \\ &\quad + o((T-t)^{m/2-1}) \qquad , \quad (t \uparrow T) \end{aligned}$$

abgeschätzt werden kann. Dabei ist Hm_m dasjenige Vielfache des m-ten Hermite-Polynoms, das den Leitkoeffizient 1 hat.
Schließlich lasse man bei jeder Lösung das ursprüngliche Koordinatensystem so in x-Richtung translatieren, daß der linke Endpunkt der unvergrößerten Lösungsfläche immer im Ursprung des Koordinatensystems liegt, und strecke gleichzeitig alle Koordinatenachsen mit dem Streckfaktor $(T-t)^{1/m-1}$. Dabei bezeichne man die neuen x-Koordinaten als p-Koordinaten und den in den neuen Koordinaten ausgedrückten Radius mit z. Dann existiert eine beschränkte p-Umgebung des Ursprungs, in der die vergrößerte Lösungsfläche für $t \to T$ gleichmäßig in kompakten z-Regionen gegen eine Hyperfläche konvergiert, die folgende Eigenschaften hat.
Die Hyperfläche sieht näherungsweise so aus wie ein Paraboloid. Sie hat ihren Scheitel im Ursprung liegen und öffnet sich in Richtung zunehmender z-Werte. Läßt man diese Hyperfläche mit konstanter Geschwindigkeit, deren Betrag mit dem Wert der

mittleren Krümmung im Scheitelpunkt übereinstimmen soll, entlang ihrer Rotationsachse translatieren, so erhält man eine Lösung des MCF. Lösungen dieser Art heißen auch translatierende Solitons.
Man kann zeigen, daß auch der Wert der mittleren Krümmung im linken Endpunkt der vergrößerten Lösungsfläche für $t \to T$ gegen den Wert der mittleren Krümmung im Scheitel des Solitons, welcher durch $H = \xi_{(K)}(1 + o(1))/m$ abgeschätzt werden kann, konvergiert. Somit gilt im linken Endpunkt der unvergrößerten Lösungsfläche die Abschätzung

$$H(t) = \left(\frac{1}{m} \left(\frac{2(n-1)}{K} \right)^{1/m} + o(1) \right) (T-t)^{-(1-1/m)} \quad (t \uparrow T) \enspace .$$

Infolgedessen bildet die Lösungsfläche eine Typ 2 - Singularität aus.
Angenent und Velázquez ließen sich für ihre Arbeit vor allem von folgenden Veröffentlichungen inspirieren. Ihre Konstruktionsmethode wurde von Techniken zur Untersuchung von Reaktions-Diffusionsgleichungen der Form

$$u_t = \Delta u + u^p \,, \quad x \in \Omega \subset I\!R^n \,, \quad 0 < t < T \,, \quad p > 1$$

beeinflußt, vgl. [GK1-3],[FK],[FG],[V1],[V2],[HV2] und insbesondere [HV1]. Bei Lösungen dieser Gleichungen können ebenfalls verschiedene Typen von Singularitäten auftreten. Die Erkenntnisse auf diesem Gebiet wurden bereits in [Hu3] und [AAG] zur Erforschung des MCF herangezogen. Die Existenz von Lösungen des MCF, welche die von Angenent und Velázquez gewünschten Eigenschaften besitzen, beweisen sie mit Hilfe eines topologischen Arguments. Die Verwendung topologischer Methoden zur Untersuchung von Singularitäten scheint zum erstenmal bei Bressan vorzukommen, vgl. [Bre].
Die vorliegende Arbeit folgt dem Gedankengang des Originaltextes und gliedert sich in drei Kapitel.
Das erste Kapitel zeichnet die Methode nach, mit der Angenent und Velázquez die singuläre Lösung des MCF konstruiert haben. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden verschiedene rotationssymmetrische Näherungslösungen des MCF konstruiert. Außerdem wird für jede dieser Näherungslösungen diejenige Längenskala angegeben, in der man erwarten kann, daß eine klassische Lösung des MCF gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen die jeweilige Näherungslösung konvergieren könnte. Die einzelnen Näherungslösungen werden dabei so konstruiert, daß es prinzipiell möglich ist, daß ein und dieselbe klassische Lösung gegen alle diese Näherungslösungen konvergiert. Gäbe es eine solche Lösung und würde außerdem der Wert der mittleren Krümmung am linken Endpunkt dieser Lösung gegen den Wert der mittleren Krümmung am linken Endpunkt von derjenigen Näherungslösung, die für die Umgebung des linken Endpunktes konstruiert worden ist, konvergieren, dann würde diese Lösung das anfangs beschriebene geometrische Verhalten zeigen. Insbesondere würde sie eine Typ 2 - Singularität ausbilden.
Um so eine Lösung konstruieren zu können, wird im zweiten Abschnitt des ersten Kapitels eine Reihe von Anfangsbedingungen formuliert, die gewährleisten sollen, daß die Startfläche ein ähnliches Aussehen wie die Näherungslösungen hat. Aus serdem wird eine a priori Schranke angegeben, von der man später erkennen wird, daß sie

ein entscheidender Garant für die Konvergenz von klassischen Lösungen des MCF gegen diese Näherungslösungen ist. Es wird nämlich im dritten Kapitel gezeigt werden können, daß jede maximale klassische Lösung des MCF, welche den eben erwähnten Anfangsbedingungen genügt und für die diese a priori Schranke gilt, gegen die Näherungslösungen konvergiert, wobei auch die mittlere Krümmung am linken Endpunkt der Lösungsfläche das gewünschte Verhalten zeigt.

Um die Existenz solcher Lösungen nachweisen zu können, wird im weiteren Verlauf dieses Abschnitts ein topologisches Lemma formuliert, welches deren Existenz unter bestimmten Bedingungen sicherstellt. Dieses Lemma wird erst im dritten Kapitel vollständig bewiesen werden können; die Erfüllbarkeit der Bedingungen, unter denen das Lemma die gewünschten Lösungen liefert, kann dagegen sofort gezeigt werden.

Faßt man die eben diskutierten Bedingungen zusammen, so erhält man das Haupttheorem von Angenent und Velázquez, dessen Inhalt wir anfangs beschrieben haben. Am Ende des ersten Kapitels wird dieses Theorem in einer formalen Fassung formuliert und dadurch einem Beweis zugänglich gemacht.

Im zweiten Kapitel wird eine Reihe von technischen Hilfsmitteln bereitgestellt, die für den Beweis des Haupttheorems benötigt werden. Es werden dabei einige a priori Abschätzungen hergeleitet sowie verschiedene Sub- und Superlösungen des MCF konstruiert. Mit diesen Hilfsmitteln soll das Änderungsverhalten von klassischen Lösungen des MCF, welche den obigen Anfangsbedingungen genügen, kontrolliert werden.

Im dritten Kapitel kann schließlich der Beweis des Haupttheorems geführt werden. Die Argumentation in diesem Beweis wird sich vor allem auf verschiedene Maximumprinzipien sowie einige innere Abschätzungen für den MCF von Ecker und Huisken, vgl. [EH], stützen. Da die Struktur des Beweises sehr vielschichtig ist, macht es an dieser Stelle noch wenig Sinn, auf weitere Details näher einzugehen.

In einem Anhang wird abschließend der Beweis einer Proposition über das asymptotische Verhalten des Solitons nachgetragen, welcher, wie auch im Originaltext, aus dem Haupttext ausgelagert worden ist, um den Gedankenfluß dort nicht zu unterbrechen.

Die Argumentation in der vorliegenden Arbeit setzt Grundkenntnisse über Differentialgeometrie und Partielle Differentialgleichungen voraus. An den Stellen, an denen weiterführende Konzepte, beispielsweise Schauderabschätzungen, oder Spezialwissen über den MCF benötigt werden, werden entsprechende Literaturhinweise gegeben.

Die Bedeutung der Arbeit von Angenent und Velázquez liegt darin, daß ein konkretes Beispiel für eine rotationssymmetrische Lösung des MCF, die eine Typ 2 - Singularität ausbildet, gefunden worden ist. Es stellt sich nun die Frage, ob jede Typ 2 - Singularität ein ähnliches Aussehen hat wie die Singularität von Angenent und Velázquez. Wie schon erwähnt wurde, vermuten Angenent und Velázquez, daß dies zumindest bei rotationssymmetrischen Hyperflächen der Fall ist. Ein Beweis steht jedoch bislang noch aus. Eine andere interessante Frage wäre, inwieweit man sämtliche Hyperflächen, deren Evolution unter dem MCF eine Typ 2 - Singularität hervorbringt, klassifizieren kann.

Da der MCF der Gradientenfluß des Volumenfunktionals für Hyperflächen ist, könnte man möglicherweise mit Hilfe des MCF neue Minimalflächen finden. Dabei müßte man allerdings verallgemeinerte Lösungsbegriffe für den MCF verwenden, mit deren Hilfe man klassische Lösungen über Singularitäten hinaus fortsetzen kann, vgl. [ES1-4], [CGG] und [Bra]. Um entscheiden zu können, ob eine solche Fortsetzung auch geometrisch sinnvoll ist, benötigt man unter anderem eine genaue Kenntnis des asymptotischen Verhaltens der auftretenden Singularitäten.

Ich danke Herrn Professor Dr. Gerhard Huisken für den Vorschlag dieses Themas, die sehr gute Betreuung und die hilfreichen mathematischen Diskussionen. Ich danke auch Herrn Professor Dr. Klaus Ecker für seine Informationen zur Arbeit von Angenent und Velázquez. Schließlich danke ich meinen Eltern, die mich während meines gesamten Studiums unterstützt haben.

Kapitel 1

Konstruktion von singulären Lösungen des MCF

1.1 Formale asymptotische Entwicklungen

Sei $\{\Gamma(t) \subset I\!R^{n+1} : t_0 \leq t < T\}$ eine glatte Einparameterfamilie rotationssymmetrischer Hyperflächen, die eine Lösung des MCF bildet, bei der zur Zeit T eine Singularität auftritt. Sei außerdem $u(t)$ die Radiusfunktion von $\Gamma(t)$ und sei $u(x,t) \neq 0$ für $x \in (a(t), b(t))$.

Wir wollen nun die Evolutionsgleichung für u aufstellen.

Seien $\bar{t} \in (t_0, T)$, $\bar{x} \in (a(\bar{t}), b(\bar{t}))$, $P = (\bar{x}, 0, ..., 0, u(\bar{x}, \bar{t}))$ und ν der äußere Normaleneinheitsvektor von $\Gamma(\bar{t})$ am Punkt P. Außerdem bezeichne $\{e_i\}_{i=0,...n}$ die kanonische Basis von $I\!R^{n+1}$ und $\langle .,. \rangle_{I\!R^{n+1}}$ das euklidische Skalarprodukt auf $I\!R^{n+1}$ mit der zugehörigen Norm $\|.\|_{I\!R^{n+1}}$.

Die Normalgeschwindigkeit V_N von $\Gamma(\bar{t})$ in P hat den Wert

$$V_N(P) = \langle u_t(\bar{x}, \bar{t})e_n \ , \ \nu \rangle_{I\!R^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x(\bar{x}, \bar{t})^2}} \, u_t(\bar{x}, \bar{t}) \ . \tag{1.1}$$

Wir berechnen jetzt die mittlere Krümmung von $\Gamma(\bar{t})$ im Punkt P. Dazu definieren wir die Kurven $\gamma_i := \Gamma(\bar{t}) \cap \{(\bar{x}, 0, ..., 0) + \text{span}\{e_i, e_n\}\}$ für $1 \leq i \leq n-1$ und $\gamma := \{(x, 0, ..., 0, u(x, \bar{t})) : x \in (a(\bar{t}), b(\bar{t}))\}$. Die mittlere Krümmung von $\Gamma(\bar{t})$ in P ist dann gleich der Summe der Normalkrümmungen k_N von γ_i $(i = 1, ..., n-1)$ und γ an diesem Punkt.

Sei $c : [a(\bar{t}), b(\bar{t})] \to \gamma$; $c(x) := (x, 0, ..., 0, u(x))$ eine Parametrisisierung der Kurve γ. Dann hat γ in P die Krümmung

$$\begin{aligned} k(\gamma)(P) &= \|c'(\bar{x})\|^{-3}_{I\!R^{n+1}} \sqrt{\|c'(\bar{x})\|^2_{I\!R^{n+1}} \, \|c''(\bar{x})\|^2_{I\!R^{n+1}} - \langle c'(\bar{x}), c''(\bar{x})\rangle^2_{I\!R^{n+1}}} \\ &= \frac{|u_{xx}(\bar{x},\bar{t})|}{(1+u_x(\bar{x},\bar{t})^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

und daher die Normalkrümmung

$$k_N(\gamma)(P) = -\left\langle(\mathrm{sign}(u_{xx}(\bar{x},\bar{t}))\, k(\gamma)(P))\,\nu\ ,\ \nu\right\rangle_{I\!R^{n+1}} = \frac{-u_{xx}(\bar{x},\bar{t})}{\left(1+u_x(\bar{x},\bar{t})^2\right)^{3/2}} \ .$$

Jede Kurve γ_i ist ein in der Hyperebene $\{(\bar{x},0,...,0)+\mathrm{span}\{e_i,e_n\}\}$ liegender Kreis um $(\bar{x},0,...,0)$ mit Radius $u(\bar{x},\bar{t})$ und hat deshalb in P die die Normalkrümmung

$$k_N(\gamma_i)(P) = -\left\langle \frac{1}{u(\bar{x},\bar{t})}\, e_n\ ,\ \nu\right\rangle_{I\!R^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x(\bar{x},\bar{t})^2}}\,\frac{1}{u(\bar{x},\bar{t})} \ .$$

Somit hat die mittlere Krümmung H von $\Gamma(\bar{t})$ im Punkt P den Wert

$$H(P) = -\frac{1}{\sqrt{1+u_x(\bar{x},\bar{t})^2}}\left(\frac{u_{xx}(\bar{x},\bar{t})}{1+u_x(\bar{x},\bar{t})^2} - \frac{n-1}{u(\bar{x},\bar{t})}\right) \ . \tag{1.2}$$

Aus (1.1) und (1.2) folgt nun, daß u die Evolutionsgleichung

$$u_t = \frac{u_{xx}}{1+u_x^2} - \frac{n-1}{u} \tag{1.3}$$

erfüllt.

Wir führen jetzt neue Längenskalen für die Orts- und Zeitvariablen und den Radius ein. Seien

$$\tau = \log\frac{1}{T-t}\ ,\quad y = \frac{x}{\sqrt{T-t}}$$

und sei die Funktion Φ definiert durch

$$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{T-t}}, \log\frac{1}{T-t}\right) = \frac{1}{\sqrt{T-t}}\,u(x,t) \ . \tag{1.4}$$

Dann löst Φ die Differentialgleichung

$$\Phi_\tau = \frac{\Phi_{yy}}{1+\Phi_y^2} - \frac{y}{2}\,\Phi_y + \frac{\Phi}{2} - \frac{n-1}{\Phi} \ . \tag{1.5}$$

Diese Gleichung hat die stationäre Lösung $\tilde{\Phi}(y,\tau) = \sqrt{2(n-1)}$. Daher definieren wir nun eine Funktion ψ durch

$$\psi(y,\tau) = \Phi(y,\tau) - \sqrt{2(n-1)} \ .$$

Dann ist ψ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\psi_\tau = \mathcal{A}\psi + f(\psi,\psi_y,\psi_{yy}) \ , \tag{1.6}$$

wobei

$$f(\psi,\psi_y,\psi_{yy}) = -\frac{\psi^2}{2(\sqrt{2(n-1)}+\psi)} - \frac{\psi_y^2}{1+\psi_y^2}\,\psi_{yy}$$

und

$$\mathcal{A}\psi = \psi_{yy} - \frac{y}{2}\,\psi_y + \psi$$

ist.

Der lineare Differentialoperator $\mathcal{A}$ wird ausführlich in [HV1] diskutiert. Wir listen nun diejenigen Eigenschaften von $\mathcal{A}$ auf, die wir im folgenden benötigen werden.

$\mathcal{A}$ ist ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H} \equiv L^2(I\!R; e^{-y^2/4}\,dy)$ mit dem Definitionsbereich $D(\mathcal{A}) \equiv \{v \in \mathcal{H} : y^2 v, yv', v'' \in \mathcal{H}\}$, wobei v' und v'' schwache Ableitungen sind. Sein Spektrum besteht aus der Folge von Eigenwerten

$$\lambda_k = 1 - \frac{k}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad ,$$

und die zugehörigen Eigenfunktionen sind die Hermitepolynome Hm_k.

Sei das Skalarprodukt in $\mathcal{H}$ mit $\langle.\,,.\rangle$ und die davon induzierte Norm mit $\|...\|$ bezeichnet. Außerdem normieren wir, abweichend von der üblichen Normierung, die Hermite-Polynome so, daß alle Leitkoeffizienten 1 sind. Dann gilt

$$\|Hm_k\| = (4\pi)^{-\frac{1}{4}}(k!)^{-\frac{1}{2}}2^{-\frac{k}{2}} \quad .$$

Vernachlässigen wir nun den nichtlinearen Term in (1.6). Dann folgt aus den Eigenschaften von $\mathcal{A}$, daß für jedes $m \geq 0$ und $C_m \in I\!R$ die Funktion

$$\tilde{\psi}(y,\tau) = C_m e^{(1-m/2)\tau} Hm_m(y) \tag{1.7}$$

eine Lösung der Linearisierung von (1.6) ist.

Von nun an sei m eine ungerade Zahl, die größer gleich 3 ist.

Für $y = o(e^{(1/2-1/m)\tau})$ und $\tau \to \infty$ sind die Funktion $\tilde{\psi}$ und ihre y-Ableitungen von der Ordnung o(1). Daher ist für diese (y,τ)-Werte $\mathcal{A}(\tilde{\psi}) \gg f(\tilde{\psi}, \tilde{\psi}_y, \tilde{\psi}_{yy})$. Aus diesem Grunde ist $\tilde{\psi}$ ein Kandidat für eine Funktion, gegen die eine exakte Lösung von (1.6) in der Region $y = o(e^{(1/2-1/m)\tau})$ für $\tau \to \infty$ konvergieren könnte.

Wir wollen auch für größere y-Werte Näherungslösungen von (1.6) finden, die Kandidaten für Grenzfunktionen sein könnten. Dazu führen wir die neue Raumvariable

$$\xi = ye^{-\gamma\tau} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{m}$$

ein und schreiben die Funktion Φ in (ξ,τ)-Koordinaten. Sei also

$$\phi(\xi,\tau) = \Phi(e^{\gamma\tau}\xi, \tau) \quad .$$

Dann löst die Funktion ϕ die Differentialgleichung

$$\phi_\tau(\xi,\tau) = \frac{\phi_{\xi\xi}}{e^{2\gamma\tau} + {\phi_\xi}^2} - \frac{\xi\phi_\xi}{m} + \frac{\phi}{2} - \frac{n-1}{\phi} \quad . \tag{1.8}$$

Nehmen wir an, es gäbe eine Lösung dieser Gleichung, für die die letzten drei Terme von (1.8) für $\tau \to \infty$ dominant werden. Dann liegt es nahe, als Näherungslösung eine Funktion zu verwenden, die die Differentialgleichung erfüllt, die aus (1.8) entsteht, wenn man den ersten Summanden der rechten Seite wegläßt. Mit elementaren Lösungsmethoden für Gewöhnliche Differentialgleichungen erhält man dann, daß für jedes $K \in I\!R$ die Funktion $\phi^{(0)}(K)$ mit

$$\phi^{(0)}(K;\xi) = \sqrt{2(n-1) + K\xi^m} \tag{1.9}$$

eine stationäre Lösung dieser Gleichung ist.

Da m ungerade ist, genügt es, die Lösungen $\phi^{(0)}(K)$ mit $K \geq 0$ zu betrachten. Denn jedes $\phi^{(0)}(K)$ mit $K < 0$ geht aus $\phi^{(0)}(-K)$ durch Spiegelung an der Ebene $x = 0$ hervor.

Für $\xi = O(1)$ erhalten wir durch Taylorentwicklung von $\phi^{(0)}(K)$ um $\xi = 0$ bis zum Summanden zweiter Ordnung den Ausdruck

$$\phi^{(0)}(K;\xi) = \sqrt{2(n-1)} + \frac{K}{2\sqrt{2(n-1)}}\,\xi^m + O(\xi^{2m}) \quad . \tag{1.10}$$

Somit sieht die Funktion $\phi^{(0)}(K)$ in der Region $\xi = o(1)$ ähnlich wie $\tilde{\psi}$ aus, wenn man $C_m = \frac{K}{2\sqrt{2(n-1)}}$ wählt.

Für $\xi \to +\infty$ gilt dagegen

$$\phi^{(0)}(K;\xi) = \sqrt{K}\,\xi^{\frac{m}{2}} + o(\xi^{\frac{m}{2}}) \quad . \tag{1.11}$$

Nehmen wir an, für große ξ und τ sei $\phi(\xi,\tau) \approx \phi^{(0)}(K;\xi)$. Dann erhalten wir, wenn wir (1.11) in (x,t)-Koordinaten schreiben, für die Radiusfunktion u die Entwicklung

$$u(x,t) = \sqrt{T-t}\,\phi(xe^{\frac{\tau}{m}},\tau) \approx \sqrt{K}\,x^{\frac{m}{2}} + o(x^{\frac{m}{2}})$$

für t nahe T und x nahe 0.

Sei daher Γ_* eine rotationssymmetrische Hyperfläche mit Radiusfunktion $u_* \in C^3(0,L)$, für die

$$u_*(x) = (\sqrt{K} + o(1))\,x^{\frac{m}{2}} \quad (x \downarrow 0)$$

gilt. Dann ist Γ_* ein Kandidat für eine Grenzfläche, gegen die eine Lösung des MCF konvergieren könnte, wenn die Anfangsfläche bereits Ähnlichkeiten mit Γ_* zeigt. In Abschnitt 1.2 werden wir dies präzisieren und eine Anfangsfläche konstruieren, von der wir zeigen können, daß sie gegen Γ_* konvergiert.

Untersuchen wir nun $\phi^{(0)}(K)$ in der Region $\xi \ll 0$. Die Funktion verschwindet an der Stelle

$$\xi = -\xi_{(K)} = -\left(\frac{2(n-1)}{K}\right)^{\frac{1}{m}} \quad , \tag{1.12}$$

und $\phi_\xi^{(0)}(K)$ strebt für $\xi \downarrow -\xi_{(K)}$ gegen $+\infty$.

Wir können diese Singularität umgehen, indem wir die Umkehrfunktion $w^{(0)}(K)$ von $\phi^{(0)}(K)$ betrachten und $w^{(0)}(K)$ für $\phi < 0$ durch $w^{(0)}(K; -\phi)$ fortsetzen. Dann ist $w_\phi^{(0)}(K; 0) = 0$ und für $\phi \in I\!R \backslash \{0, \pm\sqrt{2(n-1)}\}$ löst $w^{(0)}(K)$ die Differentialgleichung

$$\left(\frac{n-1}{\phi} - \frac{\phi}{2}\right) w_\phi(\phi) + \frac{w(\phi)}{m} = 0 \quad . \tag{1.13}$$

Da die Ableitung der Radiusfunktion einer glatten rotationssymmetrischen Hyperfläche ebenfalls gegen $+\infty$ strebt, wenn x gegen den linken Rand ihres Definitionsbereichs läuft, ist jede Radiusfunktion zumindest in der Nähe des linken Randes invertierbar. Sei daher $w(., \tau)$ die Inverse der Funktion $\phi(., \tau)$ einer Lösung des MCF. Dann kann man mit Hilfe der Kettenregel und der Umkehrregel aus der Gleichung (1.9) folgern, daß w an allen Stellen (ϕ, τ), an denen $w, w_\phi, w_{\phi\phi}$ und w_τ definiert sind, die Differentialgleichung

$$w_\tau(\phi, \tau) = \frac{w_{\phi\phi}(\phi, \tau)}{1 + e^{2\gamma\tau} w_\phi(\phi, \tau)^2} + \left(\frac{n-1}{\phi} - \frac{\phi}{2}\right) w_\phi(\phi, \tau) + \frac{w(\phi, \tau)}{m} \tag{1.14}$$

erfüllt.

Vergleichen wir nun w mit $w^{(0)}$. Für $\phi = o(1)$ gilt

$$\frac{w_{\phi\phi}^{(0)}(\phi, \tau)}{1 + e^{2\gamma\tau} w_\phi^{(0)}(\phi, \tau)^2} = \frac{\frac{\xi_{(K)}}{m(n-1)} + o(1)}{1 + \left[\left(\frac{\xi_{(K)}}{m(n-1)}\right)^2 + o(1)\right] \phi^2 e^{2\gamma\tau}} \quad . \tag{1.15}$$

Somit ist $w^{(0)}$ für $\phi = o(1)$ und große $z = \phi e^{\gamma\tau}$ eine Näherungslösung von (1.14). Diese Region reicht zwar mit zunehmender Zeit immer näher an den linken Endpunkt der Hyperfläche heran, enthält ihn aber nie. Da aber unser Vorhaben darin besteht, Lösungen des MCF zu konstruieren, die an dieser Stelle eine Typ 2 - Singularität ausbilden, sollten wir auch eine Näherungslösung für die Region $z = O(1)$ finden.

Dazu definieren wir die Funktionen W und F vermöge

$$W(z, \tau) = w(z e^{-\gamma\tau}, \tau) \tag{1.16}$$

und

$$W(z, \tau) = -\xi_{(K)} + e^{-2\gamma\tau} F(z, \tau) \quad . \tag{1.17}$$

Dann ist F eine Lösung der Differentialgleichung

$$e^{-2\gamma\tau} \left\{ F_\tau + \frac{1-m}{m} (F - z F_z) \right\} = \frac{F_{zz}}{1 + F_z^2} + \frac{n-1}{z} F_z - \frac{\xi_{(K)}}{m} \quad . \tag{1.18}$$

Nehmen wir wiederum an, daß für große τ die linke Seite dieser Gleichung vernachlässigbar klein wird, und setzen sie gleich 0. Die dadurch entstehende Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung

$$\tilde{F}(z, \tau) = \frac{m}{\xi_{(K)}} P\left(\frac{\xi_{(K)}}{m} z\right) + C(\tau) \quad , \tag{1.19}$$

wobei C eine beliebige C^1-Funktion und P die eindeutige Lösung von

$$\frac{P''(z)}{1+P'(z)^2} + \frac{n-1}{z} P'(z) = 1 \quad , \tag{1.20}$$

$$P'(0) = 0 \quad , P(0) = 0 \tag{1.21}$$

ist. Die eindeutige Existenz einer Lösung dieses Anfangswertproblems zeigt man mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes um $z = 0$. Außerdem erhält man damit, daß

$$P''(0) = \frac{1}{n} \tag{1.22}$$

ist. Darüber hinaus gilt folgende Proposition.

Proposition 1.1
P ist eine konvexe Funktion und zeigt für $z \to \infty$ das folgende asymptotische Verhalten:

$$P(z) = \frac{z^2}{2(n-1)} - \log z - \sum_{l=1}^{L-1} \frac{a_{2l+1}}{2l z^{2l}} + O\left(\frac{a_{2L+1}}{z^{2L}}\right) \quad (z \to \infty) \, , \tag{1.23}$$

$$P'(z) = \frac{z}{(n-1)} - \frac{1}{z} - \sum_{l=1}^{L-1} \frac{a_{2l+1}}{z^{2l+1}} + O\left(\frac{a_{2L+1}}{z^{2L+1}}\right) \quad (z \to \infty) \, , \tag{1.24}$$

$$P''(z) = \frac{1}{(n-1)} + \frac{1}{z^2} - \sum_{l=1}^{L-1} \frac{(2l+1)a_{2l+1}}{z^{2l+2}} + O\left(\frac{a_{2L+1}}{z^{2L+2}}\right) \quad (z \to \infty) \tag{1.25}$$

für $L = 1, 2, 3, ...$ und zugehörige Koeffizienten a_{2l+1}.

Der Beweis dieser Proposition wird in einem Anhang bereitgestellt.

Die Funktion P hat die folgende geometrische Interpretation. Sei $\mathcal{M}_t^{(1)}$ eine Familie rotationssymmetrischer Hyperflächen, die durch $x_0 = P(\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}) + t$ definiert sind. Dann ist $\mathcal{M}_t^{(1)}$ eine Lösung des MCF. Diese Lösung ist das höherdimensionale Analogon zum "Grim Reaper", einer eindimensionalen Lösung des MCF, die sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang der x_0-Achse bewegt. Sei außerdem $\mathcal{M}_t^{(c)}$ definiert durch $x_0 = c^{-1}P(c\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}) + ct$. Dann ist $\mathcal{M}_t^{(c)}$ ebenfalls eine Lösung des MCF. Die $\mathcal{M}_t^{(c)}$ heißen auch translatierende Solitone.

Sei nun die Funktion $\tilde{W}$ definiert durch

$$\tilde{W}(z,\tau) = -\xi_{(K)} + e^{-2\gamma\tau}\tilde{F}(z,\tau) \quad . \tag{1.26}$$

Dann ist $\tilde{W}$ nach Konstruktion eine Näherungslösung von (2.14).

Vergleichen wir $\tilde{W}$ mit $w^{(0)}$. Mit Hilfe einer Taylorentwicklung von $w^{(0)}$ um $\phi^2 = 0$ erhalten wir die Abschätzung

$$w^{(0)}(K;\phi) = -\xi_{(K)} + \frac{\xi_{(K)}}{2m(n-1)} z^2 e^{-2\gamma\tau} + o(e^{-2\gamma\tau} z^2)$$

für $\phi \to 0$. Setzen wir die Entwicklung (1.23) in die Definition von $\tilde{W}$ ein, so ergibt sich für große z der Ausdruck

$$\tilde{W}(z,\tau) = -\xi_{(K)} + \frac{\xi_{(K)}}{2m(n-1)}\, z^2 e^{-2\gamma\tau} + O(e^{-2\gamma\tau}\log z) + e^{-2\gamma\tau}C(\tau) \quad .$$

Daraus folgt, daß $\tilde{W}$ für große z - und große τ - Werte ähnlich wie $w^{(0)}$ aussieht, wenn man verlangt, daß die Funktion $\varepsilon(\tau) := e^{-2\gamma\tau}C(\tau)$ für $\tau \to \infty$ gegen 0 geht.

Zusammenfassend wollen wir noch einmal alle Näherungslösungen des MCF aus diesem Abschnitt auflisten und die zugehörigen Regionen angeben, in denen echte Lösungen des MCF, die wir im folgenden Abschnitt konstruieren werden, für $t \to T$ konvergieren sollen.

In der Region $x = o((T-t)^{1/m})$ haben wir eine "innere" Näherungslösung $\tilde{\Phi}$ mit

$$\tilde{\Phi}(y,\tau) = \sqrt{2(n-1)} + \frac{K}{2\sqrt{2(n-1)}} Hm_m(y) e^{-m\gamma\tau}$$

gefunden.

In der Region $x = O((T-t)^{1/m})$ ist eine "mittlere" Näherungslösung $\phi^{(0)}$ mit

$$\phi^{(0)}(\xi) = \sqrt{2(n-1) + K\xi^m}$$

gegeben.

In der Region $x \geq 0$ haben wir eine "äußere" Näherungslösung Γ_*, die bei $x = 0$ eine Singularität der Form

$$r = (\sqrt{K} + o(1))x^{m/2}$$

besitzt. Gegen diese Näherungslösung sollen die unskalierten Lösungsflächen für $t \to T$ konvergieren.

Am linken Endpunkt der Lösungsflächen verwenden wir in der Region $z = O(1)$, d.h. $r = O((T-t)^{1-1/m})$ die Näherungslösung $\bar{x}$ mit

$$\bar{x}(r) = -\{\xi_{(K)} + \varepsilon(t)\}\,(T-t)^{1/m} + (T-t)^{1-1/m}\,\frac{m}{\xi_{(K)}} P\left(\frac{\xi_{(K)}}{m}\,\frac{r}{(T-t)^{1-1/m}}\right) \quad ,$$

wobei $\varepsilon(t)$ nicht von r abhängt und für $t \to T$ gegen 0 konvergiert. Bei dieser Näherungslösung entspricht die Region $z = O(1)$ der Region $\xi = -\xi_{(K)} + O(e^{-2\gamma\tau})$, d.h. $x = -\xi_{(K)}(T-t)^{1/m} + O((T-t)^{1-1/m})$.

Mit einer Taylorentwicklung von $\bar{x}(r)$ um $r = 0$ bis zum Term 2. Ordnung erhält man die Abschätzung

$$\bar{x}(r) = -\{\xi_{(K)} + \varepsilon(t)\}\,(T-t)^{1/m} + \frac{\xi_{(K)}}{2mn}\, r^2\,(T-t)^{-(1-1/m)} + o(r^2) \quad (r \downarrow 0) \; .$$

Angenommen, wir würden eine Lösung des MCF finden, bei der der Wert der mittleren Krümmung im linken Endpunkt für $t \to T$ gegen den Wert der mittleren Krümmung im linken Endpunkt dieser Näherungslösung konvergiert und daher die Abschätzung

$$H(t) \;=\; n\,\frac{d^2}{dr^2}\,\bar{x}(r) \;+ o(1) \;=\; \left(\frac{\xi_{(K)}}{m} + o(1)\right)\,(T-t)^{-(1-1/m)} \quad (t \uparrow T) \tag{1.27}$$

erfüllt. Dann würde diese Lösungsfläche eine Typ 2 - Singularität ausbilden.

1.2 Existenzbedingungen für eine bestimmte Klasse von Lösungen des MCF

In diesem Abschnitt werden wir ein topologisches Argument präsentieren, daß uns die Existenz von Lösungen des MCF liefern wird, die den Näherungslösungen des ersten Abschnittes sehr ähnlich sind. In Kapitel 3 werden wir dann zeigen können, daß diese Lösungen für $t \to T$ gegen die Näherungslösungen konvergieren.

Um dieses topologische Argument formulieren zu können, führen wir zunächst geeignete metrische Räume ein. Seien $\mathcal{E}^u\,,\mathcal{E}^c$ und $\mathcal{E}^s$ die abgeschlossenen Unterräume von $\mathcal{H}$, die von $\{Hm_0,...,Hm_{m-1}\}\,,\{Hm_m\}$ bzw. $\{Hm_j\,:\,j>m\}$ aufgespannt werden, und seien $\pi^u\,,\pi^c$ und π^s die orthogonalen Projektionen auf diese Unterräume bezüglich des Skalarproduktes von $\mathcal{H}$.

Sei eine Funktion $\eta_0 \in C_C^\infty(I\!R)$ gegeben mit $\eta_0 \geq 0\,,\eta_0(s) \equiv 1$ für $s \leq 1$ und $\eta_0(s) \equiv 0$ für $s \geq 2$. Für jede zur Zeit $t \in (0,T)$ gegebene rotationssymmetrische Hyperfläche $\Gamma(t)$ mit der Radiusfunktion $u(x,t)\,,a(t) < x < b(t)$ seien

$$\Psi(y,\tau) = \eta(y,\tau)\psi(y,\tau)\,,$$

$$\Psi^u(y,\tau) = \pi^u(\eta(y,\tau)\psi(y,\tau))\,,$$
$$\Psi^c(y,\tau) = \pi^c(\eta(y,\tau)\psi(y,\tau))\,,$$
$$\Psi^s(y,\tau) = \pi^s(\eta(y,\tau)\psi(y,\tau))\,,$$

wobei

$$\eta(y,\tau) = \eta_0\left(\frac{ye^{-\gamma\tau}}{R}\right)$$

und $R > 0$ eine Konstante ist, die später präzisiert wird. Die Funktion ψ ist wie im vorigen Abschnitt definiert.

Sei nun $\mathcal{G}(t)$ die Menge aller rotationssymmetrischer C^3-Hyperflächen, für die der Definitionsbereich der Radiusfunktion $u(.,t)$ das Intervall

$$\left[-\frac{1}{2}\,\xi_{(K_0)}\,(T-t)^{1/m}\,,\,\frac{1}{2}\,\xi_{(K_0)}\,(T-t)^{1/m}\right]$$

enthält. Dann liegt offensichtlich für jede Hyperfläche aus $\mathcal{G}(t)$ die zugehörige Funktion $\Psi(.,\tau)$ in $\mathcal{H}$.

Sei außerdem $\mathcal{F}(t)$ die Menge aller Hyperflächen aus $\mathcal{G}(t)$, die die Ungleichung

$$||\Psi^u(\tau)|| \leq M_0 e^{-2\gamma\tau} \tag{1.28}$$

erfüllen. Dabei ist M_0 eine Konstante, die in Kapitel 3 festgelegt wird. $\mathcal{F}(t)$ ist bezüglich der von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{G}(t)$ induzierten Metrik abgeschlossen in $\mathcal{G}(t)$ und hat den Rand $\partial\mathcal{F}(t) = \{\Gamma(t) \in \mathcal{F}(t) : \, ||\Psi^u(\tau)|| = M_0 e^{-2\gamma\tau}\}$.

Wir geben nun eine Liste von Anfangswerten an, die die Lösungen des MCF, die wir konstruieren wollen, erfüllen sollen. Eine Hyperfläche $\Gamma(t_0) \in \mathcal{G}(t_0)$ gehöre genau dann zu $\mathcal{S}(t_0)$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\Gamma(t_0) \subset \mathcal{N}_{\delta_*}(\Gamma_*) := \{\vec{x} \in I\!R^{n+1} : \mathrm{dist}(\vec{x}, \Gamma_*) < \delta_*\} \ , \tag{1.29}$$

$$\sum_{j=0}^{3} \left| \frac{\partial^j \psi}{\partial y^j}(y, \tau_0) \right| \leq M_1 (1 + |y|)^m e^{-m\gamma\tau_0} \quad \text{für } |y| \leq 3Re^{\gamma\tau_0} \ , \tag{1.30}$$

$$e^{m\gamma\tau_0} ||\Psi^s(\tau_0)|| \leq \delta \ , \tag{1.31}$$

$$e^{m\gamma\tau_0} \Psi^c(\tau_0) = \frac{KHm_m}{2\sqrt{2(n-1)}} \quad \text{mit } |K - K_0| \leq \frac{\delta}{2} \quad , \tag{1.32}$$

$$\phi^{(0)}(K_0 - \delta; \xi) \leq \phi(\xi, \tau_0) \leq \phi^{(0)}(K_0 + \delta; \xi) \quad \text{für } \frac{1}{2} R_2 e^{-\gamma\tau} \leq \xi \leq Re^{\tau_0/m} \quad , \tag{1.33}$$

$$\phi^{(0)}(K_0 + \delta; \xi) \leq \phi(\xi, \tau_0) \leq \phi^{(0)}(K_0 - \delta; \xi) \quad \text{für } \xi \leq -\frac{1}{2} R_2 e^{-\gamma\tau} \quad , \tag{1.34}$$

$$\Phi_y(y, \tau_0) > 0 \quad \text{für } y \leq -\frac{1}{2} R_2 \, , \ \frac{1}{2} R_2 \leq y \leq Re^{\tau_0/2} \quad , \tag{1.35}$$

$$\Phi_{yy}(y, \tau_0) < 0 \quad \text{für } y \leq -\frac{1}{2} R_2 \quad . \tag{1.36}$$

$\mathcal{S}(t_0)$ hängt dabei von den Parametern $K_0, t_0, \delta, \delta_*, R, R_2$ und M_1 ab. Die Hyperfläche Γ_* sowie die Größen $\tau_0, \Phi, \phi, \psi, y$ und ξ sind wie in Abschnitt 1.1 definiert.

Diese Parameter werden später so festgelegt werden, daß eine Lösung des MCF, die den obigen Anfangsbedingungen genügt, eine ganze Reihe von Abschätzungen erfüllt. Mit deren Hilfe wird man dann zeigen können, daß einige dieser Lösungen das gewünschte asymptotische Verhalten zeigen. Diese Abschätzungen sind so beschaffen, daß jeder dieser Parameter entweder einen bestimmten Wert unterschreiten oder einen bestimmten Wert überschreiten muß, damit die Abschätzungen erfüllt sind. Im ersten Fall sagen wir, der Parameter müsse hinreichend klein gewählt werden, im zweiten Fall sagen wir, der Parameter müsse hinreichend groß gewählt werden. An geeigneter Stelle wird ein Algorithmus zur Bestimmung der Größenordnung dieser Parameter angegeben werden.

Der Parameter R mißt die Größe der Region, in der die Startfläche ähnlich wie die innere Näherungslösung aussehen soll, und begrenzt die Region, in der die Startfläche ähnlich wie die mittlere Näherungslösung aussehen soll, nach rechts außen. Dieser

Parameter soll hinreichend klein sein.

Der Parameter R_2 begrenzt die Region, in der die mittlere Näherungslösung die adäquate ist, nach innen. Er soll hinreichend groß sein.

Der Parameter δ mißt die Abweichung der Startfläche der mittleren Näherungslösung und soll hinreichend klein sein.

Der Parameter δ_* ist ein Maß für die Ähnlichkeit der Startfläche mit der äußeren Näherungslösung und soll hinreichend klein sein.

Der Anfangszeitpunkt τ_0 wird schließlich in Abhängigkeit von allen anderen Parametern hinreichend groß gewählt.

Wir wollen nun das folgende Lemma formulieren.

Lemma 1.2 (Exit-Lemma)
Sei $K_0 > 0$ vorgegeben. Dann existieren $M_0, M_1, \delta, \delta_*, R, R_2$ und τ_0, so daß folgendes gilt.

(a) Für jede maximale klassische Lösung $\{\Gamma(t) : t_0 \leq t < t_1\}$ des MCF mit $\Gamma(t_0) \in \mathcal{S}(t_0) \cap \mathcal{F}(t_0)$ existiert entweder ein $t_2 \in [t_0, t_1]$, so daß $\Gamma(t_2) \in \partial\mathcal{F}(t_2)$ ist, oder es gilt $t_2 = T$ und $\Gamma(t)$ liegt für alle $t \in [t_0, T)$ in $\mathcal{F}(t)$.

(b) Wenn $\Gamma(t_2) \in \partial\mathcal{F}(t_2)$ und $\Gamma(t) \in \mathcal{F}(t)$ für alle $t \in [t_0, t_2]$ ist, dann gilt

$$\frac{d}{d\tau}\left(e^{2m\gamma\tau}||\Psi^u(\tau)||\right)_{t=t_2} > 0 \quad . \tag{1.37}$$

Den Beweis dieses Lemmas werden wir erst in Kapitel 3 führen können. Wir skizzieren aber schon einmal die Grundkonzeption des Beweises.

Für jede klassische Lösung $\{\Gamma(t) : t_0 \leq t < t_1\}$ des MCF mit $\Gamma(\tau_0) \in \mathcal{S}(t_0)$ existieren nach der Anfangsbedingung (1.30) aus Stetigkeitsgründen ein $M > M_1$ und ein $\tau' > \tau_0$, so daß die Ungleichung

$$|\psi(y,\tau)| + |\psi_y(y,\tau)| + |\psi_{yy}(y,\tau)| \leq Me^{-m\gamma\tau}(1+|y|)^m \tag{1.38}$$

für $|y| \leq 2Re^{\gamma\tau}$ und $\tau_0 \leq \tau \leq \tau'$ gilt. Wir werden zeigen, daß man diese Aussage folgendermaßen verschärfen kann. Für jedes $K_0 > 0$ lassen sich $M_0, M_1, \delta, \delta_*, R, R_2, \tau_0$ und M so festlegen, daß jede maximale klassische Lösung $\{\Gamma(t) : t_0 \leq t < t_1\}$ des MCF mit $\Gamma(\tau_0) \in \mathcal{S}(t_0)$, für die $\Gamma(t)$ für alle $\tau \in [\tau_0, \tau_1)$ in $\mathcal{F}(t)$ bleibt, die obige Ungleichung für $|y| \leq 2Re^{\gamma\tau}$ und alle $\tau \in [\tau_0, \tau_1)$ erfüllt.

Mit Hilfe dieser zusätzlichen Eigenschaft von $\{\Gamma(t)\}$ können wir dann nachweisen, daß $\sup_{\Gamma}(t)|A|^2$ genau dann für $t \to t_1$ gegen ∞ geht, wenn $t_1 = T$ ist. Da nach [EH] und [Ha2] eine maximale klassische Lösung des MCF so lange existiert, wie ihre 2. Fundamentalform beschränkt bleibt, muß somit $t_1 = T$ sein.

Haben wir dagegen eine klassische Lösung des MCF mit $\Gamma(\tau_0) \in \mathcal{S}(t_0) \cap \mathcal{F}(t_0)$, die irgendwann nicht mehr in $\mathcal{F}(t)$ liegt, dann gibt es aus Stetigkeitsgründen einen Zeitpunkt $t_2 < T$, zu dem $\Gamma(t) \in \partial\mathcal{F}(t)$ ist. Damit wäre dann der Teil (a) des Exit-Lemmas gezeigt.

Zum Nachweis von Teil (b) werden wir eine Differentialungleichung für Ψ^u aufstellen, aus der wir schließen können, daß $\Gamma(t)$ den Rand $\partial\mathcal{F}(t)$ mit positiver Geschwindigkeit kreuzen muß.

Um dies alles durchführen zu können, benötigen wir die technischen Hilfsmittel, die wir im folgenden Kapitel bereitstellen werden.

Wir sind nun in der Lage, ein topologisches Argument zu formulieren, das die Existenz von Lösungen des MCF liefern wird, die bis zum Auftreten einer Singularität in $\mathcal{F}(t)$ bleiben.

Sei B^m die Einheitskugel und S^{m-1} die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^m$. Wir definieren eine Abbildung $\alpha_t : \mathcal{F}(t)^c \to S^{m-1}$ durch

$$\alpha_t(\Gamma) = \frac{\Psi^u(\tau)}{||\Psi^u(\tau)||} \quad ,$$

wobei $\mathcal{F}(t)^c = \mathcal{G}(t) \setminus \mathcal{F}(t)$ ist und S^{m-1} mit der Einheitssphäre in $\mathcal{E}^u$ identifiziert wird. Dann gilt:

Lemma 1.3 (Shooting-Lemma)
Sei $\{\Gamma_\lambda : \lambda \in B^m\}$ eine Familie rotationssymmetrischer C^3-Hyperflächen, welche stetig von λ abhängen. Außerdem seien $\Gamma_\lambda \in \mathcal{S}(t_0)$ für alle $\lambda \in B^m$ und $\Gamma_\lambda \in \mathcal{F}(t_0)^c$ für alle $\lambda \in \partial B^m = S^{m-1}$, wobei K_0 eine beliebige positive Konstante ist und M_0, M_1, δ, R, R_2 und τ_0 wie im Exit-Lemma sind.

Hat unter diesen Voraussetzungen die Abbildung

$$\alpha : \lambda \in \partial B^m \to \alpha_{t_0}(\Gamma_\lambda) \in S^{m-1}$$

nicht den Abbildungsgrad 0, dann gibt es ein $\lambda_0 \in B^m$, so daß die maximale Lösung des MCF mit dem Anfangswert $\Gamma(t_0) = \Gamma_{\lambda_0}$ auf ganz $[t_0, T)$ existiert und für alle $t \in [t_0, T)$ in $\mathcal{F}(t)$ liegt.

Beweis :
Für jedes $\lambda \in B^m$ sei $\{\Gamma_\lambda(t) : t_0 \leq t < t_1(\lambda)\}$ die maximale Lösung des MCF mit dem Anfangswert $\Gamma_\lambda(t_0) = \Gamma_\lambda$. Nehmen wir an, daß keine dieser Lösungen in $\mathcal{F}(t)$ bleibt. Dann existiert nach Teil (a) des Exit-Lemmas ein $t_{exit}(\lambda)$ mit $t_{exit}(\lambda) = \inf_{t \in [t_0, T)} \{\Gamma_\lambda(t) \in \partial\mathcal{F}(t)\}$. Nach Teil (b) des Exit-Lemmas liegt dann $\Gamma_\lambda(t)$ für $t \in [t_0, t_{exit}(\lambda))$ im Inneren von $\mathcal{F}(t)$ und für $t \in (t_{exit}(\lambda), t_{exit}(\lambda) + o(1))$ im Inneren von $\mathcal{F}(t)^c$.

Da die Lösungen des MCF stetig von den Anfangswerten abhängen, folgt daraus mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, daß $t_{exit}(\lambda)$ stetig von λ abhängt und wir die Abbildung α vermöge

$$\alpha_{exit}(\lambda) = \alpha_{t_{exit}(\lambda)} \left(\Gamma_\lambda \left(t_{exit}(\lambda)\right)\right)$$

zu einer stetigen Abbildung α_{exit} von B^m nach S^{m-1} fortsetzen können. Das bedeutet aber, daß α den Abbildungsgrad 0 haben müßte. □

Wir werden nun durch ein geeignetes Zusammenkleben der Näherungslösungen aus Abschnitt 1.1 eine Familie von Hyperflächen konstruieren, die die Hypothesen des Shooting-Lemmas erfüllt.

Sei u* $\in C^3\left(-(\xi_{(K_0)}\,(T-t_0)^{1/m})\,,\, L\right)$ mit

$$u^*(x) = \begin{cases} \sqrt{2(n-1)(T-t_o) + K_o x^m} & : \quad x < 0 \\ \\ \sqrt{2(n-1)(T-t_o) + K_o x^m}\;\eta_o(\frac{x}{R}) + u_*(x)\{1 - \eta_o(\frac{x}{R})\} & : \quad x \geq 0 \end{cases} \quad ,$$

wobei u_* die Radiusfunktion von Γ_* ist. Außerdem sei eine Funktion $u(\lambda)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} u(\lambda)(x) \quad = \quad \sqrt{T-t_o} \quad & \{\sqrt{2(n-1)} + \sum_{j=0}^{m-1} 2M_0 e^{-2m\gamma\tau_o} \|Hm_j\|^{-2} \lambda_j Hm_j(y) \\ & + \tfrac{K_o}{2\sqrt{2(n-1)}} Hm_m(y) e^{-m\gamma\tau_o}\} \end{aligned} \quad .$$

Wir definieren nun für jedes $\lambda \in B^m$ eine rotationssymmetrische Hyperfläche Γ_λ durch die Radiusfunktion

$$r_\lambda = u_\lambda(x) := u^*(x)\{1 - \eta_o(\xi/5R)\} + u(\lambda)(x)\,\eta_o(\xi/5R) \quad .$$

Dann gilt:

Satz 1.4
$\{\Gamma_\lambda : \lambda \in B^m\}$ erfüllt die Hypothesen des Shooting-Lemmas, wenn man R und R_2 genügend klein und M_1 und τ_0 genügend groß wählt.

Beweis :
Die Funktion u_λ ist so konstruiert, daß Γ_λ stetig von λ abhängt und α die identische Abbildung auf S^{m-1} ist und daher nicht den Abbildungsgrad 0 haben kann.

Vergleicht man Γ_λ mit Γ_*, dann sieht man anhand der Definitionen von u_λ und u_*, daß man bei vorgegebenem δ_* das Zeitintervall $T - t_0$ und den Parameter R in Abhängigkeit von δ_* so klein wählen kann, daß für alle Γ_λ die Hypothese (1.29) gilt.

Schätzen wir nun die Größenordnung der Funktion ψ_λ und ihrer Ableitungen in der Region $|\,y\,| \leq 3Re^{\gamma\tau_o}$ ab. Es gilt

$$\sum_{i=0}^{3} \left|\frac{\partial^i \psi_\lambda}{\partial y^i}(y,\tau_o)\right| = \sum_{i=0}^{3} \left|\frac{\partial^i \psi(\lambda)}{\partial y^i}(y)\right| \leq Ce^{-m\gamma\tau_0} \sum_{j=0}^{m} |Hm_j(y)| \leq M_1(1+|y|)^m e^{-m\gamma\tau_0}$$

für hinreichend großes M_1. Somit erfüllt jede Fläche Γ_λ die Hypothese (1.30).

Untersuchen wir jetzt die Größe der einzelnen Hermite-Komponenten von Ψ_λ. Dazu benutzen wir die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
|\langle Hm_j, \Psi_\lambda\rangle - \langle Hm_j, \psi(\lambda)\rangle| &= |\int_{I\!R} Hm_j(y)\{1-\eta_o(\tfrac{ye^{-\gamma\tau_o}}{R})\}\psi(\lambda)(y)e^{-\frac{y^2}{4}}\,dy| \\
&\leq \|Hm_j\|\left(\int_{|y|\geq Re^{\gamma\tau_o}} |\psi(\lambda)(y)|^2 e^{-\frac{y^2}{4}}\,dy\right)^{1/2} \\
&\leq \|Hm_j\|\left(\int_{|y|\geq Re^{\gamma\tau_o}} \tilde{C}|y|^{2m} e^{-\frac{y^2}{8}} e^{-\frac{1}{8}R^2e^{2\gamma\tau_o}}\,dy\right)^{1/2} \\
&\leq C\|Hm_j\|e^{-\frac{1}{16}R^2e^{2\gamma\tau_o}} \quad ,
\end{aligned}
$$

wobei C unabhängig von j ist. Aus dieser Abschätzung folgt, daß

$$
\begin{aligned}
e^{m\gamma\tau_o}\,\|\Psi^s_\lambda(\tau_o)\| &= e^{m\gamma\tau_o}\left(\sum_{j=m+1}^{\infty} |\langle Hm_j, \Psi_\lambda\rangle|^2\right)^{1/2} \\
&\leq Ce^{m\gamma\tau_o-\frac{1}{16}R^2e^{2\gamma\tau_o}}\left(\sum_{j=m+1}^{\infty}\|Hm_j\|^2\right)^{1/2} \\
&\leq Ce^{m\gamma\tau_o-\frac{1}{16}R^2e^{2\gamma\tau_o}}\left(\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi}2^j(j!)}\right)^{1/2} \\
&\leq \delta
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
e^{m\gamma\tau_o}\Psi^c_\lambda(\tau_o) &= \|Hm_j\|^{-2}\langle Hm_m, \Psi_\lambda\rangle e^{m\gamma\tau_o}Hm_m \\
&= \left(\frac{K_o}{2\sqrt{2(n-1)}} + O(e^{m\gamma\tau_o-\frac{1}{16}R^2e^{2\gamma\tau_o}})\right)Hm_m \\
&= \frac{K}{2\sqrt{2(n-1)}}Hm_m
\end{aligned}
$$

gilt, wobei $|K-K_o|\leq\delta/2$ ist, wenn man τ_0 in Abhängigkeit von allen anderen Parametern genügend groß wählt. Also sind die Hypothesen (1.31) und (1.32) erfüllt. Außerdem erhalten wir die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\|\Psi^u_\lambda(\tau_o)\| &= \left(\sum_{j=o}^{m-1} 2M_o^2e^{-4m\gamma\tau_o}\lambda_j^2 + O(e^{-\frac{1}{16}R^2e^{2\gamma\tau_o}})\right)^{1/2} \\
&= \left(2M_o^2e^{-4m\gamma\tau_o}|\lambda|^2 + O(e^{-\frac{1}{16}R^2e^{2\gamma\tau_o}})\right)^{1/2} \quad .
\end{aligned} \tag{1.39}
$$

Infolgedessen gilt für $\lambda\in S^{m-1}$ und hinreichend großes τ_0 die Ungleichung

$$
\|\Psi^u_\lambda(\tau_o)\| > M_oe^{-2m\gamma\tau_o} \quad . \tag{1.40}
$$

Damit liegt Γ_λ für alle $\lambda \in S^{m-1}$ in $\mathcal{F}(t_o)^c$.

Vergleichen wir nun ϕ_λ mit $\phi^{(0)}(K_0)$. Es gilt

$$|2M_o e^{-2m\gamma\tau_o}\lambda_j Hm_j(y)| \leq C_j e^{(j-2m)\gamma\tau_o}|\xi|^j \leq C_j e^{-(m+1)\gamma\tau_o}|\xi|^m$$

für alle $j \leq m-1$ und $|y| \geq \frac{1}{2}R_2$. Infolgedessen ist

$$\phi(\lambda)(\xi) = \sqrt{2(n-1)} + \frac{K_o}{2\sqrt{2(n-1)}}(1+O(e^{-\gamma\tau_o}))\xi^m$$

für $|\xi| \geq \frac{1}{2}R_2 e^{-\gamma\tau_0}$. Nach Konstruktion von ϕ^* gilt außerdem

$$\phi^*(\xi) = \phi^{(0)}(K_0;\xi)$$

für $|\xi| \leq Re^{\frac{\tau_o}{m}}$. Wählt man nun R genügend klein und τ_0 genügend groß, dann implizieren die beiden letzten Aussagen die Hypothesen (1.33) und (1.34).

Es bleibt jetzt nur noch zu zeigen, daß $\frac{\partial}{\partial y}\Phi_\lambda$ und $\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi_\lambda$ die gewünschten Eigenschaften haben. Dazu beachten wir, daß für $|y| \geq \frac{1}{2}R_2$ die Abschätzungen

$$Hm_m'(y) = (1-O(R_2^{-1}))my^{m-1} \quad ,$$

$$\forall 0 \leq j \leq m-1 : |Hm_j'(y)| \leq Cy^{j-1} \leq \frac{C}{R_2^{m-j}}y^{m-1}$$

gelten. Daraus folgt dann

$$\frac{\partial\Phi_\lambda}{\partial y}(y) = \frac{K_o m}{2\sqrt{2(n-1)}}(1+o(1))y^{m-1}e^{-m\gamma\tau_o} \quad ,$$

sofern R_2 und τ_0 hinreichend groß sind. Mit Hilfe von Taylorentwicklungen von ϕ^* und $\frac{\partial\phi^*}{\partial y}$ erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\Phi_\lambda(y,\tau_o) &= \frac{\partial\phi(\lambda)}{\partial y}(y)\eta_o(\tfrac{ye^{-\gamma\tau_o}}{5R}) + \frac{\partial\phi^*}{\partial y}(y)\{1-\eta_o(\tfrac{ye^{-\gamma\tau_o}}{5R})\} + \\
&\quad \tfrac{e^{-\gamma\tau_o}}{5R}\eta_o'(\tfrac{ye^{-\gamma\tau_o}}{5R})\{\phi(\lambda)(y)-\phi^*(y)\} \\
&= \tfrac{K_o m}{2\sqrt{2(n-1)}}(1+o(1))y^{m-1}e^{-m\gamma\tau_o} + \tfrac{1}{5R}\eta_o'(\tfrac{ye^{-\gamma\tau_o}}{5Re^{\gamma\tau_o}})o(1)y^m e^{-m\gamma\tau_o} \\
&\geq \tfrac{K_o m}{2\sqrt{2(n-1)}}(1-o(1))y^{m-1}e^{-m\gamma\tau_o} - \eta_o'(\tfrac{ye^{-\gamma\tau_o}}{5R})o(1)y^{m-1}e^{-m\gamma\tau_o} \\
&> 0
\end{aligned}$$

für alle $|y| \in [\frac{1}{2}R_2, 10Re^{\gamma\tau_0}]$, wenn wir R entsprechend klein und τ_0 entsprechend groß wählen. Da für $|y| \leq Re^{\frac{\tau_0}{2}}$ auch $\frac{\partial\phi^*}{\partial y}(y) > 0$ ist, folgt die Hypothese (1.35).

Die Konvexität von Γ_λ, also die Gültigkeit der Hypothese (1.36), zeigt man schließlich durch analoge Argumentation wie beim Nachweis der Hypothese (1.35). □

Die Abschätzung (1.39) hat noch folgende weitere Konsequenz. Sei τ_0 so groß, daß (1.40) erfüllt ist. Dann gilt auch $\|\Psi_0^u(\tau_0)\| < M_0 e^{-2m\gamma\tau_0}$ und somit liegt Γ_0 in $\mathcal{F}(t_0)$. Da aufgrund der Kurzzeitexistenz des MCF zu jeder glatten Hyperfläche eine klassische Lösung des MCF existiert, die diese Fläche als Anfangsfläche besitzt, ist damit die Existenz von klassischen Lösungen des MCF mit $\Gamma(t_0) \in \mathcal{S}(t_0) \cup \mathcal{F}(t_0)$ gezeigt. Dieses Resultat werden wir beim Beweis des Exit-Lemmas benutzen. Das Shooting-Lemma dürfen wir ja für diesen Beweis nicht verwenden, da es auf dem Exit-Lemma aufbaut.

Aus dem Satz 1.4 und dem Shooting-Lemma folgt die Existenz von klassischen Lösungen $\{\Gamma(t) : t_0 \leq t < T\}$ des MCF mit $\Gamma(t_0) \in \mathcal{S}(t_0)$ und $\Gamma(t) \in \mathcal{F}(t)$ für alle $t \in [t_0, T)$, wenn bei vorgegebenem K_0 die Konstanten $M_0, M_1, \delta, \delta_*, R, R_2$ und τ_0 entsprechend gewählt sind. In Kapitel 3 werden wir dann Mittel zur Verfügung haben, mit denen wir zeigen können, daß diese Lösungen für $t \to T$ gegen die Näherungslösungen aus Abschnitt 1.1 konvergieren und daher eine Typ 2 - Singularität ausbilden. Alles in allem werden wir das folgende Theorem beweisen, welches das Haupttheorem der Arbeit von Angenent und Velázquez darstellt.

Theorem 1.5
Es existiert eine maximale klassische Lösung $\{\Gamma(t) : t_0 \leq t < T\}$ des MCF, für die $\Gamma(t_0) \in \mathcal{S}(t_0)$ und $\Gamma(t) \in \mathcal{F}(t)$ für alle $t \in [t_0, T)$ gilt, wobei K_0 eine beliebige positive Konstante ist und M_0, M_1, δ, R, R_2 und τ_0 wie im Exit-Lemma sind. Des weiteren gibt es ein K_∞ mit

$$|K_\infty - K_0| \leq 2\delta \quad , \tag{1.41}$$

so daß folgende Konvergenzaussagen gelten:

$$\lim_{\tau\to\infty} \phi(\xi, \tau) = \phi^{(0)}(K_\infty; \xi) \quad , \tag{1.42}$$

$$\Phi(y, \tau) = \sqrt{2(n-1)} + \frac{K_\infty}{2\sqrt{2(n-1)}}\, e^{-m\gamma\tau}\, Hm_m(y) + o(e^{-m\gamma\tau}) \quad (\tau \to \infty) \quad , \tag{1.43}$$

$$w(e^{-\gamma\tau} z, \tau) = w(0, \tau) + e^{-2\gamma\tau}\, \frac{m}{\xi_{(K_\infty)}}\, P\left(\frac{\xi_{(K_\infty)}}{m} z\right) \quad (\tau \to \infty) \quad . \tag{1.44}$$

Die Konvergenz erfolgt dabei jeweils gleichmäßig auf kompakten ξ, y bzw. z- Intervallen. Außerdem hat die Grenzfläche $\Gamma(T)$ eine Radiusfunktion $r = u(x, T)$ mit

$$u(x, T) = \left(\sqrt{K_\infty} + o(1)\right) x^{\frac{m}{2}} \quad (x \downarrow 0) \quad . \tag{1.45}$$

Schließlich gilt

$$|A|(t) \;=\; \left(\frac{1}{m}\left(\frac{2(n-1)}{K_\infty}\right)^{1/m} \;+\; o(1)\right) (T-t)^{1/m-1} \quad (t \uparrow T) \quad . \tag{1.46}$$

Die Lösung $\{\Gamma(t)\}$ bildet somit eine Typ 2 - Singularität aus.

Durch einen einfachen Skalierungstrick erhält man weitere klassische Lösungen des MCF, die das Konvergenzverhalten aus Theorem 1.5 besitzen, wobei aber der Wert von K_∞ genauer bekannt ist. Für jede Lösung $\{\Gamma(t)\}$, die das Theorem 1.5 erfüllt, sind nämlich $\{\Gamma_{(\lambda)}(t)\}$ mit $\Gamma_{(\lambda)}(t) = \lambda^{-1}\Gamma(T - \lambda^2(T-t))$ für $\lambda \in (0,1)$ Lösungen des MCF, welche die Gleichungen (3.12)-(3.15) erfüllen, wenn man jeweils K_0 durch $\lambda^{m-2}K_0$ und K_∞ durch $\lambda^{m-2}K_\infty$ ersetzt. Diese Lösungen existieren zwar nur für einen kürzeren Zeitraum als $\{\Gamma(t)\}$, dafür kann aber ihr asymptotisches Verhalten präziser vorhergesagt werden, da in diesen Fällen $|K_\infty - K_0| \le 2\lambda^{m-2}\delta$ ist.

Kapitel 2

Technische Hilfsmittel

Wir wollen in diesem Kapitel einige a priori Abschätzungen bereitstellen sowie verschiedene Sub- und Superlösungen des MCF konstruieren. Diese Hilfsmittel werden wir für die Beweise des Exit-Lemmas und des Theorems 1.5 benötigen.

2.1 Einige a priori Abschätzungen

Wenden wir uns zunächst den a priori Abschätzungen zu. Sei den ganzen Abschnitt über $\{\Gamma(t) : t_0 \leq t < t_1\}$ eine Lösung des MCF mit $\Gamma(t_0) \in \mathcal{S}(t_0)$ und $\Gamma(t) \in \mathcal{F}(t)$ für $t \in [t_0, t_1)$. Außerdem gelte

$$|\psi(y,\tau)| + |\psi_y(y,\tau)| + |\psi_{yy}(y,\tau)| \leq Me^{-m\gamma\tau}(1+|y|)^m$$

für $|y| \leq 2Re^{\gamma\tau}, \tau_0 \leq \tau < \tau_1$ und eine Konstante $M > M_1$.

Wir untersuchen nun als erstes die Evolution von $\Psi^{u,c,s}$. Dazu beweisen wir das folgende Lemma.

Lemma 2.1
Seien $M \geq 1$ und $\| \Psi^{u,c,s}(.,\tau) \| > 0$ für $\tau_0 \leq \tau < \tau_1$. Außerdem seien τ_0 so groß und R so klein, daß $Me^{-\gamma\tau_0} \leq 1$ sowie $|\psi(y,\tau)| \leq \frac{3}{4}\sqrt{2(n-1)}$ für $|y| \leq 2Re^{\gamma\tau}$ und $\tau_0 \leq \tau < \tau_1$ ist. Dann gelten die Differentialungleichungen

$$\frac{d}{d\tau} \| e^{m\gamma\tau}\Psi^u \| \geq \frac{1}{2}e^{m\gamma\tau} \| \Psi^u \| - BM^2 e^{-m\gamma\tau} \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{d\tau} \| e^{m\gamma\tau}\Psi^s \| \leq -\frac{1}{2}e^{m\gamma\tau} \| \Psi^s \| + BM^2 e^{-m\gamma\tau} \tag{2.2}$$

$$\| \frac{d}{d\tau}e^{m\gamma\tau}\Psi^c \| \leq BM^2 e^{-m\gamma\tau} \tag{2.3}$$

Die Konstante B hängt dabei nur von n,m und R ab. Verkleinert man R, so wird auch B kleiner.

Beweis :
Nach dem Satz über die Differentiation von Parameterintegralen gelten die Beziehungen

$$\| \Psi^i \| \frac{d}{d\tau} \| \Psi^i \| = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\| \Psi^i \|^2 = \langle \Psi^i, \frac{d}{d\tau}\Psi^i \rangle \tag{2.4}$$

und

$$\frac{d}{d\tau}\Psi^i = \frac{d}{d\tau}(\pi^i\Psi) = \pi^i\Psi_\tau \quad , \tag{2.5}$$

wobei $i = u, c, s$ ist. Mit Hilfe von Produkt- und Kettenregel erhält man weiterhin, daß Ψ die Differentialgleichung

$$\Psi_\tau = \mathcal{A}\Psi + E \equiv \mathcal{A}\Psi + E_1 + E_2 + E_3 \tag{2.6}$$

erfüllt, wobei E_1 , E_2 und E_3 durch

$$E_1(y,\tau) = \eta(y,\tau)\left\{ -\frac{\psi^2(y,\tau)}{2\left(\sqrt{2(n-1)} + \psi(y,\tau)\right)} - \frac{\psi_y(y,\tau)^2\,\psi_{yy}(y,\tau)}{1+\psi_y(y,\tau)^2} \right\} \quad ,$$

$$E_2(y,\tau) = -\left\{ \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) R^{-1} y e^{-\gamma\tau} \eta_o' \left(\frac{ye^{-\gamma\tau}}{R}\right) + R^{-2} e^{-2\gamma\tau} \eta_o'' \left(\frac{ye^{-\gamma\tau}}{R}\right) \right\} \psi(y,\tau) \ ,$$

$$E_3(y,\tau) = -2R^{-1} e^{-\gamma\tau} \eta_o' \left(\frac{ye^{-\gamma\tau}}{R}\right) \psi_y(y,\tau)$$

definiert sind. Somit ist

$$\frac{d}{d\tau}\Psi^i = \pi^i[\mathcal{A}\Psi + E] \quad . \tag{2.7}$$

Wir zeigen nun, daß die Operatoren π^i und $\mathcal{A}$ kommutieren. Sei dazu $f \in \mathcal{H}$ und $k \in I\!N$. Da $\mathcal{A}$ und π^i selbstadjungierte Operatoren sind, gilt

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}\pi^i f - \pi^i \mathcal{A} f, Hm_k \rangle &= \langle \mathcal{A}\pi^i f, Hm_k \rangle - \langle \pi^i \mathcal{A} f, Hm_k \rangle \\
&= \langle \pi^i f, \mathcal{A} Hm_k \rangle - \langle f, \mathcal{A}\pi^i Hm_k \rangle \\
&= \lambda_k \langle \pi^i f, Hm_k \rangle - \langle f, \mathcal{A}\pi^i Hm_k \rangle \\
&= \lambda_k \langle f, \pi^i Hm_k \rangle - \langle f, \mathcal{A}\pi^i Hm_k \rangle \quad .
\end{aligned}$$

Ist $Hm_k \notin \mathcal{E}^i$, so ist die rechte Seite trivialerweise gleich 0. Falls $Hm_k \in \mathcal{E}^i$ ist, dann gilt

$$\begin{aligned}
\lambda_k \langle f, \pi^i Hm_k \rangle - \langle f, \mathcal{A}\pi^i Hm_k \rangle &= \lambda_k \langle f, Hm_k \rangle - \langle f, \mathcal{A} Hm_k \rangle \\
&= \lambda_k \langle f, Hm_k \rangle - \lambda_k \langle f, Hm_k \rangle \\
&= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Da k und f beliebig waren und $\{Hm_k\}_{k\in I\!N}$ ein vollständiges orthogonales System in $\mathcal{H}$ ist, folgt

$$\pi^i \mathcal{A} = \mathcal{A}\pi^i \quad . \tag{2.8}$$

Damit ergeben sich die Beziehungen

$$\frac{d}{d\tau}\Psi^i \;=\; \mathcal{A}\Psi^i + \pi^i E \tag{2.9}$$

und

$$\|\Psi^i\|\,\frac{d}{d\tau}\,\|\Psi^i\| = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|\Psi^i\|^2 \;=\; \langle \Psi^i, \frac{d}{d\tau}\Psi^i\rangle \;=\; \langle \Psi^i, \mathcal{A}\Psi^i + \pi^i E\rangle \;\; . \tag{2.10}$$

Sei nun $i = u$.
Berücksichtigen wir, daß für alle $\chi \in \mathcal{E}^u$ die Ungleichung

$$\langle \chi, \mathcal{A}\chi\rangle \;\geq\; (1 - \frac{m-1}{2})\,\|\chi\|^2$$

gilt, so erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|\Psi^u\|\,\tfrac{d}{d\tau}\,\|\Psi^u\| \;&\geq\; (1-\tfrac{m-1}{2})\,\|\Psi^u\|^2 - \|\pi^u E\|\,\|\Psi^u\| \\
&\geq\; \{(1-\tfrac{m-1}{2})\,\|\Psi^u\| - \|E\|\}\,\|\Psi^u\|
\end{aligned}$$

Da $\|\Psi^u(.,\tau)\| > 0$ ist, folgt daraus

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{d\tau}\,\|e^{m\gamma\tau}\Psi^u\| \;&=\; m\gamma e^{m\gamma\tau}\,\|\Psi^u\| + e^{m\gamma\tau}\tfrac{d}{d\tau}\,\|\Psi^u\| \\
&\geq\; \tfrac{1}{2}e^{m\gamma\tau}\,\|\Psi^u\| - e^{m\gamma\tau}\,\|E\|
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Schätzen wir nun $\|E\|$ ab. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist

$$|E_1(y,\tau)| \leq B(n,m,R)\,\{M^2 e^{-2m\gamma\tau}(1+|y|)^{2m} + M^3 e^{-3m\gamma\tau}(1+|y|)^{3m}\}$$

für alle $y \in I\!R$ und $\tau_o \leq \tau < \tau_1$. Dies impliziert die Normabschätzung

$$\begin{aligned}
\|E_1(y,\tau)\| \;&\leq\; B(n,m,R)\,M^2 e^{-2m\gamma\tau}\left(\int_{I\!R}\{(1+|y|)^{2m} + (1+|y|)^{3m}\}^2 e^{-\frac{y^2}{4}}\,dy\right)^{1/2} \\
&\leq\; B(n,m,R)\,M^2 e^{-2m\gamma\tau} \quad .
\end{aligned}$$

Außerdem gilt für $j \in \{2,3\}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|E_i(y,\tau)\| \;&\leq\; \left(\int_{Re^{\gamma\tau}}^{2Re^{\gamma\tau}} \{B(n,m,R)\,Me^{-m\gamma\tau}(1+2Re^{\gamma\tau})^m\}^2 e^{-\frac{y^2}{4}}\,dy\right)^{1/2} \\
&\leq\; B(n,m,R)\,Me^{-aR^2e^{2\gamma\tau}}C(m,R)e^{-(\frac{1}{8}-a)R^2e^{2\gamma\tau}}Re^{\gamma\tau} \quad \text{für } a \in (0,\tfrac{1}{8}) \\
&\leq\; B(n,m,R)\,Me^{-aR^2e^{2\gamma\tau}} \\
&\leq\; B(n,m,R)\,Me^{-2m\gamma\tau} \quad .
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\| E(y,\tau) \| \leq B(n,m,R)\, M^2 e^{-2m\gamma\tau} \quad . \tag{2.12}$$

Aus den Abschätzungen (2.11) und (2.12) folgt nun unmittelbar die Differentialungleichung (2.1).

Sei nun $i = s$.
Beachtet man, daß in diesem Fall für alle $\chi \in \mathcal{E}^s$ die Ungleichung

$$\langle \chi, \mathcal{A}\chi \rangle \leq (1 - \frac{m+1}{2}) \| \chi \|^2$$

gilt, so erhält man durch analoge Argumentation wie bei $i = u$ die Differentialungleichung (2.2).

Sei schließlich $i = c$.
Da $\mathcal{A}\Psi^c = (1 - \frac{m}{2})\Psi^c$ ist, ergibt sich mit (2.9) die Beziehung

$$\frac{d}{d\tau}(e^{m\gamma\tau}\Psi^c) = e^{m\gamma\tau}\pi^c E \quad ,$$

woraus dann unmittelbar die Differentialungleichung (2.3) folgt. □

Aus den eben bewiesenen Differentialungleichungen lassen sich wichtige Aussagen über das Änderungsverhalten von Ψ^u, Ψ^c und Ψ^s machen. Betrachten wir zunächst Ψ^u. Es gilt:

Korollar 2.2
Ist $\| \Psi^u(\tau_*) \| \geq 2BM^2 e^{-2m\gamma\tau_*}$ *für ein* $\tau_* \geq \tau_0$, *dann gilt zu diesem Zeitpunkt* $\frac{d}{d\tau}\{e^{2m\gamma\tau} \| \Psi^u(.,\tau) \|\} > 0.$ □

Mit diesem Korollar werden wir später den Teil (b) des Exit-Lemmas beweisen.

Untersuchen wir nun Ψ^c. Wir zeigen zunächst

Korollar 2.3
Für alle $\tau_0 < \tau' \leq \tau'' < \tau_1$ *gilt*

$$\| e^{m\gamma\tau''}\Psi^c(\tau'') - e^{m\gamma\tau'}\Psi^c(\tau') \| \leq BM^2 e^{-m\gamma\tau'} \quad . \tag{2.13}$$

Beweis:
Die Differential- und Integralrechnung für banachraumwertige Funktionen, vgl. dazu einschlägige Lehrbücher über nichtlineare Funktionalanalysis, liefert die Abschätzung

$$\begin{aligned} \| e^{m\gamma\tau''}\Psi^c(\tau'') - e^{m\gamma\tau'}\Psi^c(\tau') \| &= \| \int_{\tau'}^{\tau''} \tfrac{d}{d\tau}\{e^{m\gamma\tau}\Psi^c(\tau)\}\, d\tau \| \\ &\leq \int_{\tau'}^{\tau''} \| \tfrac{d}{d\tau}\{e^{m\gamma\tau}\Psi^c(\tau)\} \| \, d\tau \\ &\leq BM^2 e^{-m\gamma\tau'} \quad . \end{aligned}$$ □

Die Tatsache, daß sich Ψ^c mit zunehmender Zeit immer weniger verändert, hat folgende Konsequenz.

Korollar 2.4
Ist $\tau_1 = \infty$, so konvergiert $e^{m\gamma\tau}\Psi^c(\tau)$ für $\tau \to \infty$. Sei dieser Grenzwert durch $\frac{K_\infty}{2\sqrt{2(n-1)}}Hm_m$ bezeichnet. Dann ist

$$|K_\infty - K_o| \leq 2\sqrt{2(n-1)}\,\|Hm_m\|^{-1}BM^2e^{-m\gamma\tau_o} + \delta \leq 2\delta\ , \tag{2.14}$$

wenn τ_0 in Abhängigkeit von δ hinreichend groß ist.

Beweis:
Die Behauptungen dieses Korollars folgen sofort aus (2.13) und (1.32) □

Wenden wir uns schließlich Ψ^s zu. Die Evolution und die Größenordnung von Ψ^s ist folgendermaßen durch die Parameter M, δ und τ_0 festgelegt.

Korollar 2.5

$$\begin{aligned} e^{m\gamma\tau}\,\|\Psi^s(\tau)\| &\leq (1+\tau-\tau_0)e^{-(\tau-\tau_0)/2}\{\delta + BM^2e^{-m\gamma\tau_0}\} \\ &\leq 2\delta + 2BM^2e^{-m\gamma\tau_0} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Beweisidee:
Man multipliziere die Differentialungleichung (2.2) mit $e^{\tau/2}$ und integriere den entstandenen Ausdruck. Dabei unterscheide man die Fälle $m > 3$ und $m = 3$. Aus den dadurch gewonnenen Ungleichungen erhält man dann wegen der Bedingung (1.31) die erste Abschätzung. Die zweite Abschätzung folgt aus der ersten aufgrund der Ungleichung $(1+x)e^{-x/2} \leq 2$. □

Durch die Kenntnis der Anfangswerte und des Änderungsverhaltens von Ψ^u, Ψ^c und Ψ^s können wir nun die Funktionen ψ und Hm_m in der inneren Region miteinander vergleichen. Wir erhalten

Lemma 2.6
Sei $M_0 = 3BM^2$. Für beliebige $\epsilon > 0$ und $R_2 > 0$ gilt dann

$$\left|\psi(y,\tau)e^{m\gamma\tau} - \frac{K_o}{2\sqrt{2(n-1)}}Hm_m(y)\right| \leq \epsilon \tag{2.16}$$

und

$$\left|\psi_y(y,\tau)e^{m\gamma\tau} - \frac{K_o}{2\sqrt{2(n-1)}}Hm_m^{'}(y)\right| \leq \epsilon \tag{2.17}$$

für $|\ y\ | < R_2$ und $\tau_0 < \tau < \tau_1$, vorausgesetzt, daß $\delta \leq \bar{\delta}(M,R,R_2,\epsilon)$ und $\tau_0 \geq \bar{\tau}_0(M,R,R_2,\epsilon,\delta)$ für bestimmte Konstanten $\bar{\delta}$ und $\bar{\tau}_0$ ist.

Bevor wir das Lemma beweisen, geben wir zunächst eine Interpolationsungleichung an, die wir für den Beweis benötigen werden.

Lemma 2.7
Sei $j+\beta < k+\alpha$, wobei $j = 0,1,2,\ldots,k = 1,2,\ldots$ und $0 \leq \alpha,\beta \leq 1$ ist. Sei außerdem Ω ein $C^{k,\alpha}$-Gebiet in $I\!R^n$ und $u \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C = C(\varepsilon, j, k, \Omega)$, so daß die Interpolationsungleichung

$$|u|_{j,\beta;\Omega} \leq C|u|_{0;\Omega} + \varepsilon |u|_{k,\alpha;\Omega} \tag{2.18}$$

erfüllt ist.

Beweis:
Siehe [GT], Bew. Lem. 6.35. □

Beweis des Lemmas 2.6:
Seien $\epsilon > 0$ und $R_2 > 0$ gegeben. Da

$$\begin{aligned}\sup_{|y|\leq R_2}\left|\tfrac{K}{2\sqrt{2(n-1)}}Hm_m(y) - \tfrac{K_o}{2\sqrt{2(n-1)}}Hm_m(y)\right| &\leq \tfrac{\delta}{2}\left(\sup_{|y|\leq R_2}\tfrac{|Hm_m(y)|}{2\sqrt{2(n-1)}}\right)\\ &\leq \tfrac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

ist, wenn $\delta \leq \epsilon\left(\sup_{|y|\leq R_2}\frac{|Hm_m(y)|}{2\sqrt{2(n-1)}}\right)$ gewählt wird, genügt es , die Abschätzungen zu zeigen, die aus (2.16) und (2.17) entstehen, wenn man K_0 durch K und ϵ durch $\frac{\epsilon}{2}$ ersetzt.

Wegen $\psi(y,\tau) = \Psi(y,\tau)$ für alle$|\ y\ | \leq R_2 < Re^{\gamma\tau}$ ist es sinnvoll, die Funktion Υ mit

$$\Upsilon(y,\tau) = \Psi(y,\tau) - \frac{K}{2\sqrt{2(n-1)}}\,e^{-m\gamma\tau}\,Hm_m(y)$$

für alle y $\in I\!R$ und $\tau \in [\tau_0,\tau_1)$ einzuführen. Sei außerdem $\Omega = (-R_2, R_2)$. Dann ist die erste Behauptung des Lemmas äquivalent zur Aussage

$$|\,\Upsilon(\tau)\,|_{0;\Omega} \leq \epsilon e^{-m\gamma\tau} \tag{2.19}$$

für $\tau_0 < \tau < \tau_1$, $\delta \leq \bar{\delta}(M,R,R_2,\epsilon)$ und $\tau_0 \geq \bar{\tau}_0(M,R,R_2,\epsilon,\delta)$.

Υ erfüllt die Differentialgleichung

$$L\Upsilon = -E \ \ ,$$

wobei

$$\begin{aligned}L\Upsilon(y,\tau) &= \mathcal{A}(y,\tau) - \tfrac{\partial}{\partial\tau}\Upsilon(y,\tau)\\ &= \tfrac{\partial^2}{\partial y^2}\Upsilon(y,\tau) - \tfrac{1}{2}y\tfrac{\partial}{\partial y}\Upsilon(y,\tau) + \Upsilon(y,\tau) - \tfrac{\partial}{\partial\tau}\Upsilon(y,\tau)\end{aligned}$$

und E die Funktion aus Lemma 2.1 ist. L ist offensichtlich ein auf $D := I\!R \times (\tau_o, \tau_1)$ gleichmäßig parabolischer linearer Differentialoperator mit glatten Koeffizienten. Außerdem ist $\Upsilon(\tau_o)$ ist stetig und erfüllt für alle $y \in I\!R$ die Ungleichung $|\ \Upsilon(y,\tau_o)\ |$

$\leq\ Ce^{y^2/4\tau_1}$. Nach der Theorie der linearen parabolischen Differentialgleichungen, vgl. [Fr], Ch.1, und [LSU], Ch.4, besitzt daher die Funktion Υ auf D die Darstellung

$$\Upsilon(y,\tau) = \int\limits_{I\!R} \Gamma(y,\tau,\xi,\tilde\tau)\Upsilon(\xi,\tilde\tau)\, d\xi + \int\limits_{\tilde\tau}^{\tau}\int\limits_{I\!R} \Gamma(y,\tau,\xi,s)E(\xi,s)\, d\xi\, ds \ ,$$

wobei Γ die Standardgrundlösung von L und $\tilde\tau \in [\tau_0,\tau_1)$ ist. Es gilt somit

$$\begin{aligned}\sup_{|y|\leq R_2} |\,\Upsilon(y,\tau)\,| \ &\leq\ \sup_{|y|\leq R_2} \int\limits_{\tau^*}^{\tau}\int\limits_{I\!R} |\,\Gamma(y,\tau,\xi,s)\,|\,|\,E(\xi,s)\,|\ d\xi\, ds \\ &\quad + \sup_{|y|\leq R_2} \int\limits_{I\!R} |\,\Gamma(y,\tau,\xi,\tau^*)\,|\,|\,\Upsilon(\xi,\tau^*)\,|\ d\xi \\ &=: I_1(\tau) + I_2(\tau)\ ,\end{aligned}$$

wobei $\tau^* = \max\{\tau-1,\tau_0\}$ ist.

Der erste Summand auf der rechten Seite läßt sich abschätzen durch

$$\begin{aligned} I_1(\tau) \ &\leq\ \sup_{|y|\leq R_2} \int\limits_{\tau-1}^{\tau} \tfrac{1}{\sqrt{\tau-s}}\Big(\int\limits_{I\!R} Ce^{-\frac{\lambda_o^*(y-\xi)^2}{4(\tau-s)}}\ |\,E(\xi,s)\,|\ d\xi\Big)\, ds \\ &\leq\ \sup_{|y|\leq R_2} \int\limits_{\tau-1}^{\tau} \tfrac{1}{\sqrt{\tau-s}}\Big(\int\limits_{I\!R} Ce^{-\frac{\lambda_o^*(y-\xi)^2}{4}}\ |\,E(\xi,s)\,|\ d\xi\Big)\, ds \\ &\leq\ \sup_{|y|\leq R_2} \int\limits_{\tau-1}^{\tau} \tfrac{C}{\sqrt{\tau-s}}\ \|\,E(s)\,\|\ \Big(\int\limits_{I\!R} e^{\frac{2\lambda_o^* R_2\xi + (1-\lambda_o^*)\xi^2}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4}}\, d\xi\Big)^{1/2} ds \\ &\leq\ C(R_2) \sup_{\tau-1\leq\tau'\leq\tau} \|\,E(\tau')\,\| \\ &\leq\ C(M,R_2)e^{-2m\gamma\tau}\ ,\end{aligned}$$

wobei $\lambda_o^* \in (0,1)$ ist.

Zur Abschätzung des zweiten Summanden müssen wir eine Fallunterscheidung vornehmen. Sei zunächst $\tau \in [\tau_0+1,\tau_1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} I_2(\tau) \ &\leq\ \sup_{|y|\leq R_2} \int\limits_{I\!R} C\tfrac{1}{\sqrt{\tau-\tau^*}}\, e^{-\frac{\lambda_o^*(y-\xi)^2}{4(\tau-\tau^*)}}\ |\,\Upsilon(\xi,\tau^*)\,|\ d\xi \\ &\leq\ \sup_{|y|\leq R_2} \int\limits_{I\!R} Ce^{-\frac{\lambda_o^*(y-\xi)^2}{4}}\ |\,\Upsilon(\xi,\tau-1)\,|\ d\xi \\ &\leq\ C(R_2) \sup_{\tau-1\leq\tau'\leq\tau} \|\,\Upsilon(\tau')\,\|\ .\end{aligned}$$

Untersuchen wir daher $\|\Upsilon\|$. Aufgrund der Korollare 2.4 und 2.5 ergibt sich

$$\begin{aligned}\|\Upsilon(\tau)\| &\leq \|\Psi^u(\tau)\| + \|\Psi^s(\tau)\| + \|\Psi^c(\tau) - \tfrac{K}{2\sqrt{2(n-1)}} e^{-m\gamma\tau} H m_m\| \\ &\leq (2\delta + 6BM^2 e^{-m\gamma\tau_o}) e^{-m\gamma\tau} \\ &\leq \epsilon_1(M, R, \delta\downarrow, \tau_0\uparrow) e^{-m\gamma\tau}\end{aligned}$$

für alle $\tau \in [\tau_0, \tau_1)$. Dabei bedeutet $\epsilon_1(M, R, \delta\downarrow, \tau_0\uparrow)$, daß ϵ_1 bei festen M und R beliebig klein werden kann, wenn man jeweils δ genügend klein und τ_0 genügend groß wählt.

Mit den Abschätzungen von $I_1(\tau)$ und $I_2(\tau)$ erhalten wir nun die Ungleichung

$$\begin{aligned}\sup_{|y|\leq R_2} |\Upsilon(y,\tau)| &\leq C(M, R_2)\{\epsilon_1 e^{-m\gamma\tau} + e^{-2m\gamma\tau}\} \\ &\leq \epsilon_2(M, R, R_2, \delta\downarrow, \tau_0\uparrow) e^{-m\gamma\tau}\end{aligned} \tag{2.20}$$

für alle $\tau \in [\tau_0 + 1, \tau_1)$.

Sei jetzt $\tau \in (\tau_0, \tau_0 + 1)$. Da in diesem Fall $|\tau - \tau^*|$ nicht für alle $\tau \in (\tau_o, \tau_o + 1)$ durch eine positive Konstante gleichmäßig nach unten beschränkt ist, können wir die Grundlösung Γ nicht auf dieselbe Weise abschätzen wie im vorherigen Fall. Aus diesem Grunde werden wir die Regionen $B_1(y) := \{\xi \in I\!R : |y - \xi| \leq 1\}$ und $I\!R \setminus B_1(y)$ getrennt untersuchen. Dazu berücksichtigen wir, daß

$$\begin{aligned}I_2(\tau) &\leq \sup_{|y|\leq R_2} \int_{|y-\xi|>1} |\Gamma(y,\tau,\xi,\tau^*)|\,|\Upsilon(\xi,\tau^*)|\; d\xi \\ &\quad + \sup_{|y|\leq R_2} \int_{|y-\xi|\leq 1} |\Gamma(y,\tau,\xi,\tau^*)|\,|\Upsilon(\xi,\tau^*)|\; d\xi \\ &=: I_3(\tau) + I_4(\tau)\end{aligned}$$

ist, und schätzen die Summanden $I_3(\tau)$ und $I_4(\tau)$ separat ab.

Es gilt

$$\begin{aligned}I_3(\tau) &\leq \|\Upsilon(\tau_o)\| \sup_{|y|\leq R_2} C\Big(\int_{|y-\xi|\geq 1} \tfrac{1}{\tau-\tau_0} e^{-\frac{\lambda_0^* y - \xi^2}{2(\tau-\tau_0)}} e^{\frac{\xi^2}{4}}\, d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &=: \|\Upsilon(\tau_0)\| \sup_{|y|\leq R_2} f(\tau, y)\quad ,\end{aligned}$$

wobei $f \in C(U; I\!R^+)$ mit $U := (\tau_0, \tau_0 + 1] \times [-R_2, R_2]$ ist. Sei nun $\lambda_o^* \in (\frac{1}{2}, 1)$ fest und für jedes $y_* \in [-R_2, R_2]$ eine Funktion $g_{y_*} \in C((\tau_0, \tau_0 + \frac{1}{4}])$ durch $g_{y_*}(\tau) = f(\tau, y_*)$

definiert. Dann ist jede Funktion g_{y_*} streng monoton steigend. Daher folgt

$$\begin{aligned}
I_3(\tau) &\leq \|\Upsilon(\tau_0)\| \max_{(y,\tau)\in U} |f(y,\tau)| \\
&\leq C(R_2) \sup_{\tau_0 \leq \tau' < \tau_0+1} \|\Upsilon(\tau')\| \\
&\leq C(R_2)\epsilon_1 e^{-m\gamma\tau} \quad .
\end{aligned}$$

Untersuchen wir jetzt $I_4(\tau)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
I_4(\tau) &\leq \left(\sup_{|y|\leq R_2+1} |\Upsilon(y,\tau_0)|\right)\left(\sup_{|y|\leq R_2} C \int_{y-1}^{y+1} \frac{1}{\sqrt{\tau-\tau_o}} e^{-\frac{\lambda_o^*}{4(\tau-\tau_o)}(\xi-y)^2}\, d\xi\right) \\
&\leq \left(\sup_{|y|\leq R_2+1} |\Upsilon(y,\tau_0)|\right) \frac{4C}{\sqrt{\lambda_o^*}} \int_0^{\sqrt{\frac{\lambda_o^*}{4(\tau-\tau_o)}}} e^{-r^2}\, dr \\
&\leq C \sup_{|y|\leq R_2+1} |\Upsilon(y,\tau_0)| \quad .
\end{aligned}$$

Wir schätzen nun $\sup\limits_{|y|\leq R_2+1} |\Upsilon(y,\tau_o)|$ mit Hilfe der Ungleichung

$$\|f\|_\infty \leq |\bar{f}| + \sqrt{2}\,\|f\|_2^{1/2}\|f'\|_2^{1/2}$$

ab, siehe [LSU], Ch.1, Thm.2.2, und erhalten

$$\begin{aligned}
\sup_{|y|\leq R_2+1} |\Upsilon(y,\tau_o)| &\leq \frac{1}{2(R_2+1)} \left| \int_{|y|\leq R_2+1} \Upsilon(y,\tau_o)\, dy \right| \\
&\quad + \sqrt{2}\left(\int_{|y|\leq R_2+1} \Upsilon^2(y,\tau_o)\, dy\right)^{1/4}\left(\int_{|y|\leq R_2+1} \Upsilon_y^2(y,\tau_o)\, dy\right)^{1/4} \\
&\leq \frac{e^{(R_2+1)^2}}{2(R_2+1)} \|\Upsilon(\tau_o)\|^{1/2} \left(\int_{|y|\leq R_2+1} e^{-\frac{y^2}{4}}\, dy\right)^{1/2} \\
&\quad + \sqrt{2}\, e^{(R_2+1)^2} \|\Upsilon(\tau_o)\|^{1/4} \left(\int_{|y|\leq R_2+1} e^{-\frac{y^2}{4}}\, dy\right)^{1/4} \times \\
&\quad \left(\sqrt{2(R_2+1)} \sup_{|y|\leq R_2+1} |\Upsilon_y(y,\tau_o)|\right)^{1/2} \\
&\leq C(R_2)\,\epsilon_1 e^{-m\gamma\tau_o} + \left(C(R_2)\,\epsilon_1 e^{-m\gamma\tau_o}\right)^{1/2} \left(C(R_2)\, e^{-m\gamma\tau_o}\right)^{1/2} \\
&\leq \epsilon_3(M, R, R_2, \tau_o \uparrow, \delta \downarrow) e^{-m\gamma\tau_o} \quad .
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\sup_{|y|\le R_2} |\Upsilon(y,\tau)| \le \epsilon_4(M,R,R_2,\delta\downarrow,\tau_0\uparrow)e^{-m\gamma\tau} \tag{2.21}$$

für alle $\tau \in (\tau_0, \tau_0+1)$.

Aus (2.20) und (2.21) folgt nun (2.19) und damit die erste Behauptung des Lemmas.

Außerdem erhalten wir mit Hilfe der Interpolationsungleichung (2.18) für ein beliebiges $\bar\epsilon > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\Upsilon|_{1;\Omega} &\le C(R_2,\bar\epsilon)\,|\Upsilon|_{0;\Omega} + \bar\epsilon\,|\Upsilon|_{2;\Omega} \\ &\le C(R_2,\bar\epsilon)\,|\Upsilon|_{0;\Omega} + C(R_2)\bar\epsilon \end{aligned}$$

und damit auch die zweite Behauptung des Lemmas. □

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir auch die Funktionen ϕ und $\phi^{(0)}$ miteinander vergleichen. Es ergibt sich

Korollar 2.8
In der Region $\frac{1}{2}R_2e^{-\gamma\tau} \le |\xi| \le R_2e^{-\gamma\tau}$ gilt

$$\begin{aligned} |\phi(\xi,\tau)-\phi^{(o)}(K_o;\xi)| &\le \epsilon_5(M,R,R_2\uparrow,\delta\downarrow,\tau_0\uparrow)\{e^{-m\gamma\tau}+|\xi|^m\} && (2.22) \\ &\le \epsilon_5(M,R,R_2\uparrow,\delta\downarrow,\tau_0\uparrow)(1+{R_2}^m)e^{-m\gamma\tau} && (2.23) \end{aligned}$$

Beweis:
Für $|y| \ge \frac{1}{2}R_2$ ist $|Hm_m(y)-y^m| \le A|y|^{m-2}$. Daher folgt aus dem vorherigen Lemma für alle $\frac{1}{2}R_2 \le |y| \le R_2$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left|\psi(y,\tau)-\tfrac{K_o}{2\sqrt{2(n-1)}}e^{-m\gamma\tau}y^m\right| &\le (\epsilon(M,R,R_2,\delta\downarrow,\tau_0\uparrow)+CR_2^{-2}y^m)e^{-m\gamma\tau} \\ &\le \epsilon_6(M,R,R_2\uparrow,\delta\downarrow,\tau_0\uparrow)(1+|y|^m)e^{-m\gamma\tau} \end{aligned}$$

Beachtet man, daß $\phi = \sqrt{2(n-1)}+\psi$ ist, und macht eine Taylorentwicklung von $\phi^{(o)}$ um $\xi = \sqrt{2(n-1)}$, dann erhält man unter Ausnutzung dieser Abschätzung die Behauptung. □

Für die Umkehrfunktion w von ϕ ergibt sich daraus folgendes Resultat.

Korollar 2.9
Es ist

$$\begin{aligned} |w(\phi,\tau)-w^{(o)}(K_o;\phi)| &\le \epsilon_7(M,R,R_2\uparrow,\delta\downarrow,\tau_0\uparrow)\left|\phi-\sqrt{2(n-1)}\right|^{\frac{1}{m}} && (2.24) \\ &\le \epsilon_8(M,R,R_2\uparrow,\delta\downarrow\tau_0\uparrow)\,|w^{(o)}(K_o;\phi)| && (2.25) \end{aligned}$$

für $\phi = \phi^{(o)}(K_o;\pm\frac{3}{4}R_2e^{-\gamma\tau}) = \sqrt{2(n-1)\pm K_o(\frac{3}{4}R_2)^m e^{-m\gamma\tau}}$ und $\tau_0 \le \tau < \tau_1$.

Beweis:
Sei $\tau \in [\tau_0, \tau_1)$ und R_2 so groß, daß $Hm_m'(y) > 0$ für alle $\frac{1}{2}R_2 \leq \mid y \mid \leq R_2$ gilt. Dann ist die Funktion ϕ aufgrund der Abschätzung (2.17) invertierbar auf dem Intervall $\frac{1}{2}R_2 e^{-\gamma\tau} \leq \mid \xi \mid \leq R_2 e^{-\gamma\tau}$, $\tau_o \leq \tau \leq \tau_1$. Somit ist die Umkehrfunktion w auf $I \equiv [\phi(-R_2 e^{-\gamma\tau}, \tau), \phi(-\frac{1}{2}R_2 e^{-\gamma\tau}, \tau)] \cup [\phi(\frac{1}{2}R_2 e^{-\gamma\tau}, \tau), \phi(R_2 e^{-\gamma\tau}, \tau)]$ definiert.

Wir zeigen nun, daß die Werte

$$\phi = \phi^{(o)}(K_o; \pm\frac{3}{4}R_2 e^{-\gamma\tau}) = \sqrt{2(n-1) \pm K_o(\frac{3}{4}R_2)^m e^{-m\gamma\tau}}$$

in I liegen. Dazu beachten wir, daß für alle $a \in \{-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ die Abschätzung

$$\mid \phi^{(o)}(K_o; aR_2 e^{-\gamma\tau}) - \phi^{(o)}(K_o; (a - \frac{1}{4})R_2 e^{-\gamma\tau}) \mid \ \geq \ \frac{K_o R_2^m e^{-m\gamma\tau}}{2^{2m+1}\sqrt{2(n-1) + K_o {R_2}^m e^{-m\gamma\tau}}}$$

gilt. Seien deshalb R_2 und τ_0 (in Abhängigkeit von R_2) so groß gewählt, daß $\frac{R_2^m}{1+R_2^m} > \frac{1}{2}$, $\epsilon_5 < \frac{K_o}{2^{2m+2}\sqrt{3(n-1)}}$ und $K_o R_2^m e^{-m\gamma\tau} < n-1$ ist. Dann folgt aus dem Korollar 2.8 und dem Zwischenwertsatz, daß $\phi = \phi^{(o)}(K_o; \pm\frac{3}{4}R_2 e^{-\gamma\tau}) \subset I$ ist.

Daher erhalten wir für $\phi = \phi^{(o)}(K_o; \pm\frac{3}{4}R_2 e^{-\gamma\tau})$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
& \mid w(\phi, \tau)^m - w^{(o)}(K_o; \phi)^m \mid^{\frac{1}{m}} \\
\leq \ & K_o^{-\frac{1}{m}} \mid (2(n-1) + K_o w^{(o)}(K_o; \phi)^m) - (2(n-1) + K_o w(\phi, \tau)^m) \mid^{\frac{1}{m}} \\
\leq \ & K_o^{-\frac{1}{m}} \mid (2(n-1) \pm K_o(\tfrac{3}{4}R_2)^m e^{-m\gamma\tau}) - (2(n-1) + K_o \xi^m) \mid^{\frac{1}{m}} \\
\leq \ & K_o^{-\frac{1}{m}} \mid \sqrt{2(n-1) \pm K_o(\tfrac{3}{4}R_2)^m e^{-m\gamma\tau}} + \sqrt{2(n-1) + K_o R_2^m e^{-m\gamma\tau}} \mid^{\frac{1}{m}} \times \\
& \mid \sqrt{2(n-1) \pm K_o(\tfrac{3}{4}R_2)^m e^{-m\gamma\tau}} - \sqrt{2(n-1) + K_o \xi^m} \mid^{\frac{1}{m}} \\
\leq \ & C \mid \phi(\xi, \tau) - \phi^{(o)}(K_o; \xi) \mid^{\frac{1}{m}} \\
\leq \ & C\epsilon_5 (1 + R_2^m e^{-m\gamma\tau})^{\frac{1}{m}} \\
\leq \ & C\epsilon_5 \left| \phi - \sqrt{2(n-1)} \right|^{\frac{1}{m}} \\
\leq \ & C\epsilon_5 \left| \frac{\phi + \sqrt{2(n-1)}}{K_o} \right|^{\frac{1}{m}} \left| \phi - \sqrt{2(n-1)} \right|^{\frac{1}{m}} \\
\leq \ & C\epsilon_5 \mid w^{(o)}(K_o; \phi) \mid
\end{aligned}$$

Seien nun die Parameter R_2, δ und τ_0 so gewählt, daß $C\epsilon_5 < 1$ ist. Dann haben

$w(\phi,\tau)^m$ und $w^{(o)}(K_o;\phi)^m$ aufgrund der letzten Abschätzung das gleiche Vorzeichen. Da m ungerade ist, gilt dies auch für $w(\phi,\tau)$ und $w^{(o)}(K_o;\phi)$. Infolgedessen ist

$$\begin{aligned} |\,w(\phi,\tau) - w^{(o)}(K_o;\phi)\,| &\le |\,w(\phi,\tau)^m - w^{(o)}(K_o;\phi)^m\,|^{\frac{1}{m}} \\ &\le C\epsilon_5 \Big|\phi - \sqrt{2(n-1)}\Big|^{\frac{1}{m}} \\ &\le C\epsilon_5\,|\,w^{(o)}(K_o;\phi)\,| \ , \end{aligned}$$

woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt. □

Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir noch das Verhalten von Γ_t in der Nähe des linken Endpunktes untersuchen. Mit Hilfe der Abschätzungen aus Lemma 2.6 erhalten wir

Lemma 2.10
Der Teil von Γ_t, der im Bereich $y < -R_2$ liegt, ist für alle $t \in [\tau_0, \tau_1)$ konvex, wenn man δ genügend klein und R_2 und τ_0 genügend groß wählt.

Beweis:
Wir zeigen zunächst, daß

$$\psi_{yy} < 0 \tag{2.26}$$

für alle $-\frac{7}{8}R_2 < y < -\frac{5}{8}R_2$ und $\tau_0 \le \tau < \tau_1$ ist.

Sei τ_0 so groß, daß $Re^{\gamma\tau_o} > 5R_2$ ist, und sei $\eta \in C^\infty(I\!R)$ eine Glättungsfunktion, die außerhalb des Intervalles $I \equiv (-R_2, -\frac{1}{2}R_2)$ verschwindet und auf $(-\frac{7}{8}R_2, -\frac{5}{8}R_2)$ identisch 1 ist. Dann erfüllt die Funktion $\nu := \eta\psi$ auf $D \equiv I \times [\tau_o, \tau_1)$ die Differentialgleichung

$$L\nu = \eta\,(\frac{\psi^2}{2\sqrt{2(n-1)}+2\psi} - \psi) - \frac{y}{2}\eta_y\psi + \frac{2\eta_y\psi_y + \eta_{yy}\psi}{1+\psi_y^2} \quad ,$$

wobei

$$L\nu(y,\tau) \;=\; \frac{1}{1+\psi_y^2}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\nu(y,\tau) \;-\; \frac{1}{2}y\,\frac{\partial}{\partial y}\nu(y,\tau) \;-\; \frac{\partial}{\partial\tau}\nu(y,\tau)$$

ist. L ist ein auf D gleichmäßig parabolischer Differentialoperator und hat nach (1.38) die Elliptizitätskonstante

$$\lambda = \inf_{(y,\tau)\in D} \frac{1}{1+\psi_y^2} \;\ge\; C(M,R_2) \ .$$

Die Bedingung (1.38) impliziert aufgrund der Interpolationsungleichung (2.18) folgende weitere Abschätzungen. Alle Koeffizienten von L liegen in $C^{o,\alpha}(I), 0 < \alpha \le 1$ und deren $C^{o,\alpha}$ - Normen sind durch eine Konstante $C(M,R_2)$ gleichmäßig nach oben beschränkt. Außerdem ist $L\nu \in C^{0,\alpha}(D)$ mit

$$|\,L\nu(\,.\,,\tau)\,|_{0,\alpha;I} \le C(M,R_2)e^{-m\gamma\tau}$$

für alle $\tau \in [\tau_0, \tau_1)$. Aufgrund der Anfangsbedingung (1.30) und des Lemmas 2.6 gilt auch

$$|\nu(.\,,\tau)|_{o,\alpha;I} \leq C(M, R_2)e^{-m\gamma\tau} .$$

für alle $\tau \in [\tau_0, \tau_1)$.

Die Schaudertheorie, vgl. [Fr],Ch.3-4, liefert somit die Abschätzung

$$|\nu(.\,,\tau)|_{2,\alpha;I} \leq C(M, R_2)e^{-m\gamma\tau} ,$$

und daher auch

$$|\nu(.,\tau)e^{m\gamma\tau} - \frac{K_o}{2\sqrt{2(n-1)}}Hm_m(.)|_{2,\alpha;I} \leq C(M, R_2) \; .$$

Hieraus ergibt sich mit (2.16) und (2.18) die Beziehung

$$|\nu(.,\tau)e^{m\gamma\tau} - \frac{K_o}{2\sqrt{2(n-1)}}Hm_m(.)|_{2;I} = o(1) \; , \tag{2.27}$$

wenn δ hinreichend klein und τ_0 hinreichend groß gewählt ist. Sei nun R_2 so groß, daß $Hm_m''(y) < 0$ für alle $(\frac{7}{8}R_2, -\frac{5}{8}R_2)$ ist. Dann folgt aus (2.27) unmittelbar (2.26).

Aufgrund der Anfangsbedingung (1.36) und der Randbedingung (2.26) ist die 2. Fundamentalform von Γ_{t_0} in der ganzen Region $y \leq -\frac{3}{4}R_2$ und für $\tau \in [\tau_0, \tau_1)$ auf dem Rand dieser Region positiv definit. Da die 2.Fundamentalform a von Γ_t die Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}a = \triangle a + |A|^2 \, a$$

erfüllt, siehe [EH], Lem. 1.1, erhält man durch analoge Argumentation wie beim Beweis des Maximumprinzips von Hamilton, vgl. [Ha1], daß die 2.Fundamentalform für alle Zeiten $\tau \in [\tau_0, \tau_1)$ im Bereich $y \leq -\frac{3}{4}R_2$ positiv definit ist. □

2.2 Konstruktion von Sub- und Superlösungen des MCF

Die Umkehrfunktion w von ϕ erfüllt auf ihrem gesamten Definitionsbereich die parabolische Differentialgleichung $\mathcal{B}[w] = 0$, wobei

$$\mathcal{B}[w] = w_\tau - \frac{1}{1 + e^{2\gamma\tau}\, w_\phi^2}\, w_{\phi\phi} - \left(\frac{n-1}{\phi} - \frac{\phi}{2}\right) w_\phi - \frac{1}{m}w \tag{2.28}$$

ist. Wir wollen nun obere und untere Schranken für w in der mittleren Region finden und w mit der in Kapitel 1 konstruierten Näherungsfunktion

$$w^{(0)}(K;\phi) = \left(\frac{\phi^2 - 2(n-1)}{K}\right)^{\frac{1}{m}}$$

vergleichen. Dies wird im wesentlichen unter Verwendung des parabolischen Maximumprinzips, vgl. [PW], geschehen. Daher werden wir in diesem Abschnitt geeignete Sub- und Superlösungen von $\mathcal{B}$ konstruieren.

Für die Funktion $w^{(0)}$ gilt

$$\mathcal{B}[w^{(0)}] = -\frac{w^{(0)}_{\phi\phi}}{1 + e^{2\gamma\tau} \left(w^{(0)}_\phi\right)^2} ,$$

mit

$$w^{(0)}_\phi = \frac{2\phi}{Km} \left(\frac{\phi^2 - 2(n-1)}{K}\right)^{\frac{1}{m}-1}$$

und

$$w^{(0)}_{\phi\phi} = \frac{4}{K^2 m} \left(\frac{2-m}{2m}\phi^2 - (n-1)\right) \left(\frac{\phi^2 - 2(n-1)}{K}\right)^{\frac{1}{m}-2}$$

Da $m \geq 3$ ist, ist also die Funktion $w^{(0)}$ für jeden Parameter $K > 0$ eine Sublösung von $\mathcal{B}$ für $0 \leq \phi < \sqrt{2(n-1)}$ und eine Superlösung für $\phi > \sqrt{2(n-1)}$.

Wir konstruieren nun weitere Sub- und Superlösungen $\bar{w}$ von $\mathcal{B}$ der Form

$$\bar{w}(K;\phi,\tau) = w^{(0)}(K;\phi) + \vartheta e^{-2\gamma\tau} w^{(1)}(K;\phi) ,$$

wobei $\vartheta > 1$ und $w^{(1)}$ eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$\left(\frac{n-1}{\phi} - \frac{\phi}{2}\right) w^{(1)}_\phi + \left(1 - \frac{1}{m}\right) w^{(1)} = -\frac{w^{(0)}_{\phi\phi}}{\left(w^{(0)}_\phi\right)^2} \tag{2.29}$$

ist. Dann liegt $\bar{w}$ in $C^2(I)$ mit $I = (0, \sqrt{2(n-1)}) \cup (\sqrt{2(n-1)}, \infty)$ und erfüllt die Differentialgleichung

$$\mathcal{B}[\bar{w}] = e^{-2\gamma\tau} \left\{ \vartheta \frac{w^{(0)}_{\phi\phi}}{\left(w^{(0)}_\phi\right)^2} - \frac{\bar{w}_{\phi\phi}}{e^{-2\gamma\tau} + (\bar{w}_\phi)^2} \right\} . \tag{2.30}$$

Der Ansatz für $w^{(1)}$ ist so gewählt worden, daß $e^{-2\gamma\tau} \frac{\partial^j}{\partial\phi^j} w^{(1)}$ für $j = 0, 1, 2$ in geeigneten Regionen deutlich kleiner als $\frac{\partial^j}{\partial\phi^j} w^{(0)}$ ist. Dies hat einerseits zur Folge, daß der erste Summand in (2.30), den wir ja explizit kennen, in diesen Regionen dominant ist, andererseits können $w^{(0)}$ und $\bar{w}$ in diesen Regionen leicht miteinander verglichen werden. Dies soll im folgenden verdeutlicht werden.

Zur Vereinfachung der Notation werden wir für den Rest dieses Kapitels den Parameter K nicht mehr zu $w^{(0)}$ und $\bar{w}$ hinzuschreiben. Wir nehmen außerdem an, daß $|K - K_0| \leq 4\delta$ und $8\delta < K_0$ ist.

Auf jedem kompakten Intervall $I_1 = [\varepsilon, \sqrt{2(n-1)} - \varepsilon]$ und $I_2 = [\sqrt{2(n-1)} + \varepsilon, \varepsilon^{-1}]$ mit $\varepsilon > 0$ gilt

$$\vartheta e^{-2\gamma\tau} \frac{\partial^j}{\partial\phi^j} w^{(1)} = o(1) \quad (\tau \to \infty)$$

für $j = 0, 1, 2$. Daraus folgt

$$\mathcal{B}[\bar{w}] = e^{-2\gamma\tau}(\vartheta - 1 + o(1)) \frac{w^{(0)}_{\phi\phi}}{\left(w^{(0)}_{\phi}\right)^2} \quad (\tau \to \infty)\,.$$

Da $\vartheta > 1$ ist, ist $\bar{w}$ eine Superlösung auf I_1 und eine Sublösung auf I_2, sofern τ in Abhängigkeit von δ genügend groß ist.

Es stellt sich nun die Frage, wie groß man I_1 und I_2 zu jedem festen Zeitpunkt τ wählen kann, so daß $\bar{w}$ gerade noch eine Super- bzw. Sublösung auf diesen Intervallen ist. Zur Beantwortung dieser Frage benötigen wir eine genauere Kenntnis des asymptotischen Verhaltens von $\bar{w}$.

Wir untersuchen zuerst das Verhalten von $\bar{w}$ in der Nähe von $\phi = \sqrt{2(n-1)}$. Dazu betrachten wir $\bar{w}$ als Funktion von $\psi = \phi - \sqrt{2(n-1)}$.

Es gilt

$$w^{(0)}(\psi) = \left(\frac{\psi^2 + 2\sqrt{2(n-1)}\psi}{K}\right)^{\frac{1}{m}} = C_0 \psi^{\frac{1}{m}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2(n-1)}}\psi\right)^{\frac{1}{m}},$$

wobei $C_0 := K^{-\frac{1}{m}}(2\sqrt{2(n-1)})^{\frac{1}{m}}$ ist. Mit Hilfe einer Taylorentwicklung von $w^{(0)}$ um $\psi = 0$ bis zum linearen Term ergibt sich, daß

$$w^{(0)}(\psi) = C_0 \psi^{\frac{1}{m}}(1 + O(\psi))$$

in der Nähe von $\psi = 0$ ist.

Damit erhalten wir auch, daß

$$w^{(0)}_\phi(\psi) = \frac{1}{m} C_0^m \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2(n-1)}}\psi\right) \left(w^{(0)}(\psi)\right)^{1-m} = \frac{C_0}{m} \psi^{\frac{1}{m}-1}(1 + O(\psi))$$

und

$$\begin{aligned} w^{(0)}_{\phi\phi}(\psi) &= \tfrac{1}{m}(1 - \tfrac{1}{m}) C_0^{2m} \left(1 + \tfrac{2-m}{4(m-1)(n-1)} \left(\psi^2 + 2\sqrt{2(n-1)}\psi\right)\right) \left(w^{(0)}(\psi)\right)^{1-2m} \\ &= \tfrac{C_0}{m}(1 - \tfrac{1}{m}) \psi^{\frac{1}{m}-2}(1 + O(\psi)) \end{aligned}$$

ist. Daraus folgt die Entwicklung

$$\frac{w^{(0)}_{\phi\phi}}{\left(w^{(0)}_\phi\right)^2}(\psi) = \frac{m-1}{C_0} \psi^{-\frac{1}{m}}(1 + O(\psi))\,.$$

Außerdem gilt

$$\frac{n-1}{\phi} - \frac{\phi}{2} = -\psi + O(\psi^2)\,.$$

Also können wir die Gleichung (2.29) nahe $\phi = \sqrt{2(n-1)}$ auch vermöge

$$(-\psi + O(\psi^2))w_\psi^{(1)} + (1-\frac{1}{m})w^{(1)} = \frac{m-1}{C_0}\psi^{-\frac{1}{m}}(1+O(\psi)) \tag{2.31}$$

ausdrücken.

Da für $0 < |\psi| \leq \frac{1}{2}\sqrt{2(n-1)}$ der Koeffizient $\frac{n-1}{\phi} - \frac{\phi}{2} \neq 0$ ist, hat die allgemeine Lösung w_{hom} der zu (2.29) gehörigen homogenen Differentialgleichung auf $(0, \frac{1}{2}\sqrt{2(n-1)}]$ die Gestalt

$$w_{hom}(\psi) = \mathbb{R}\, exp\left\{\left(1-\frac{1}{m}\right)\int\limits_{\psi_0}^{\psi} \frac{1}{s+O(s^2)}\right\}\,,$$

wobei $\psi_0 \geq \psi$ ist.

Wir wollen nun das auftretende Integral näherungsweise berechnen. Dazu beachten wir, daß ein $C > 0$ existiert, so daß

$$\int\limits_{\psi_0}^{\psi} \frac{1}{s - Cs^2} \leq \int\limits_{\psi_0}^{\psi} \frac{1}{s+O(s^2)} \leq \int\limits_{\psi_0}^{\psi} \frac{1}{s+Cs^2}\,.$$

gilt. Folglich ist

$$\int\limits_{\psi_0}^{\psi} \frac{1}{s+O(s^2)} = \log\psi + |\log(1+O(\psi))| - \log\psi_0 - |\log(1+O(\psi_0))|\,.$$

Daher besitzt w_{hom} die Entwicklung

$$w_{hom}(\psi) = \mathbb{R}\psi^{(1-\frac{1}{m})}(1+O(\psi))^{(1-\frac{1}{m})} = \mathbb{R}\psi^{(1-\frac{1}{m})}(1+O(\psi))\,. \tag{2.32}$$

Mit analoger Argumentation kann man zeigen, daß die Entwicklung (2.32) für w_{hom} auch auf $[-\frac{1}{2}\sqrt{2(n-1)}, 0)$ gilt.

Setzt man (2.32) in die Variation der Konstanten Formel für die Gleichung (2.29) ein und berechnet den Integralterm mit derselben Methode wie oben näherungsweise, so erhält man für jede Lösung $w^{(1)}$ von (2.29) die Entwicklung

$$w^{(1)}(\psi) = \frac{m-1}{C_0}\,\psi^{-\frac{1}{m}}(1+o(1)+O(\psi)) \quad (\psi \to 0)\,. \tag{2.33}$$

Setzt man nun (2.33) in (2.31) ein, dann ergibt sich

$$w_\phi^{(1)}(\psi) = \psi^{-\frac{1}{m}-1}(O(1)+O(\psi))\,.$$

Entwickelt man $w_{\phi\phi\phi}^{(0)}$ analog den ersten beiden Ableitungen von $w^{(0)}$, differenziert die Gleichung (2.29) und setzt dann sämtliche Entwicklungen ein, so bekommt man außerdem

$$w_{\phi\phi}^{(1)}(\psi) = \psi^{-\frac{1}{m}-2}(O(1)+O(\psi))\,.$$

Mit Hilfe der Entwicklungen für die Ableitungen von $w^{(0)}$ und $w^{(1)}$ ergibt sich die Abschätzung

$$\left|\frac{e^{-2\gamma\tau}w_\phi^{(1)}(\psi)}{w_\phi^{(0)}(\psi)}\right| + \left|\frac{e^{-2\gamma\tau}w_{\phi\phi}^{(1)}(\psi)}{w_{\phi\phi}^{(0)}(\psi)}\right| \le \left(\frac{c}{e^{m\gamma\tau}\psi}\right)^{\frac{2}{m}}.$$

Damit erhalten wir

$$e^{-2\gamma\tau}\mathcal{B}[\bar{w}](\psi) = \frac{w_{\phi\phi}^{(0)}}{(w_\phi^{(0)})^2}(\psi)\left\{\vartheta - \frac{1+O(e^{-2\gamma\tau}\psi^{-\frac{2}{m}})}{1+O(e^{-2\gamma\tau}\psi^{1-\frac{2}{m}})+O(e^{-4\gamma\tau}\psi^{-\frac{4}{m}})}\right\}.$$

Da $\vartheta > 1$ ist, gibt es ein $R_3 > 0$, so daß für jedes $\tau \ge \tau_0$ der zweite Summand auf $I_1^*(\tau) = \left[-\frac{1}{2}\sqrt{2(n-1)}, -R_3{}^m e^{-m\gamma\tau}\right]$ und $I_2^*(\tau) = \left[R_3{}^m e^{-m\gamma\tau}, \frac{1}{2}\sqrt{2(n-1)}\right]$ kleiner als ϑ ist, sofern man τ_0 hinreichend groß wählt. Somit ist $\bar{w}$ auf $I_1^*(\tau)$ eine Superlösung und auf $I_2^*(\tau)$ eine Sublösung von $\mathcal{B}$.

Untersuchen wir jetzt das Verhalten von $\bar{w}$ für $\phi \to \infty$.

Es gilt offensichtlich

$$w^{(0)}(\phi) = \left(K^{-\frac{1}{m}} + o(1)\right)\phi^{\frac{2}{m}} \quad (\phi \to \infty)\,.$$

Man kann nun das gleiche Programm wie bei der Entwicklung von $\bar{w}$ um $\phi = \sqrt{2(n-1)}$ durchführen. Dabei ergibt sich, daß man die Differentialgleichung (2.29) vermöge

$$\left(-\frac{\phi}{2} + o(1)\right)w_\phi^{(1)} + \left(1-\frac{1}{m}\right)w^{(1)} = -\left(\left(1-\frac{m}{2}\right)K^{\frac{1}{m}} + o(1)\right)\phi^{-\frac{2}{m}} \tag{2.34}$$

ausdrücken kann. Weiterhin erhält man durch näherungsweise Integration, daß jede Lösung w_{hom} der zu (2.29) gehörigen homogenen Gleichung von der Gestalt

$$w_{hom}(\phi) = \phi^{2(1-\frac{1}{m})}(1+o(1)) \tag{2.35}$$

ist, also für $\phi \to \infty$ ebenfalls gegen ∞ strebt. Setzt man dann (2.35) in die Variation der Konstanten Formel ein und beachtet, daß alle auftretenden o(1)-Terme Funktionen sind, die für jedes ϕ einen festen Funktionswert annehmen, dann erkennt man, daß für ein festes $\phi_0 \gg 1$ genau ein c_0 existiert, so daß diejenige Lösung $w_0^{(1)}$ von

(2.29), die an der Stelle ϕ_0 den Wert c_0 annimmt, für $\phi \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Die Lösung $w_0^{(1)}$ hat dann für $\phi \to \infty$ die Entwicklung

$$w_0^{(1)}(\phi) = \left(\left(\frac{m}{2} - 1\right) K^{\frac{1}{m}} + o(1)\right) \phi^{-\frac{2}{m}} .$$

Sei nun $w^{(1)} = w_0^{(1)}$. Dann gilt

$$\left|\frac{e^{-2\gamma\tau} w_\phi^{(1)}}{w_\phi^{(0)}}\right| + \left|\frac{e^{-2\gamma\tau} w_{\phi\phi}^{(1)}}{w_{\phi\phi}^{(0)}}\right| \leq Ce^{-2\gamma\tau}\phi^{-\frac{4}{m}}$$

und damit

$$\begin{aligned} e^{-2\gamma\tau}\mathcal{B}[\bar{w}](\phi) &= \frac{w_{\phi\phi}^{(0)}}{\left(w_\phi^{(0)}\right)^2}(\phi)\left\{\vartheta - \frac{1+O(e^{-2\gamma\tau}\phi^{-\frac{4}{m}})}{1+e^{-2\gamma\tau}\left(w_\phi^0(\phi)\right)^{-2}+O(e^{-2\gamma\tau}\phi^{-\frac{4}{m}})}\right\} \\ &< \frac{w_{\phi\phi}^{(0)}}{\left(w_\phi^{(0)}\right)^2}(\phi)\left\{\vartheta - \frac{1+O(e^{-2\gamma\tau}\phi^{-\frac{4}{m}})}{1+O(e^{-2\gamma\tau}\phi^{-\frac{4}{m}})}\right\} . \end{aligned}$$

Daher ist $\bar{w}$ für hinreichend großes τ_0 auch in der Region $\phi \geq \frac{3}{2}\sqrt{2(n-1)}$ eine Sublösung von $\mathcal{B}$.

Kombinieren wir nun die Resultate, die die Entwicklungen von $\bar{w}$ nahe $\phi = \sqrt{2(n-1)}$ und für $\phi \to \infty$ gebracht haben, und wählen die Konstante R_2 aus Kapitel 1 so groß, daß $\phi^{(0)}(K_0; \frac{1}{2}R_2 e^{-\gamma\tau}) \geq \sqrt{2(n-1)} + R_3 e^{-m\gamma\tau}$ ist, dann erhalten wir

Lemma 2.11
Sei $\bar{w} = w^{(0)} + \vartheta e^{-2\gamma\tau} w^{(1)}$, wobei $\vartheta > 1$ und $w^{(1)}$ die einzige Lösung von (2.29) ist, die für $\phi \to \infty$ gegen 0 geht. Dann ist die Funktion $\bar{w}$ für

$$\phi \geq \phi^{(0)}(K_0; \frac{1}{2}R_2 e^{-\gamma\tau}) , \quad \tau \geq \tau_0$$

eine Sublösung von $\mathcal{B}$, sofern τ_0 (in Abhängigkeit von ϑ) hinreichend groß gewählt wird. □

Entwickeln wir schließlich $\bar{w}$ in der Nähe von $\phi = 0$. Dabei sei stets $\phi > 0$.

Auch hier läßt sich das bewährte Programm durchführen, man sollte aber aus rechentechnischen Gründen $w^{(0)}$ als Funktion von $\varphi = \phi^2$ betrachten. Die Funktion $w^{(0)}$ ist dann in der Nähe von $\varphi = 0$ als konvergente Taylorreihe darstellbar. Somit erhält man die Entwicklung

$$w^{(0)}(\varphi) = -\xi_{(K)}\left(1 - \frac{\varphi}{2m(n-1)} + O(\varphi^2)\right) ,$$

wobei $O(\varphi^2)$ eine konvergente Potenzreihe ist. Des weiteren ergibt sich für (2.29) die Darstellung

$$(2(n-1) - \varphi)w_\varphi^{(1)} + \left(1 - \frac{1}{m}\right) w^{(1)} = \frac{-m(n-1)}{\xi_{(K)}}\varphi^{-1} + O(1) ,$$

wobei O(1) ebenfalls eine konvergente Potenzreihe ist.

Durch näherungsweise Integration entsprechend den beiden vorherigen Fällen und Rückersetzung der ϕ-Koordinaten erhält man, daß alle Lösungen von (2.29) für ϕ nahe 0 die Entwicklung

$$w^{(1)}(\phi) = -\frac{2m(n-1)}{\xi_{(K)}} \log\phi + O(\phi^2)\log\phi + O(\phi^2)$$

besitzen, wobei die $O(\phi^2)$ wiederum konvergente Potenzreihen sind. Durch gliedweise Differentiation ergeben sich daraus für $w^{(1)}_{\phi}$ und $w^{(1)}_{\phi\phi}$ die Entwicklungen

$$w^{(1)}_{\phi}(\phi) = -\frac{2m(n-1)}{\xi_{(K)}}\phi^{-1} + O(\phi)\log\phi + O(\phi)$$

und

$$w^{(1)}_{\phi\phi}(\phi) = \frac{2m(n-1)}{\xi_{(K)}}\phi^{-2} + O(1)\log\phi + O(1)\,.$$

Der Vergleich der Ableitungen von $w^{(0)}$ und $w^{(1)}$ liefert dann die Abschätzung

$$\left|\frac{e^{-2\gamma\tau}w^{(1)}_{\phi}}{w^{(0)}_{\phi}}\right| + \left|\frac{e^{-2\gamma\tau}w^{(1)}_{\phi\phi}}{w^{(0)}_{\phi\phi}}\right| \le Ce^{-2\gamma\tau}\phi^{-2}\,.$$

Damit erhalten wir schließlich

$$e^{-2\gamma\tau}\mathcal{B}[\bar{w}](\phi) = \frac{w^{(0)}_{\phi\phi}}{\left(w^{(0)}_{\phi}\right)^2}(\phi)\left\{\vartheta - \frac{1+O(e^{-2\gamma\tau}\phi^{-2})}{1+O(e^{-2\gamma\tau}\phi^{-1}+O(e^{-4\gamma\tau}\phi^{-4})}\right\}\,.$$

Daher gilt:

Lemma 2.12
Sei $\bar{w} = w^{(0)} + \vartheta e^{-2\gamma\tau}w^{(1)}$, wobei $\vartheta > 1$ und $w^{(1)}$ eine beliebige Lösung von (2.29) ist. Dann ist $\bar{w}$ für

$$R_5 e^{-\gamma\tau} \le \phi \le \phi^{(0)}(K_0; -\frac{1}{2}R_2 e^{-\gamma\tau})\,, \quad \tau \ge \tau_0\,,$$

eine Superlösung von $\mathcal{B}$, sofern τ_0, R_5 und R_2 (in Abhängigkeit von ϑ) genügend groß sind. □

Wir wollen nun zum Abschluß dieses Kapitels noch eine Superlösung von $\mathcal{B}$ für $\phi \in [0, R_5 e^{-\gamma\tau}]$ konstruieren. Dazu gehen wir in die kleinste Längenskala aus Abschnitt 1.1, nämlich die z-Skala, über.

Sei die Funktion p definiert durch

$$p(z,\tau) = e^{2\gamma\tau}\left(w(ze^{-\gamma\tau},\tau) + \xi_{(K)}\right)\,.$$

Dann erfüllt p die Differentialgleichung

$$\frac{\xi_{(K)}}{m} - \left(\frac{p_{zz}}{1+p_z^2} + \frac{n-1}{z}p_z\right) + e^{-2\gamma\tau}\left\{\frac{\partial p}{\partial\tau} + \frac{m-1}{m}(zp_z - p)\right\} = 0\,. \qquad (2.36)$$

Betrachten wir nun die Differentialgleichung, die aus (2.36) entsteht, wenn man den letzten Summanden auf der linken Seite wegläßt. Die allgemeine Lösung g dieser Gleichung hat die Gestalt

$$g(z,\tau) = \frac{m}{\xi_{(K)}} P\left(\frac{\xi_{(K)}}{m} z\right) + b(\tau)\,,$$

wobei b eine beliebige C^1-Funktion und P die Funktion aus Abschnitt 1.1 ist.

Wir machen daher für eine Superlösung $\tilde{w}$ von $\mathcal{B}$ auf dem Intervall $0 \leq z \leq R_5$ den Ansatz

$$\tilde{w}(e^{-\gamma\tau} z, \tau) = -\xi_{(K)} + e^{-2\gamma\tau}\tilde{p}(z,\tau)$$

mit

$$\tilde{p}(z,\tau) = \frac{m}{\xi_{(K)}} P\left(\frac{\xi_{(K)}}{m} z\right) + b(\tau) + \tau e^{-2\gamma\tau} Q(z)\ .$$

Dabei sei Q die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{Q'(z)}{1+P'\left(\frac{\xi_{(K)}}{m}z\right)^2}\right) + \frac{n-1}{z}Q'(z) = -\bar{c}\,, \quad Q(z) = Q'(z) = 0\,,$$

mit einer Konstanten $\bar{c} > 2(n-1)(m-1)\vartheta\gamma/\xi_{(K)}$ und

$$b(\tau) = \bar{p}(R_5,\tau) - \frac{m}{\xi_{(K)}} P\left(\frac{\xi_{(K)}}{m} R_5\right) - \tau e^{-2\gamma\tau} Q(R_5)$$

mit

$$\bar{p}(z,\tau) = e^{2\gamma\tau}\left(\bar{w}(z e^{-\gamma\tau},\tau) + \xi_{(K)}\right)\ .$$

Die eindeutige Lösbarkeit dieses Anfangswertproblems kann man mit derselben Methode zeigen, mit der wir die eindeutige Existenz einer Lösung von (2.29), die für $\phi \to \infty$ verschwindet, bewiesen haben.

Es gilt das folgende Lemma.

Lemma 2.13
Für große τ und R_5 ist

$$b(\tau) = -(\vartheta - 1 - o(1))\frac{2(n-1)m}{\xi_{(K)}}\log R_5 + \frac{2(n-1)m\vartheta\gamma\tau}{\xi_{(K)}} + O(\tau e^{-2\gamma\tau})$$

und

$$b'(\tau) = O(1)\ .$$

Beweis :
Man erhält die Behauptung durch direktes Einsetzen der asymptotischen Entwicklungen von P und P' für $z \to \infty$ sowie von $\bar{w}$ und $\bar{w}_\phi$ für $\phi \to 0$ in die Definition von b und b'. $\square$

Wir definieren nun eine stetige Funktion W durch

$$W(\phi,\tau)=\begin{cases}\bar{w}(\phi,\tau) & : \quad \phi\ge R_5e^{-\gamma\tau}\\[2ex] \tilde{w}(\phi,\tau) & : \quad \phi\le R_5e^{-\gamma\tau}\end{cases}$$

Dann gilt:

Lemma 2.14
Wählt man R_5 und τ_0 groß genug, dann erfüllt W die Differentialungleichung $\mathcal{B}[W]\ge 0$ für $0<\phi\le\phi^{(0)}(K_0;-\frac{1}{2}R_2e^{-\gamma\tau})$ und $\phi\ne R_5e^{-\gamma\tau}$, und es gilt

$$\lim_{\phi\uparrow R_5e^{-\gamma\tau}} W_\phi(\phi,\tau)\ \ge \lim_{\phi\downarrow R_5e^{-\gamma\tau}} W_\phi(\phi,\tau)\ ,\quad \tau\ge\tau_0 \tag{2.37}$$

Beweis:
Mit Hilfe der uns bekannten asymptotischen Entwicklungen erhalten wir

$$\tilde{p}_z(R_5,\tau)=\frac{\xi_{(K)}}{m(n-1)}\,R_5-\frac{m}{\xi_{(K)}}\,{R_5}^{-1}+O(Q^{'}(R_5)\tau e^{-2\gamma\tau})+o({R_5}^{-1})$$

und

$$\bar{p}_z(R_5,\tau)=\frac{\xi_{(K)}}{m(n-1)}\,R_5-\frac{2(n-1)\vartheta m}{\xi_{(K)}}\,{R_5}^{-1}+O((\tau+\log R_5)e^{-2\gamma\tau})$$

Da $\vartheta>1$ ist, gilt für hinreichend große R_5 und τ die Ungleichung $\tilde{p}_z(R_5,\tau)>\bar{p}_z(R_5,\tau)$ und daher (2.37).

Nach Lemma 2.12 ist $\mathcal{B}[W]\ge 0$ für $R_5\le z\le e^{-2\gamma\tau}\phi^{(0)}(K_0;-\frac{1}{2}R_2e^{-\gamma\tau})$. Um nachzuweisen, daß $\mathcal{B}[W]\ge 0$ auch für $0<z\le R_5$ gilt, beachten wir, daß W in dieser Region die Differentialgleichung

$$\mathcal{B}[W]=\frac{\xi_{(K)}}{m}-\left(\frac{\tilde{p}_{zz}}{1+\tilde{p}_z^2}+\frac{n-1}{z}\,\tilde{p}_z\right)+e^{-2\gamma\tau}\left\{\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tau}+\frac{m-1}{m}(z\tilde{p}_z-\tilde{p})\right\} \tag{2.38}$$

erfüllt, und schätzen die rechte Seite dieser Gleichung ab.

Es gilt

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\xi_{(K)}}{m}-\left(\tfrac{\tilde{p}_{zz}}{1+\tilde{p}_z^2}+\tfrac{n-1}{z}\,\tilde{p}_z\right)\\
=\;&\tfrac{\xi_{(K)}}{m}-\tfrac{n-1}{z}\,\tilde{p}_z-(\arctan\tilde{p}_z)_z\\
=\;&\tfrac{\xi_{(K)}}{m}-\tfrac{n-1}{z}\left(P^{'}\left(\tfrac{\xi_{(K)}}{m}z\right)+\tau e^{-2\gamma\tau}Q^{'}(z)\right)\\
&-\tfrac{\partial}{\partial z}\left\{\arctan\left(P^{'}\left(\tfrac{\xi_{(K)}}{m}z\right)\right)+\tfrac{1}{1+\left(P^{'}\left(\frac{\xi_{(K)}}{m}z\right)\right)^2}\,\tau e^{-2\gamma\tau}Q^{'}(z)+R(z,\tau)\,\tau^2e^{-4\gamma\tau}Q^{'}(z)^2\right\}
\end{aligned}$$

Dabei ist R eine nach z differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, daß R und R_z für $0 \le z \le R_5$ und $\tau \ge \tau_0$ gleichmäßig beschränkt sind.

Mit (1.24) folgt, daß

$$
\begin{aligned}
\frac{\xi_{(K)}}{m} - \left(\frac{\tilde{p}_{zz}}{1+\tilde{p}_z^2} + \frac{n-1}{z}\tilde{p}_z\right) &= -\tau e^{-2\gamma\tau}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{Q'(z)}{1+P'\left(\frac{\xi_{(K)}}{m}z\right)^2}\right) + \frac{n-1}{z}Q'(z)\right\} \\
&\quad + O\left(\tau^2 e^{-4\gamma\tau}\left(Q'(z)^2 + 2|Q'(z)Q''(z)|\right)\right) \\
&= \bar{c}\tau e^{-2\gamma\tau} + O(1)\, e^{-2\gamma\tau}
\end{aligned}
$$

ist.

Die anderen Summanden der rechten Seite von (2.38) lassen sich abschätzen durch

$$
\begin{aligned}
e^{-2\gamma\tau}\left\{\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tau} + \frac{m-1}{m}(z\tilde{p}_z - \tilde{p})\right\} &= e^{-2\gamma\tau}\left\{b'(\tau)\, O\left(\tau e^{-2\gamma\tau}\left(|Q'(z)| + z|Q'(z)|\right)\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{m-1}{m}\left(z\, P'\left(\frac{\xi_{(K)}}{m}z\right) - \frac{m}{\xi_{(K)}}\, P\left(\frac{\xi_{(K)}}{m}z\right) - b(\tau)\right)\right. \\
&= -\frac{2(n-1)(m-1)\vartheta\gamma}{\xi_{(K)}}\,\tau e^{-2\gamma\tau} + O(1)\, e^{-2\gamma\tau} \quad .
\end{aligned}
$$

Da $\bar{c} > \frac{2(n-1)(m-1)\vartheta\gamma}{\xi_{(K)}}$ ist, erhalten wir $\mathcal{B}[W] \ge 0$ für $0 < z \le R_5$ und hinreichend großes τ. $\square$

Bemerkung:
Die Variation der Konstanten Formel liefert natürlich auch eine exakte Lösungsformel für die Gewöhnliche Differentialgleichung (2.29). Die auftretenden Integrale lassen sich hier sogar explizit berechnen, so daß man für $w^{(1)}$ den Ausdruck

$$
\begin{aligned}
w^{(1)}(\phi) &= \frac{K}{2}\left(\frac{2(n-1)-\phi^2}{K}\right)^{1-\frac{1}{m}} \\
&\quad \times \left\{\frac{m}{2(n-1)}\log\left|\frac{\phi^2}{2(n-1)-\phi^2}\right| + \frac{2(m-1)}{2(n-1)-\phi^2} + C\right\} \quad ,
\end{aligned}
$$

wobei $C \in I\!R$ eine beliebige Integrationskonstante ist. Soll $w^{(1)}$ für $\phi \to \infty$ gegen 0 gehen, dann muß $C = 0$ sein.

Aus dieser Lösungsformel kann man das oben diskutierte asymptotische Verhalten von $w^{(1)}$ auch direkt ableiten. Da aber die Methode, die in diesem Abschnitt gezeigt wurde, rechentechnisch einfacher durchzuführen ist, und die explizite Kenntnis von $w^{(1)}$ auch im folgenden nicht benötigt wird, wurde sie der direkten Berechnung von $w^{(1)}$ vorgezogen.

Kapitel 3

Der Beweis des Haupttheorems

Die a priori Abschätzungen und die Sub- und Superlösungen aus Kapitel 2 ermöglichen uns nun, das Theorem 1.5 zu beweisen.

3.1 Der Existenzbeweis

Wir werden als erstes das Exit-Lemma und die Existenzaussage des Theorems 1.4 zeigen. Der Schlüssel zum Beweis werden dabei die folgenden Resultate sein.

Lemma 3.1
Sei $\{\Gamma(t) : t_0 \leq t < t_1\}$ eine Lösung des MCF mit $\Gamma(t_0) \in \mathcal{S}(t_0)$ und $\Gamma(t) \in \mathcal{F}(t)$ für $t \in [t_0, t_1)$. Außerdem existiere ein $M > 1$ mit $M^2 = 3B^{-1}M_0$, wobei M_0 die Konstante aus Kapitel 1 und B die Konstante aus Lemma 2.1 ist, so daß

$$|\,\psi(y,\tau)\,| + |\,\psi_y(y,\tau)\,| + |\,\psi_{yy}(y,\tau)\,| \leq Me^{-m\gamma\tau}(1+\,|\,y\,|)^m$$

für $|\,y\,| \leq 2Re^{\gamma\tau}$ und $\tau_o \leq \tau < \tau_1$ ist.
Dann gilt die Abschätzung

$$|\,\psi(y,\tau)\,| \leq C(K_0, M_1, \delta, R)(1+\,|\,y\,|)^m e^{-m\gamma\tau} \tag{3.1}$$

für $|\,y\,| \leq 3Re^{\gamma\tau}$ und $\tau_o \leq \tau < \tau_1$, sofern man τ_0 genügend groß wählt. Die Konstante C hängt dabei nicht von M ab. Verkleinert man δ und R, dann wird auch C kleiner.

Beweis :
Nach Lemma 2.6 gilt (3.1) bereits für $|y| \leq R_2 < Re^{\gamma\tau}$. Wir werden nun mit Hilfe des parabolischen Maximumprinzips und der Sub- und Superlösungen aus dem Abschnitt 2.2 zeigen, daß diese Abschätzung auch für $R_2 \leq |y| \leq 3Re^{\gamma\tau}$ gilt. Dazu benötigen wir neben den Anfangsbedingungen aus 1.2 und einigen a priori Schranken aus 2.1 noch eine Kontrolle über das Verhalten von $\Gamma(t)$ am rechten Rand dieser Region.

Sei S_n^r die n-Sphäre vom Radius r und $r_0 > \sqrt{2n(T-t_0)}$. Dann ist $S(t) := S^n_{r(t)}$ mit $r(t) = \sqrt{r_0^2 - 2n(t-t_0)}$ eine Lösung des MCF für $t_0 \leq t \leq T$. Insbesondere gilt

$$|r(t) - r(t_0)| \leq |r(t)^2 - r(t_0)^2|^{1/2} \leq \sqrt{2n(t-t_o)}\ \ .$$

Verwenden wir diese Lösung als Barriere, dann erhalten wir mit Hilfe des Maximumprinzips für den MCF, siehe [Hu2], Lem.3.2, folgendes Resultat. Sei die Funktion $F_0 : M^n \to \Gamma(t_0)$ definiert durch $F_0(p) = F(p, t_0)$. Dann gilt für alle $q \in \Gamma(t_0)$ und $t \in (t_0, t_1)$ die Abschätzung

$$\operatorname{dist}(F(F_0^{-1}(q), t), q) \leq \sqrt{2n(T - t_o)} \ . \tag{3.2}$$

Dieses Wissen wird uns eine ausreichende Kontrolle des rechten Randes ermöglichen.

Seien im folgenden die Parameter R_2, δ und τ_0 wie in Korollar 2.9 gewählt. Dann können wir dem Beweis dieses Korollares entnehmen, daß $\phi_\xi(\phi^{-1}(\phi^{(0)}(K_0; \pm\frac{3}{4}R_2 e^{-\gamma\tau}))) > 0$ für alle $\tau \in [\tau_0, \tau_1)$ ist. Außerdem strebt ϕ_ξ gegen $+\infty$, wenn ξ gegen das linke Ende von $\Gamma(t)$ läuft. Seien darüber hinaus $u_x(R, t_0)$ und τ_0 so groß gewählt, daß wir aus den Gradientenabschätzungen von Ecker-Huisken, vgl. [EH], Ch.2, folgern können, daß $\phi_\xi(Re^{\frac{\tau}{m}}) > 0$ für alle $\tau \in [\tau_0, \tau_1)$ ist. Da ϕ_ξ eine lineare parabolische Differentialgleichung erfüllt, ist daher die Funktion ϕ nach dem Maximumprinzip in den Regionen $\phi_\xi(\phi^{-1}(\phi^{(0)}(K_0; \frac{3}{4}R_2 e^{-\gamma\tau}))) \leq \xi \leq Re^{\frac{\tau}{m}}$ und $\xi \leq \phi_\xi(\phi^{-1}(\phi^{(0)}(K_0; -\frac{3}{4}R_2 e^{-\gamma\tau})))$ mit $\tau_0 \leq \tau < \tau_1$ invertierbar. Damit können wir in (w, ϕ)-Koordinaten übergehen und die Sub- und Superlösungen aus 2.2 ausnutzen.

Untersuchen wir zunächst die Region $\phi^{(0)}(K_0; \frac{3}{4}R_2 e^{-\gamma\tau})) \leq \phi \leq \phi(Re^{\frac{\tau}{m}})$. In dieser Region werden wir die Superlösung $w^{(0)}(K_0 - 3\delta)$ und die Sublösung $\bar{w}(K_0 + \frac{5}{2}\delta)$, deren Graph zwischen den Graphen von $w^{(0)}(K_0 + 2\delta)$ und $w^{(0)}(K_0 + 3\delta)$ liegt, verwenden.

Seien nun δ so klein und τ_0 in Abhängigkeit von allen anderen Parametern so groß gewählt, daß

$$\phi^{(0)}(K_0 + 2\delta; \frac{1}{2}Re^{-\gamma\tau_0}) < \phi^{(0)}(K_0; \frac{3}{4}Re^{-\gamma\tau_0}) < \phi^{(0)}(K_0 - 3\delta; Re^{\frac{\tau_0}{m}})$$

ist. Dann folgt aus der Anfangsbedingung (1.33), daß

$$\bar{w}(K_0 + \frac{5}{2}\delta; \phi, \tau) \leq w(\phi, \tau) \leq w^{(0)}(K_0 - 3\delta; \phi)$$

für $\tau = \tau_0$ und $\phi \in [\phi^{(0)}(K_0; \frac{3}{4}Re^{-\gamma\tau_0}), \phi^{(0)}(K_0 - 3\delta; Re^{\frac{\tau_0}{m}})]$ gilt. Aufgrund von Korollar 2.8 erhalten wir dieselbe Ungleichung auch für $\phi = \phi^{(0)}(K_0; \frac{3}{4}Re^{-\gamma\tau})$ und $\tau \in [\tau_0, \tau_1)$.

Sei $\tilde{C} \in [\frac{1}{2}\left(\frac{K_0 - 3\delta}{K_0 + \delta}\right)^{\frac{1}{m}}, \left(\frac{K_0 - 3\delta}{K_0 + \delta}\right)^{\frac{1}{m}}]$. Aufgrund von (1.33) gilt dann

$$\phi(\tilde{C}Re^{\frac{\tau_0}{m}}, \tau_0) \leq \phi^{(0)}(K_0 + \delta; \tilde{C}Re^{\frac{\tau_0}{m}}) \leq \phi^{(0)}(K_0 - 3\delta; Re^{\frac{\tau_0}{m}}) \ .$$

Sei außerdem τ_0 so groß, daß $R_2 e^{-\gamma\tau} < \tilde{C}Re^{\frac{\tau_0}{m}}$ ist. Da wir dem Beweis von Korollar 2.9 entnehmen können, daß $\phi^{-1}(\phi^{(0)}(K_0; \frac{3}{4}R_2 e^{-\gamma\tau})) \leq R_2 e^{-\gamma\tau}$ für alle $\tau \in [\tau_0, \tau_1)$ ist, folgt aufgrund der Monotonie von ϕ, daß

$$\phi(\tilde{C}Re^{\frac{\tau}{m}}, \tau) \geq \phi^{(0)}(K_0; \frac{3}{4}R_2 e^{-\gamma\tau})$$

für $\tau_0 \le \tau < \tau_1$ ist.

Wegen (1.33) und (3.2) gilt

$$\phi(\tilde{C}Re^{\frac{\tau}{m}}, \tau) \;\le\; \phi^{(0)}(K_0 + \delta; (\tilde{C}R + \sqrt{2n}e^{-\frac{\tau_0}{2}})e^{\frac{\tau}{m}}) + \sqrt{2n}e^{-\frac{\tau-\tau_0}{2}}$$

für $\tau \in [\tau_0, \tau_1)$. Nach Definition von $\phi^{(0)}$ erhalten wir daraus für hinreichend großes τ_0 die Abschätzung

$$\phi(\tilde{C}Re^{\frac{\tau}{m}}, \tau) \;\le\; \phi^{(0)}(K_0 + 2\delta; \tilde{C}Re^{\frac{\tau}{m}})$$

für $\tau \in [\tau_0, \tau_1)$. Ebenso haben wir

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{C}Re^{\frac{\tau}{m}}, \tau) \;&\ge\; \phi^{(0)}(K_0 - \delta; (\tilde{C}R - \sqrt{2n}e^{-\frac{\tau_0}{2}})e^{\frac{\tau}{m}}) - \sqrt{2n}e^{-\frac{\tau-\tau_0}{2}} \\ &\ge\; \phi^{(0)}(K_0 - 2\delta; \tilde{C}Re^{\frac{\tau}{m}}) \end{aligned}$$

für $\tau \in [\tau_0, \tau_1)$. Da die Funktion $w^{(0)}$ streng monoton steigend ist, folgt somit die Ungleichung

$$\bar{w}(K_0 + \frac{5}{2}\delta; \phi(\tilde{C}Re^{\frac{\tau}{m}}, \tau), \tau) \;\le\; w(\phi(\tilde{C}Re^{\frac{\tau}{m}}, \tau), \tau) \;\le\; w^{(0)}(K_0 - 3\delta; \phi(\tilde{C}Re^{\frac{\tau}{m}}, \tau))$$

für alle $\tau_0 \le \tau < \tau_1$.

Nun können wir das parabolische Maximumprinzip anwenden und erhalten dadurch die Beziehung

$$\phi^{(0)}(K_0 - 3\delta, \xi) \;\le\; \phi(\xi, \tau) \le \phi^{(0)}(K_0 + 3\delta, \xi) \tag{3.3}$$

für

$$w^{(0)}(K_0 - 3\delta; \phi^{(0)}(K_0; \frac{3}{4}R_2e^{-\gamma\tau})) \;\le\; \xi \;\le\; w^{(0)}(K_0 + 3\delta; \phi(\tilde{C}Re^{\frac{\tau}{m}}, \tau)))$$

und $\tau \in [\tau_0, \tau_1)$. Dabei ist

$$w^{(0)}(K_0 - 3\delta; \phi^{(0)}(K_0; \frac{3}{4}R_2e^{-\gamma\tau})) = \left(\frac{K_0}{K_0 - 3\delta}\right)^{\frac{1}{m}} \frac{3}{4}R_2e^{-\gamma\tau}$$

und

$$w^{(0)}(K_0 + 3\delta; \phi(\tilde{C}Re^{\frac{\tau}{m}}, \tau)) \;\le\; \left(\frac{(K_0 - 2\delta)(K_0 - 3\delta)}{2(K_0 + 3\delta)(K_0 + \delta)}\right)^{\frac{1}{m}} Re^{\frac{\tau}{m}} \;\; .$$

Somit gilt (3.3) für hinreichend kleines δ auf dem Intervall

$$\frac{7}{8}R_2e^{-\gamma\tau} \;\le\; \xi \;\le\; CRe^{\frac{\tau}{m}} \;\; , \tag{3.4}$$

wobei die Konstante C nur von K_0 und δ abhängt.

Betrachten wir nun die Region $(0, \phi^{(0)}(K_0; -\frac{3}{4}R_2e^{-\gamma\tau})]$. In dieser Region ist die Funktion $w^{(0)}(K_0 - 3\delta)$ eine Sublösung und die Funktion $W(K_0 + \frac{5}{2}\delta)$ aus Lemma 2.14 eine Superlösung, deren Graph für genügend großes τ_0 zwischen den Graphen von $w^{(0)}(K_0 + 2\delta)$ und $w^{(0)}(K_0 + 3\delta)$ liegt.

Aufgrund der Anfangsbedingung (1.34) und der Randbedingung (2.25) erhalten wir bei entsprechender Wahl unserer Parameter die Ungleichung

$$w^{(0)}(K_0 - 3\delta, \phi) \;\leq w(\phi, \tau) \;\leq\; W(K_0 + \frac{5}{2}\delta, \phi, \tau)$$

für $\tau = \tau_0$ auf $[0, \phi^{(0)}(K_0; -\frac{3}{4}R_2 e^{-\gamma\tau})]$ und für $\tau_0 \leq \tau < \tau_1$ bei $\phi = \phi^{(0)}(K_0; -\frac{3}{4}R_2 e^{-\gamma\tau})$.

Wir lassen nun die Graphen dieser Funktionen um die ξ-Achse rotieren und interpretieren die entstehenden Flächen als Graphen über der Ebene, die senkrecht zur ξ-Achse ist. Dann sind die zugehörigen Funktionen dieser Graphen in entsprechender Weise wie die obigen Funktionen Lösung, Sublösung bzw. Superlösung einer parabolischen Differentialgleichung. Diese Gleichung hat aber im Gegensatz zur Gleichung $\mathcal{B}[w] = 0$ keine Singularität bei $\phi = 0$. Somit können wir das parabolische Maximumprinzip anwenden und bekommen dadurch die Beziehung

$$\phi^{(0)}(K_0 + 3\delta, \xi) \;\leq\; \phi(\xi, \tau) \;\leq\; \phi^{(0)}(K_0 - 3\delta, \xi) \tag{3.5}$$

für $\xi \leq -\frac{7}{8}R_2 e^{-\gamma\tau}$ und $\tau_0 \leq \tau < \tau_1$, falls δ hinreichend klein ist.

Aus (3.3), (3.4) und (3.5) folgt nun, daß bei genügend großem τ_0 die Abschätzung (3.1) auch für $R_2 \leq |y| < 3Re^{-\gamma\tau}$ mit $\tau \in [\tau_0, \tau_1)$ gültig ist. $\square$

Dasselbe Phänomen tritt auch bei der ersten und zweiten y-Ableitung von ψ auf.

Lemma 3.2
Sei $\{\Gamma(t) : t_0 \leq t < t_1\}$ wie in Lemma 3.1. Dann gilt die Abschätzung

$$|\,\psi(y,\tau)\,| + |\,\psi_y(y,\tau)\,| + |\,\psi_{yy}(y,\tau)\,| \leq C'(K_0, M_1, \delta, R)(1 + |\,y\,|)^m e^{-m\gamma\tau} \tag{3.6}$$

für $|\,y\,| \leq 2Re^{\gamma\tau}$ und $\tau_o \leq \tau < \tau_1$. Die Konstante C' hängt ebenfalls nicht von M ab. Verkleinert man δ und R, dann wird auch C' kleiner.

Beweis :
Die Funktion ψ löst die Differentialgleichung

$$\psi_\tau(y,\tau) = \frac{\psi_{yy}(y,\tau)}{1 + \psi_y(y,\tau)^2} - \frac{y}{2}\,\psi_y(y,\tau) + f(\psi)(y,\tau) \;\;,$$

wobei $f(\psi)$ für $|\psi| < \sqrt{2(n-1)}$ eine glatte Funktion und $f(0) = 0$ ist.

Wir fixieren nun einen Punkt (y_*, τ_*) mit

$$|y_*| \leq 2Re^{\gamma\tau_*} \;\;, \tau_* \in [\tau_0, \tau_1)$$

und definieren eine Funktion v durch

$$v(\zeta, s) = \psi\left(\frac{y_* + \zeta}{\sqrt{1-s}}, \tau_* + \log\frac{1}{1-s}\right) \;\;.$$

Sei außerdem $Q := \{(\zeta, s) : |\zeta| < 1,\, s^* < s < 0\}$, wobei $s^* = \max\{1 - e^{\tau_* - \tau_0}, -1\}$ ist. Dann erfüllt die Funktion v auf Q die quasilineare parabolische Differentialgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial s}(\zeta, s) = \frac{v_{\zeta\zeta}(\zeta, s)}{1 + (1-s)v_\zeta(\zeta, s)^2} + \frac{f(v)(\zeta, s)}{1-s} \quad . \tag{3.7}$$

Diese Gleichung hat die Form

$$v_s \;=\; a(\zeta, s, v, v_\zeta)v_{\zeta\zeta} + b(\zeta, s, v, v_\zeta) \quad ,$$

wobei

$$|b(\zeta, s, v, v_\zeta)| \leq C(1 + v_\zeta^2)|a(\zeta, s, v, v_\zeta)|$$

auf ganz Q ist. Nach (3.1) ist $\sup_Q |\psi| < \frac{1}{2}\sqrt{2(n-1)}$. Daher ist die Funktion $f(v)$ auf Q beschränkt und glatt.

Aufgrund dieser Eigenschaften können wir die inneren Abschätzungen aus [Lb], S. 251-263, anwenden und erhalten

$$|v_\zeta(0,0)| + |v_{\zeta\zeta}(0,0)| \;\leq\; C_0 \sup_Q |v(\zeta, s)| \quad , \tag{3.8}$$

falls $\tau_* \in (\tau_0 + \log 2, \tau_1)$ und somit $s^* = -1$ ist, sowie

$$|v_\zeta(0,0)| + |v_{\zeta\zeta}(0,0)| \;\leq\; C_0\{\sup_Q |v(\zeta, s)| + \sup_{|\zeta|<1} |v_{\zeta\zeta}(\zeta, s^*)|\} \quad , \tag{3.9}$$

falls $\tau_* \in (\tau_0, \tau_0 + \log 2)$ ist.

Aus den Abschätzungen (3.8) und (3.9) folgt nun aufgrund des vorherigen Lemmas und der Anfangsbedingung (1.30) die gewünschte Schranke für die ersten beiden y-Ableitungen von ψ an der Stelle (y_*, τ_*). Da τ_* ein beliebiges Element aus (τ_0, τ_1) und y_* ein beliebiges Element aus $[-2Re^{\gamma\tau_*}, 2Re^{\gamma\tau_*}]$ war, ist damit das Lemma bewiesen. □

Das Lemma 3.1 hat folgende weitere wichtige Konsequenz.

Lemma 3.3
Sei $\{\Gamma(t) : t_0 \leq t < t_1\}$ wie in Lemma 3.1. Außerdem liege $\Gamma(t)$ für alle $t \in [\tau_0, \tau_1)$ im Inneren von $\mathcal{F}(t)$. Ist $t_1 < T$, dann kann $\{\Gamma(t) : t_0 \leq t \leq t_1\}$ keine maximale Lösung des MCF sein.

Beweis:
Sei $\{\Gamma(t) : t_0 \leq t < t_1\}$ eine Lösung des MCF, die die Voraussetzungen dieses Lemmas erfüllt, und sei $t_1 < T$. Wir zeigen nun, daß $\sup_{\Gamma(t)} |A|^2$ für $t \to t_1$ beschränkt bleibt, und erhalten damit die Behauptung des Lemmas. Zur Abschätzung der 2. Fundamentalform zerlegen wir die Lösungsflächen in die Regionen $F_1(t) := \{\vec{x} \in \Gamma(t) : x \geq \frac{3}{4}CR\}$, $F_2(t) := \{\vec{x} \in \Gamma(t) : -\frac{1}{2}R(T - t_1)^{1/m} \leq x \leq \frac{3}{4}CR\}$ und $F_3(t) := \{\vec{x} \in \Gamma(t) : x \leq -\frac{1}{2}R(T - t_1)^{1/m}\}$, wobei C die Konstante aus (3.4) ist.

Betrachten wir zunächst die Region $F_1(t)$. Nach (3.3) und (3.4) existiert ein $r_0 = r_0(K_0, R, \delta) > 0$, so daß $u(x,t) \geq r_0$ für $\frac{1}{2}CR \leq x \leq CR$ und $t \in [t_0, t_1)$ ist. Sei $r_* = \min\{\frac{1}{4}CR, r_0\}$, $B_{r_*}(\frac{3}{4}CR, 0, ..., 0)$ die Kugel um $(\frac{3}{4}CR, 0, ..., 0)$ mit Radius r_* und $B'_{r_*}(\frac{3}{4}CR, 0, ..., 0)$ die Schnittmenge von $B_{r_*}(\frac{3}{4}CR, 0, ..., 0)$ mit der Hyperebene $\{x_{n+1} = 0\}$. Dann gibt es für alle $t \in [t_0, t_1)$ eine Umgebung U(t) von $(\frac{3}{4}CR, 0, ..., u(\frac{3}{4}CR, t))$ auf $\Gamma(t)$, die sich als Graph über $B'_{r_*}(\frac{3}{4}CR, 0, ..., 0)$ schreiben läßt. Da die Gradientenfunktion dieser Graphen nach den Gradientenabschätzungen von Ecker-Huisken für $t \to t_1$ beschränkt bleibt, trifft dies nach einer Krümmungsabschätzung von Ecker-Huisken, siehe [EH], Cor. 3.2, auch für $\sup\limits_{B'_{r_*}(\frac{3}{4}CR,0,...,0)} |A|^2$ zu, wobei die zugehörige Schranke nur von r_* abhängt. Aus Symmetriegründen gilt dasselbe für $\sup\limits_{\{\vec{x}\in\Gamma(t):\, x=\frac{3}{4}CR\}} |A|^2$. Da $|A|^2$ die Evolutionsgleichung

$$\partial_t |A|^2 = \Delta |A|^2 + 2|A|^4 - 2|\nabla A|^2$$

erfüllt, siehe [EH], Lem. 1.1 , folgt aus der obigen Krümmungsabschätzung nach dem parabolischen Maximumprinzip für Riemannsche Mannigfaltigkeiten, daß $\sup\limits_{F_1(t)} |A|^2$ für $t \to t_1$ beschränkt bleibt, wenn $T - t_0$ klein genug, also τ_0 groß genug ist.

Wenden wir uns nun der Region $F_2(t)$ zu. Aus (3.1) folgt, daß $u(x,t) \geq \frac{1}{2}\sqrt{2(n-1)(T-t_1)}$ für $-\frac{1}{2}R(T-t_1)^{1/m} \leq x \leq CR$ ist. Daher erhalten wir mit analoger Argumentation wie bei $F_1(t)$, daß $\sup\limits_{F_2(t)} |A|^2$ für $t \to t_1$ beschränkt bleibt, wenn τ_0 groß genug gewählt wird.

Untersuchen wir schließlich die Region $F_3(t)$. Wie wir dem Beweis von Lemma 3.1 entnehmen können, existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $u_x(x,t) \geq \varepsilon$ für alle $x \leq -\frac{1}{2}R(T - t_1)^{1/m}$ und $t \in [t_0, t_1)$ ist. Sei $B''_{u(-\frac{1}{2}R(T-t_1)^{1/m},t)}(0)$ die Schnittmenge der Kugel $\mathrm{B}_{u(-\frac{1}{2}R(T-t_1)^{1/m},t)}(0)$ mit der Hyperebene $\{x = 0\}$. Dann kann man $F_3(t)$ für alle $t \in [t_0, t_1)$ als Graph über $B''_{u(-\frac{1}{2}R(T-t_1)^{1/m},t)}(0)$ schreiben, wobei die Gradientenfunktion dieser Graphen für alle $t \in [t_0, t_1)$ durch ε^{-1} beschränkt ist. Somit können wir wiederum die oben zitierte Krümmungsabschätzung von Ecker-Huisken anwenden und erhalten dadurch, daß auch $\sup\limits_{F_3(t)} |A|^2$ für $t \to t_1$ beschränkt bleibt. $\square$

Mit Hilfe dieser drei Lemmata können wir nun das Exit-Lemma und die Existenzaussage des Theorems 1.5 beweisen.

Sei $K_0 > 0$ vorgegeben. Man wähle zunächst ein beliebiges M_0 der Größenordnung $O(K_0)$ und beliebige δ und δ_* der Größenordnung $o(K_0)$. Seien nun R, R_2, M_1 und τ_0 in Abhängigkeit von K_0, M_0, δ und δ_* so klein bzw. so groß, daß die Hyperflächen aus Satz 1.4 die Hypothesen des Shooting-Lemmas erfüllen und außerdem die Differentialungleichungen aus Lemma 2.1 für $M = \max\{2M_1, 1\}$ gelten.

Man ändere jetzt M_0 ab zu $M_0 = 3BM^2$, wobei B die Konstante aus Lemma 2.1 ist. Anschließend korrigiere man die Größenordnung von R, R_2, δ, δ_* und τ_0, so daß die Hyperflächen aus Satz 1.4 auch für das neue M_0 die Hypothesen des Shooting-Lemmas erfüllen und zusätzlich sämtliche Abschätzungen aus Kapitel 2 und aus diesem Abschnitt gelten. Den Wert von B kann man unverändert lassen. Da das neue R höchstens so groß wie das alte ist, würde dies auch für ein neues B gelten. Infolgedessen bleibt die Gültigkeit sämtlicher Abschätzungen, in denen B auftritt, auch für das alte B erhalten.

Seien nun $\mathcal{S}(t_0)$ und $\mathcal{F}(t)$ durch die eben gewählten Konstanten festgelegt und sei $\{\tilde{\Gamma}(t) : t_0 \leq t < t_1\}$ eine Lösung des MCF mit $\tilde{\Gamma}(t_0) \in \mathcal{S}(t_0)$ und $\tilde{\Gamma}(t) \in \mathcal{F}(t)$ für alle $t \in [t_0, t_1)$. Die Existenz solcher Lösungen ist uns nach der Bemerkung im Anschluß an Satz 1.4 bekannt. Aufgrund der Anfangsbedingung (1.30) erfüllt $\{\tilde{\Gamma}(t)\}$ zumindest für einen kurzen Zeitraum die Ungleichung (1.38). Nach Lemma 3.2 gilt für diesen Zeitraum auch die Ungleichung (3.6).

Sei von nun an $M = \max\{1, 2M_1, 2C'\}$, wobei C' die Konstante aus Lemma 3.2 ist, und $M_0 = 3BM^2$. Man korrigiere erneut die Größenordnung von R, R_2, δ, δ_* und τ_0, so daß alle im vorletzten Absatz genannten Resultate auch für die neuen Werte von M und M_0 gültig bleiben. Da R und δ dabei allenfalls kleiner werden, lasse man den Wert von C' unverändert.

Seien nun $\mathcal{S}(t_0)$ und $\mathcal{F}(t)$ durch die neuen Konstanten festgelegt und sei $\{\Gamma(t) : t_0 \leq t < t_1\}$ eine maximale klassische Lösung des MCF mit $\Gamma(t_0) \in \mathcal{S}(t_0)$. Außerdem sei $\Gamma(t) \in \mathcal{F}(t)$ für alle $t \in [t_0, t_1)$. Dann erfüllt $\{\Gamma(t)\}$ wiederum nach (1.30) zumindest für einen kurzen Zeitraum die Ungleichung (1.38). Da C' nicht von M abhängt, gilt (1.38) aufgrund von Lemma 3.2 sogar auf ganz $[t_0, t_1)$. Infolgedessen können wir Lemma 3.3 anwenden und erhalten, daß $t_1 = T$ ist.

Da wir den Rest von Teil (a) des Exit-Lemmas bereits im Anschluß an dessen Formulierung geklärt haben, ist dieser Teil nun bewiesen. Der Teil (b) folgt nach Definition von $\partial\mathcal{F}(t)$ und nach Wahl von M_0 direkt aus dem Korollar 2.2.

Mit dem Exit-Lemma gilt auch das Shooting-Lemma. Außerdem haben wir alle Konstanten so gewählt, daß die Hyperflächen aus Satz 1.4 die Hypothesen des Shooting-Lemmas erfüllen. Daher folgt nach dem Shooting-Lemma die Existenzaussage des Theorems 1.5. $\square$

3.2 Der Konvergenzbeweis

Wir wollen nun auch die Konvergenzaussagen von Theorem 1.5 beweisen. Als erstes zeigen wir

Theorem 3.4
Es gilt

$$\lim_{\tau \to \infty} \phi(\xi, \tau) \;=\; \phi^{(o)}(K_\infty; \xi) \tag{3.10}$$

gleichmäßig auf kompakten ξ - Intervallen.

Beweis:
Wir zeigen zunächst, daß für jedes $A > 0$ gilt:

$$\lim_{\tau\to\infty} e^{m\gamma\tau}\, \psi(y,\tau) \;=\; \frac{K_\infty}{2\sqrt{2(n-1)}}\, Hm_m(y) \tag{3.11}$$

gleichmäßig für $|y| \leq A$.

Sei dazu ein beliebiges $A > 0$ vorgegeben und sei $\tau_A \geq \tau_o$ so groß, daß $A < Re^{\gamma\tau_A}$ ist. Wir definieren nun eine Funktion $\bar{\Upsilon}$ durch

$$\bar{\Upsilon}(y,\tau) \;=\; \Psi(y,\tau) \;-\; \frac{K_\infty}{2\sqrt{2(n-1)}}\, e^{-m\gamma\tau}\, Hm_m(y)$$

für $y \in R$ und $\tau \geq \tau_A$. Aufgrund der Korollare 2.3, 2.4 und 2.5 ist dann

$$\begin{aligned}
\|\bar{\Upsilon}(y,\tau)\| \;&\leq\; \|\Psi^u(\tau)\| + \|\Psi^s(\tau)\| + \|\Psi^c(\tau) \;-\; \tfrac{K_\infty}{2\sqrt{2(n-1)}}\, e^{-m\gamma\tau}\, Hm_m(y)\| \\
&\leq\; [3BM^2 e^{-m\gamma\tau} + (1-\tau-\tau_A)e^{-\frac{\tau-\tau_A}{2}}\{\delta + BM^2 e^{-m\gamma\tau_A}\} \\
&\qquad + BM^2 e^{-m\gamma\tau}]\, e^{-m\gamma\tau} \\
&\leq\; \varepsilon_1(M_1, R, \delta, \tau\uparrow) e^{-m\gamma\tau}\,.
\end{aligned}$$

Aus dieser Abschätzung erhält man durch analoge Argumentation wie im Beweis von Lemma 2.6, daß für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\sup_{|y|\leq A} \left| \psi(y,\tau)e^{m\gamma\tau} - \frac{K_\infty}{2\sqrt{2(n-1)}} Hm_m(y) \right| \leq \varepsilon \tag{3.12}$$

ist, wenn $\tau > \tau_\varepsilon(M_1, R, A, \delta, \varepsilon)$ ist.

Da A beliebig war, folgt die Behauptung.

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann erhält man mit einer Taylorentwicklung von $\phi^{(o)}$ um $\xi = 0$ bis zu Potenzen 2. Ordnung, daß

$$\begin{aligned}
|\phi(y,\tau) - \phi^{(o)}(K_\infty;\xi)| \;&=\; |\psi(e^{\gamma\tau}\xi,\tau) - \tfrac{K_\infty}{2\sqrt{2(n-1)}} e^{-m\gamma\tau}(e^{\gamma\tau}\xi)^m| + O(\xi^{2m}) \\
&\leq\; |\psi(e^{\gamma\tau}\xi,\tau) - \tfrac{K_\infty}{2\sqrt{2(n-1)}} e^{-m\gamma\tau} Hm_m(e^{\gamma\tau}\xi)| \\
&\qquad + \tfrac{K_\infty}{2\sqrt{2(n-1)}} e^{-m\gamma\tau} |Hm_m(e^{\gamma\tau}\xi) - (e^{\gamma\tau}\xi)^m| + O(\xi^{2m}) \\
&\leq\; \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.13}$$

für $|\xi| \leq Ae^{-\gamma\tau}$ und genügend großes τ ist.

Wir wollen nun diese Information mit Hilfe des Maximumprinzips in Intervalle der Größenordnung $\xi = O(1)$ transportieren.

Betrachten wir die Gleichung (2.28). Da für große τ der Term 2. Ordnung sehr klein wird, untersuchen wir zunächst die Partielle Differentialgleichung 1. Ordnung

$$w_\tau = \left(\frac{n-1}{\phi} - \frac{\phi}{2}\right) w_\phi + \frac{w}{m}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung kann man mit Hilfe der Methode der Charakteristiken explizit bestimmen. Sie lautet

$$w^{(o)}(K_\infty;\phi)\lambda[e^{\tau_*-\tau}(\phi^2 - 2(n-1))],$$

wobei λ eine beliebige C^1 - Funktion und $\tau_* \in I\!R$ eine beliebige Konstante ist.

Wir konstruieren nun Sub- und Superlösungen von $\mathcal{B}$ der Form

$$\overline{w}(\phi,\tau) = \overline{\lambda}[e^{\tau_*-\tau}(\phi^2 - 2(n-1))]w^{(o)}(K_\infty;\phi),$$

$$\underline{w}(\phi,\tau) = \underline{\lambda}[e^{\tau_*-\tau}(\phi^2 - 2(n-1))]w^{(o)}(K_\infty;\phi) + 2e^{-2\gamma\tau}w^{(1)}(K_\infty;\phi),$$

wobei $\overline{\lambda}$ und $\underline{\lambda}$ C^2 - Funktionen sind, welche im folgenden bestimmt werden.

Nach (3.3), (3.4) und (3.5) ist

$$\frac{w(\phi,\tau)}{w^{(o)}(K_\infty;\phi)} \le \frac{w^{(o)}(K_o - 3\delta;\phi)}{w^{(o)}(K_\infty;\phi)} \le \left(\frac{K_o + 2\delta}{K_o - 3\delta}\right)^{\frac{1}{m}} \le 1 + \sigma(\delta\downarrow) \tag{3.14}$$

und

$$\frac{w(\phi,\tau)}{w^{(o)}(K_\infty;\phi)} \ge \frac{w^{(o)}(K_o + 3\delta;\phi)}{w^{(o)}(K_\infty;\phi)} \ge \left(\frac{K_o - 2\delta}{K_o + 3\delta}\right)^{\frac{1}{m}} \ge 1 - \sigma(\delta\downarrow) \tag{3.15}$$

für $\phi \in I_1(\tau) := [\phi^{(o)}(K_\infty; Ae^{-\gamma\tau}), A^{-1}e^{\frac{\tau}{2}}]$ und
$\phi \in I_2(\tau) := [-\phi^{(o)}(K_\infty; -Ae^{-\gamma\tau}), \phi^{(o)}(K_\infty; -Ae^{-\gamma\tau})]$,
sofern A hinreichend groß gewählt worden ist.

Außerdem wissen wir aus dem Abschnitt 2.2, daß auf $I_1(\tau)$ und
$\tilde{I}_2(\tau) := [Ae^{-\gamma\tau}, \phi^{(o)}(K_\infty; -Ae^{-\gamma\tau})]$ die Ungleichung

$$|e^{-2\gamma\tau}w^{(1)}(K_\infty;\phi)| \le \rho(A\uparrow,\tau\uparrow)\,|w^{(0)}(K_\infty;\phi)| \tag{3.16}$$

erfüllt ist.

Aus (3.11) erhält man analog den Beweisen der Korollare 2.8 und 2.9 sogar folgende Abschätzung. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $A(\varepsilon)$, so daß es für jedes feste $A > A(\varepsilon)$ ein $\tau(A,\varepsilon) > \tau_o$ gibt, so daß

$$1 - \varepsilon \le \frac{w(\phi,\tau)}{w^{(o)}(K_\infty;\phi)} \le 1 + \varepsilon \tag{3.17}$$

für $\phi = \phi^{(o)}(K_\infty; \pm A e^{-\gamma\tau})$ und $\tau > \tau(A,\varepsilon)$ ist.

Seien nun $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < \sigma(\delta)$ vorgegeben und $\bar{A} > A(\varepsilon)$ und $\tau_* \geq \tau(A,\varepsilon)$ so gewählt, daß $\rho(\bar{A},\tau_*) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Sei außerdem $\overline{\lambda}$ eine C^2 - Funktion mit

$$\overline{\lambda}(s) = \begin{cases} 1+2\sigma(\delta) & : \quad |s| \geq s_1 \\ 1+2\varepsilon & : \quad |s| \leq s_0 \end{cases},$$

wobei $s_1 = \phi^{(o)}(K_\infty; \bar{A}e^{-\gamma\tau_*})^2 - 2(n-1)$ und $s_0 \in (0,s_1)$ ist. Darüber hinaus gelte $\overline{\lambda}'(s) \geq 0$ für $s \geq 0$ und $\overline{\lambda}'(s) \leq 0$ für $s \leq 0$. Des weiteren sei $\underline{\lambda} = 2 - \overline{\lambda}$.

O.b.d.A können wir annehmen, daß

$$S(\overline{\lambda}) := \sup_{s\in I\!R} |s\overline{\lambda}'(s)| + |s^2\overline{\lambda}''(s)| \leq \varepsilon \tag{3.18}$$

ist. [Anderenfalls betrachte man die Funktion $\tilde{\lambda}_{c,\alpha}$ mit $\tilde{\lambda}_{c,\alpha}(s) = \overline{\lambda}(cs^\alpha)$ für $c, \alpha > 0$. Dann ist $S(\tilde{\lambda}_{c,\alpha}) \leq \max\{|\alpha|, |\frac{\alpha(\alpha-1)}{cs_o^\alpha}|\}S(\overline{\lambda}) < \infty$. Man wähle daher α so klein und c so groß, daß $S(\tilde{\lambda}_{c,\alpha}) \leq \varepsilon$ und $cs_1^\alpha \geq s_1$ ist, und ersetze dann s_o durch cs_o^α und $\overline{\lambda}$ durch $\tilde{\lambda}_{c,\alpha}$. Auf diese Weise erhält man eine Funktion $\overline{\lambda}$, die alle obigen Voraussetzungen erfüllt.]

Man kann nun unter Ausnutzung von (2.37),(2.39),(2.43),(3.18) und des Verhaltens der Funktion $w^{(0)}$ und ihrer Ableitungen in der Nähe der Randpunkte von $I_1(\tau) \cup \tilde{I}_2(\tau)$ berechnen, daß

$$\left|\frac{\overline{w}_\phi}{w_\phi^{(o)}} - \overline{\lambda}\right| + \left|\frac{\overline{w}_{\phi\phi}}{w_{\phi\phi}^{(o)}} - \overline{\lambda}\right| \leq C\varepsilon + CA^{-2} \tag{3.19}$$

für $\phi \in I_1(\tau) \cup I_2(\tau)$ und $\tau \geq \tau_*$ sowie

$$\left|\frac{\underline{w}_\phi}{w_\phi^{(o)}} - \underline{\lambda}\right| + \left|\frac{\underline{w}_{\phi\phi}}{w_{\phi\phi}^{(o)}} - \underline{\lambda}\right| \leq C\varepsilon + CA^{-2} \tag{3.20}$$

für $\phi \in I_1(\tau) \cup \tilde{I}_2(\tau)$ und $\tau \geq \tau_*$ gilt.

Hiermit schätzt man nun $\mathcal{B}[\overline{w}]$ bzw. $\mathcal{B}[\underline{w}]$ ab und erhält, daß für genügend kleines ε und genügend großes $\bar{A}$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}[\overline{w}] &= e^{-2\gamma\tau}\frac{w_{\phi\phi}^{(o)}}{(w_\phi^{(o)})^2}\left\{-\left(\frac{\overline{w}_{\phi\phi}}{w_{\phi\phi}^{(o)}}\right)\left(\frac{e^{-2\gamma\tau}}{(w_\phi^{(o)})^2} + \left(\frac{\overline{w}_\phi}{w_\phi^{(o)}}\right)^2\right)^{-1}\right\} \\ &= e^{-2\gamma\tau}\frac{w_{\phi\phi}^{(o)}}{(w_\phi^{(o)})^2}\left(-\tfrac{1}{\overline{\lambda}} + o(1)\right) \end{aligned}$$

und

$$\mathcal{B}[\underline{w}] = e^{-2\gamma\tau}\frac{w_{\phi\phi}^{(o)}}{(w_\phi^{(o)})^2}\left(2 - \tfrac{1}{\underline{\lambda}} + o(1)\right)$$

ist. Somit ist $\overline{w}$ für hinreichend kleines ε und hinreichend großes $\bar{A}$ auf $I_1(\tau)$ eine Superlösung und auf $I_2(\tau)$ eine Sublösung von $\mathcal{B}$. Entsprechend ist $\underline{w}$ auf $I_1(\tau)$ eine Sublösung und auf $\tilde{I}_2(\tau)$ eine Superlösung von $\mathcal{B}$.

Wegen (3.14),(3.15),(3.16),(3.17) und $\rho(\bar{A},\tau_*) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ist $\underline{w} \leq w \leq \overline{w}$ auf $I_1(\tau)$, $w \geq \overline{w}$ auf $I_2(\tau)$ und $w \leq \underline{w}$ auf $\tilde{I}_2(\tau)$ zum Zeitpunkt $\tau = \tau_*$. Außerdem gilt $\underline{w} \leq w \leq \overline{w}$ auf $\partial I_1(\tau)$, $w \geq \overline{w}$ auf $\partial I_2(\tau)$ und $w \leq \underline{w}$ auf $\partial \tilde{I}_2(\tau)$ für alle $\tau \geq \tau_*$.

Das Maximumprinzip und die Tatsache, daß $w^{'} \geq 0$ auf $[0, \phi^{(o)}(K_\infty; -\bar{A}e^{-\gamma\tau})]$ und $w^{'} \leq 0$ auf $[-\phi^{(o)}(K_\infty; -\bar{A}e^{-\gamma\tau}), 0]$ ist, liefern nun für hinreichend großes τ_0 die Abschätzungen

$$(1+2\varepsilon)w^{(o)}(K_\infty;\phi) \leq w(\phi,\tau) \leq (1-3\varepsilon)w^{(o)}(K_\infty;\phi) \tag{3.21}$$

für $\phi \in I_2(\tau)$ und

$$(1-2\varepsilon)w^{(o)}(K_\infty;\phi) \leq w(\phi,\tau) \leq (1+2\varepsilon)w^{(o)}(K_\infty;\phi) \tag{3.22}$$

für $\phi \in [\phi^{(o)}(K_\infty; \bar{A}e^{-\gamma\tau}), \phi_*]$, wobei $\phi_* \in (\sqrt{2(n-1)}, \infty)$ ist.

Somit gilt:

$$\forall\varepsilon > 0\ \forall\phi_* > \sqrt{2(n-1)}\ \exists A_\varepsilon > 0\ \exists\tau_\varepsilon :\quad |w(\phi,\tau) - w^{(o)}(K_\infty;\phi)| \leq \varepsilon$$

für $\phi \in I_2(\tau) \cup [\phi^{(o)}(K_\infty; A_\varepsilon e^{-\gamma\tau}), \phi_*]$ und $\tau > \tau_\varepsilon$.

Aus Stetigkeitsgründen folgt daraus, daß

$$\forall\varepsilon > 0\ \forall\xi_* > 0\ \exists\tilde{\tau}_\varepsilon > \tau_\varepsilon :\quad |\phi(\xi,\tau) - \phi^{(o)}(K_\infty;\xi)| \leq \varepsilon \tag{3.23}$$

für $\xi \in [A_\varepsilon e^{-\gamma\tau}, \xi_*]$, $\xi \leq -A_\varepsilon e^{-\gamma\tau}$ und $\tau \geq \tilde{\tau}_\varepsilon$ gilt.

Aus (3.13) und (3.23) erhält man nun (3.10). $\square$

Aus diesem Theorem erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 3.5
$u(x,T) = (\sqrt{K_\infty} + o(1))\, x^{\frac{m}{2}} \quad (x \downarrow 0)$

Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$ und $r = A^{-1}$ mit $A \geq A_\varepsilon$ und $e^{\tau_*(\varepsilon)}A^{-2} < s_o$. Dann gibt es für hinreichend kleines $T - t_\varepsilon$ eine Umgebung U von 0, so daß für jedes $t_\varepsilon \leq T$ genau ein $x(t) \in U$ existiert mit u(x(t))=r und die Ungleichung

$$(1-2\varepsilon){K_\infty}^{-\frac{1}{m}}(r^2e^\tau - 2(n-1))^{\frac{1}{m}} \leq x(\tau)e^{\frac{\tau}{m}} \leq (1+2\varepsilon){K_\infty}^{-\frac{1}{m}}(r^2e^\tau - 2(n-1))^{\frac{1}{m}}$$

erfüllt ist.

Hieraus folgt nun

$$(1-2\varepsilon)^m(r^2 - 2(n-1)e^{-\tau}) \leq K_\infty(x(\tau))^m \leq (1+2\varepsilon)^m(r^2 - 2(n-1)e^{-\tau}),$$

woraus man mit Grenzübergang die Beziehung

$$(1-2\varepsilon)^{\frac{m}{2}}u(x,T) \leq \sqrt{K_\infty}\, x^{\frac{m}{2}} \leq (1+2\varepsilon)^{\frac{m}{2}}u(x,T)$$

erhält.

Da A_ε^{-1} für $\varepsilon \to 0$ ebenfalls gegen 0 geht, folgt daraus die Behauptung. $\square$

Zur Vervollständigung des Beweises von Theorem 1.5 müssen wir nun noch folgendes Theorem beweisen.

Theorem 3.6
Es gilt

$$\lim_{\tau\to\infty}\left(p(z,\tau)-p(0,\tau)\right) \;=\; \frac{m}{\xi_{(K_\infty)}}\, P\left(\frac{\xi_{(K_\infty)}}{m}z\right) \tag{3.24}$$

gleichmäßig auf kompakten z-Intervallen.

Beweis:
Wir zeigen, daß

$$\lim_{\tau\to\infty} p_z(z,\tau) \;=\; P'\left(\frac{\xi_{(K_\infty)}}{m}z\right) \tag{3.25}$$

gleichmäßig auf kompakten z-Intervallen gilt, woraus dann unmittelbar die Behauptung folgt.

Sei $s=\frac{1}{2\gamma}e^{2\gamma\tau}$. Dann erfüllt p die Differentialgleichung

$$p_s = \frac{1}{1+p_z^2}\, p_{zz} + \frac{n-1}{z}p_z - \frac{\xi_K}{m} = \frac{m-1}{m-2}\,\frac{1}{s}\,(p-zp_z). \tag{3.26}$$

Sei $q(z,s) \equiv p_z(z,\tau)$. Dann ist q eine Lösung der Differentialgleichung $\mathcal{P}[q]=0$, wobei

$$\mathcal{P}[q] = q_s + \frac{1}{s}\,\frac{m-1}{m-2}\,zq_z - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{q_z}{1+q^2}+\frac{n-1}{z}\,q\right) \tag{3.27}$$

ist.

Außerdem gilt

$$q(z,s) = \sqrt{2\gamma s}\; w_\phi\left(\frac{z}{\sqrt{2\gamma s}}, \frac{1}{2\gamma}\,\log 2\gamma s\right)$$

sowie

$$q(\sqrt{\eta s},s) = \sqrt{2\gamma s}\; w_\phi\left(\sqrt{\frac{\eta}{2\gamma}}, \frac{1}{2\gamma}\,\log 2\gamma s\right).$$

Da w für $\tau\to\infty$ gleichmäßig auf kompakten ϕ - Intervallen mit $\phi < \sqrt{2(n-1)}$ gegen $w^{(o)}(K_\infty;\,.)$ konvergiert und w auf diesen Intervallen nach Lemma 2.10 für hinreichend großes τ konvex ist, können wir annehmen, daß diese Konvergenz auch für die erste ϕ - Ableitung gilt.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} q(z,s_o) &= (\sqrt{2\gamma s_o}+o(1))w_\phi^{(o)}(K_\infty;\tfrac{z}{\sqrt{2\gamma s_o}}) \\ &= (1+o(1))\tfrac{2}{m}\,K_\infty^{-\frac{1}{m}}\,\left(\tfrac{1}{2\gamma s_o}\,z^2-2(n-1)\right)^{\frac{1}{m}-1}\,z \end{aligned} \tag{3.28}$$

für $z\in[0,\sqrt{\eta s_o}]$ und genügend großes s_o sowie

$$\begin{aligned} q(\eta s,s) &= (\sqrt{2\gamma s}+o(1))w_\phi^{(o)}\left(K_\infty;\sqrt{\tfrac{\eta}{2\gamma}}\right) \quad (s\to\infty) \\ &= (1+o(1))\tfrac{2}{m}\,K_\infty^{-\frac{1}{m}}\,\left(\tfrac{\eta}{4\gamma^2 s}-2(n-1)\right)^{\frac{1}{m}-1}\,\eta s \quad (s\to\infty) \end{aligned} \tag{3.29}$$

Somit existieren $0<c_-<c_+$, so daß

$$c_-z\le q(z,s)\le c_+z$$

auf dem Rand von $\Sigma_\eta\cap\{s\ge s_o\}$ gilt, wobei $\Sigma_\eta:=\{(z,s):0\le z\le\sqrt{\eta s}\}$ ist.

Diese Information wollen wir wiederum mit Hilfe des Maximumprinzips weiter transportieren. Wir zeigen

Lemma 3.7

$$\exists\,0<c_-^{'}<c_+^{'}:\ c_-^{'}z\ \le\ q(z,s)\ \le\ c_+^{'}z \tag{3.30}$$

auf $\Sigma_\eta\cap\{s\ge s_o\}$.

Beweis:
Nach (1.20) erfüllt für jedes $\lambda>0$ die Funktion Q_λ mit $Q_\lambda(z)=P^{'}(\lambda z)$ die Differentialgleichung

$$\mathcal{P}[Q_\lambda]=\lambda^2\,\frac{1}{s}\,\frac{m-1}{m-2}\,zQ^{'}(z).$$

Aufgrund der Konvexität von p folgt $\mathcal{P}[Q_\lambda]\ge 0$. Somit ist Q_λ eine Superlösung von $\mathcal{P}$ auf Σ_η.

Wir wollen nun Sublösungen q_λ von $\mathcal{P}$ der Form

$$q_\lambda(z,s)=Q_\lambda(z,s)+\frac{1}{\lambda^2 s}L(\lambda z$$

konstruieren. Dieser Ansatz wird dadurch motiviert, daß wir am Ende des Beweises von Theorem 3.6 zeigen müssen, daß q gegen Q_λ für $\lambda=\frac{\xi(K_\infty)}{m}$ konvergiert. Da $\mathcal{P}[q_\lambda]=\lambda^2\mathcal{P}[q_1]$ und Σ_η invariant bezüglich der Abbildung $(z,s)\to(\lambda z,\lambda^2 s)$ ist, genügt es, eine Sublösung q_1 zu finden.

Nach dem Satz von Taylor für C^2 - Funktionen zwischen Banachräumen gilt auf jeder kompakten Teilmenge von Σ_η die Beziehung

$$\mathcal{P}[Q+L/s] = \mathcal{P}[Q] + (d\mathcal{P}[Q])\left(\frac{L}{s}\right) + \int_0^1 (1-\nu)\left(d^2\mathcal{P}\left[Q+\nu\frac{L}{s}\right]\right)\left(\frac{L}{s},\frac{L}{s}\right)\,d\nu. \quad (3.31)$$

In unserem Fall kann man wegen der expliziten Kenntnis von $\mathcal{P}$ mit der Definition von Ableitungen in Banachräumen direkt berechnen, daß

$$\begin{aligned}((d\mathcal{P}[Q])(L/s))\,(z,s) \;&=\; \tfrac{1}{s^2}\left(\tfrac{m-1}{m-2}\,zL_z(z) - L(z)\right)\\ &\quad -\tfrac{1}{s}\,\tfrac{\partial}{\partial z}\,\left\{\tfrac{L_z(z)}{1+Q(z)^2} + \left(\tfrac{n-1}{z} - \tfrac{2Q(z)Q_z(z)}{(1+Q(z)^2)^2}\right)L(z)\right\}\end{aligned}$$

und

$$(d^2\mathcal{P}[q])(L/s,L/s) \;=\; -\frac{1}{s^2}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{8q}{(1+q^2)^2}\,LL_z + \frac{q_z(2-6q^2)}{(1+q^2)^3}\,L^2\right\}(z,s)$$

ist.

Wir wollen L so wählen , daß der mittlere Summand dominierend ist. Dazu sei L eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{L'(z)}{1+Q(z)^2} + \left(\frac{n-1}{z} - \frac{2Q(z)Q'(z)}{(1+Q(z)^2)^2}\right)L(z) = \vartheta\frac{z^2}{2} \quad (3.32)$$

mit $\vartheta = 1 + \frac{m-1}{m-2}\sup\limits_{z>0} Q'(z)$, und es gelte $L(0) = 0$. Mit derselben Methode wie in Abschnitt 2.2 kann man unter Ausnutzung der Asymptotik von Q zeigen, daß es genau ein solches L gibt und daß dieses L die Entwicklungen

$$L(z) = \left(\frac{\vartheta}{2(n+2)} + o(1)\right)z^3 \quad (z \downarrow 0)$$

sowie

$$L(z) = \left(\frac{\vartheta}{2(n-1)} + O(z^{-2})\right)z^3 \quad (z \to \infty)$$

besitzt.

Damit erhalten wir $L(z) = O(z^3)$ und mit (3.32) auch $L'(z) = O(z^2)$. Durch Differentiation von (3.32) bekommt man außerdem $L''(z) = O(z)$. Die letztere Rechnung läßt sich dabei am einfachsten durchführen, wenn man $Q'(z)$ in $Q(z)$-Termen ausdrückt und beachtet, daß man $L'(z) = \left(\frac{3\vartheta}{2(n-1)} + O(1)\right)z^2$ schreiben kann.

Unter Ausnutzung des asymptotischen Verhaltens von Q, L, L' und L'' läßt sich der Integrand in (3.31) für alle $\nu \in [0,1]$ durch

$$\left|(1-\nu)\left(d^2\mathcal{P}\left[Q+\nu\frac{L}{s}\right]\right)\left(\frac{L}{s},\frac{L}{s}\right)(z)\right| \le C\eta\frac{z}{s}$$

abschätzen. Somit ergibt sich die Ungleichung

$$\mathcal{P}[Q + L/s] \le \frac{z}{s}\left(\frac{m-1}{m-2}\,Q^{'}(z) - \vartheta + C\eta\right) \le -\frac{z}{s}\,(1 - C\eta).$$

Also ist q_1 für hinreichend kleines η eine Sublösung von $\mathcal{P}$ auf Σ_η.

Vergleichen wir jetzt Q mit unseren Sub- und Superlösungen. Aus der Asymptotik von Q und L folgt $q_\lambda(z,s) = Q_\lambda(z) + O(\eta\lambda z)$ und damit die Existenz von $0 < \lambda_- < \lambda_+$ mit $q_{\lambda_-} \le q \le Q_{\lambda_+}$ auf dem Rand von $\Sigma_\eta \cap \{s \ge s_o\}$. Das Maximumprinzip liefert daher $q_{\lambda_-} \le q \le Q_{\lambda_+}$ auf ganz $\Sigma_\eta \cap \{s \ge s_o\}$, woraus dann (3.30) folgt. □

Wir definieren nun eine Funktion G mit $G(z,s) = \frac{q(z,s)}{z}$. Nach (3.29) gilt dann

$$\lim_{\eta\downarrow 0}\big(\lim_{s\to\infty} G(\sqrt{\eta s}, s)\big) \;=\; \frac{2}{m}\,K_\infty^{-\frac{1}{m}}\,(2(n-1))^{\frac{1}{m}-1} \;=:\; G_\infty\,.$$

Wiederum mit Hilfe des Maximumprinzips erhalten wir daraus das folgende Lemma.

Lemma 3.8
Für jedes $\delta > 0$ existieren $A, s_\delta > 0$ und $\eta_\delta \in (0,\eta]$, so daß

$$|G(z,s) - G_\infty| \le \varepsilon \tag{3.33}$$

auf $\Sigma(\delta) := \{(z,s) : \; z \ge A, s \ge s_\delta$ und $z^2 \;\le\; \eta_\delta\, s\}$ gilt.

Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$ eine kleine Zahl, die später gewählt wird. Nach (3.29) gilt

$$|G(z,s) - G_\infty| \le \varepsilon \tag{3.34}$$

für alle $s \ge s_\varepsilon$ und $\frac{z^2}{s} \in (\eta, 3\eta)$, vorausgesetzt, daß s_ε genügend groß und η genügend klein ist.

Wir konstruieren nun Sub- und Superlösungen von $\mathcal{P}$ der Form $q_\pm(z,s) = zG_\pm(r)$ mit

$$r = z^2 - z_0^2 + \alpha(s - s_0).$$

Dabei sei $s_0 \ge s_\varepsilon$ und $z_0^2 = \eta s_0$. Außerdem wählen wir $\alpha = \frac{n-1}{2}$, was im folgenden klar werden wird.

Man kann auf diesen Ansatz folgendermaßen kommen. Man berechnet zunächst die Differentialgleichung für G. Dann nimmt man an, daß die Konvergenz aus (3.29) für große s mehr durch Konvektion als durch Diffusion transportiert wird, und läßt den Diffusionsterm der Differentialgleichung von G weg. Berechnet man schließlich die Charakteristiken der dadurch entstandenen Differentialgleichung erster Ordnung, so erhält man Kurven, die durch die Parabeln $r = \mathit{const}$ approximiert werden können.

Die Sub- und Superlösungen sollen definiert werden auf

$$\Omega = \{(z,s) : s_0 \le s \le s_1, 0 \le r \le R\}$$

wobei

$$s_1 = s_0 + \frac{R}{\alpha + \eta}$$

und

$$R = \left(1 + \frac{\eta}{\alpha}\right)(\eta s_0 - A)$$

ist.

Die Größe der Konstanten A werden wir erst später festlegen. Für die nun folgenden Abschätzungen verlangen wir aber, daß η so klein ist, daß $R < 2\eta s_0$ gilt. (Man beachte, daß dieses R nichts mit dem R aus dem Existenzbeweis zu tun hat.) Außerdem sei s_0 in Abhängigkeit von A und η so groß gewählt, daß $A = o(R)$ ist.

Der Rand von Ω besteht also aus den Geraden $s = s_0$ und $s = s_1$ sowie den Parabeln $r = 0$ und $r = R$. R und s_1 haben dabei folgende geometrische Bedeutung. Die Konstante s_1 ist die s-Koordinate des Schnittpunktes der Parabel $r = 0$ mit der Geraden $z = \sqrt{A}$ und die Parabel $r = R$ ist die eindeutig bestimmte Parabel $r = const$, die durch den einzigen Schnittpunkt der Geraden $s = s_1$ mit der Parabel $z^2 = \eta s$ geht, welcher eine positive r-Koordinate hat. Die geometrische Form von Ω wird durch die Vorstellung motiviert, daß die Information aus (3.34) längs der oben genannten Charakteristiken auf ganz $\Sigma(\delta)$ verbreitet wird.

Um die Funktionen $G_\pm$ konstruieren zu können, betrachten wir nun $\mathcal{P}[q_\pm]$. Eine direkte Rechnung führt auf die Gleichung

$$\frac{1}{z}\mathcal{P}[q_\pm](z,s) = -M(z,s)G''_\pm(r) - N(z,s)G'_\pm(r) + f(z,s),$$

wobei die Funktionen M,N und f durch

$$M(z,s) = \frac{4z^2}{1 + z^2 G_\pm(r)^2},$$

$$N(z,s) = 2(n-1) - \alpha - 2\frac{m-1}{m-2}\frac{z^2}{s} + \frac{G_\pm(r)}{1 + z^2 G_\pm(r)^2}$$

und

$$f(z,s) = \frac{m-1}{m-2}\frac{G_\pm(r)}{s} - \frac{2G_\pm(r)(G_\pm(r) + 2z^2 G_\pm(r))^2}{(1 + z^2 G_\pm(r)^2)^2}$$

bestimmt sind.

Die Funktion M erfüllt offenbar die Ungleichung

$$0 \leq M \leq \frac{4}{{G_\pm}^2}.$$

Um f und N abschätzen zu können, beachten wir, daß nach Definition von Ω, r, R und s_1 auf Ω die Beziehung

$$r \leq z^2 - A \tag{3.35}$$

gilt. Infolgedessen erhält man mit Hilfe der Ungleichung $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ auf ganz Ω die Abschätzung

$$|f(z,s)| \leq C_* \left(\frac{1}{s_0} + \frac{1}{(r+A)^2}\right) + \frac{16}{G_\pm(r)^3} G_\pm'(r)^2 ,$$

wobei die Konstante C_* nur vom Supremum und vom Infimum von $G_\pm$ auf Ω abhängt. Außerdem ergibt sich nach Wahl von α für hinreichend großes A und hinreichend kleines η auf Ω die Ungleichung

$$n-1 \leq N(z,s) \leq 2(n-1) .$$

Um $G_\pm$ nachher mit G vergleichen zu können, werden wir nun Funktionen $G_\pm$ konstruieren, für die Abschätzung

$$c_-' \leq G_\pm \leq c_+'$$

auf Ω gilt.

Wir wenden uns zunächst der Funktion G_- zu und machen für G_- den Ansatz

$$G_-(r) = c_-' + k_1 \frac{r}{s_0} - k_2 \left(\frac{1}{r+A} - \frac{1}{A}\right)$$

mit $k_1, k_2 > 0$. Dann ist $G_-(0) = c_-'$ und

$$G_-'(r) = \frac{k_1}{s_0} + \frac{k_2}{(r+A)^2} > 0 ,$$

also $G_- \geq c_-'$ auf Ω. Seien außerdem k_1 und k_2 so gewählt, daß $G_-(R) = G_\infty - \varepsilon$ und somit $G_- \leq c_+'$ auf Ω ist.

Mit dem obigen Ansatz und den Abschätzungen für M,N und f ergibt sich die Ungleichung

$$\frac{1}{z}\mathcal{P}[zG_-(r)] \leq \left(\frac{16G_-'(r)}{G_\pm(r)^3} - (n-1)\right) G_-'(r) - \frac{4}{c_-'^{\,2}} G_-''(r) + C_* \left(\frac{1}{s_0} + \frac{1}{(r+A)^2}\right) .$$

Ließen sich k_1 und k_2 unter Beachtung der obigen Forderung so wählen, daß

$$\left|\frac{16G_-'(r)}{G_-(r)^3}\right| \leq \frac{n-1}{2} \tag{3.36}$$

für $0 \leq r \leq R$ wäre, dann würde

$$\frac{1}{z}\mathcal{P}[zG_-(r)] \leq \frac{1}{s_0}\left(C_* - k_1 \frac{n-1}{2}\right) - \left\{\left(\frac{n-1}{2} - \frac{8}{(r+A)(c_-')^2}\right) k_2 - C_*\right\} \frac{1}{(r+A)^2}$$

gelten. Wären darüber hinaus $k_1 = \frac{2C_*}{n-1}$ und $A \geq 32(n-1)(c_-')^2$, dann hätten wir die Ungleichung

$$\frac{1}{z}\mathcal{P}[zG_-(r)] \leq -\frac{1}{(r+A)^2}\left(\frac{n-1}{4} k_2 - C_*\right) < 0, \tag{3.37}$$

vorausgesetzt, daß wir k_2 größer als $\frac{4C_*}{n-1}$ wählen könnten.

Sei also $k_1 = \frac{2C_*}{n-1}$ und $A \geq 32(n-1)(c_-^{'})^2$. Betrachten wir nun die Bedingung

$$G_-(R) = c_-^{'} + k_1 \frac{R}{s_0} - k_2 \left(\frac{1}{R+A} - \frac{1}{A} \right) \stackrel{!}{=} G_\infty - \varepsilon \, .$$

Da $R < 2\eta\, s_0$ und $A = o(R)$ ist, ergibt sich daraus aufgrund der Wahl von k_1 für k_2 die Bedingung

$$c_-^{'} + O(\eta) + k_2(1 - o(1))A^{-1} \stackrel{!}{=} G_\infty - \varepsilon \, .$$

Sei ε so klein, daß $c_-^{'} < G_\infty - \varepsilon$ ist. Dann können wir, indem wir in Abhängigkeit von $c_-^{'}$ die Konstanten η genügend klein und A genügend groß wählen, erreichen, daß die Bedingung $G_-(R) \stackrel{!}{=} G_\infty - \varepsilon$ erlaubt, daß $k_2 > \frac{4C_*}{n-1}$ gewählt werden kann.

Sei daher $k_2 > \frac{4C_*}{n-1}$. Da mit der eben getroffenen Wahl von k_1, k_2 und A auch die Ungleichung (3.36) erfüllt ist, ist nach (3.37) die Funktion $q_-(z,s) = z\, G_-(r(z,s))$ auf Ω eine Sublösung von $\mathcal{P}$.

Auf dem Boden ($s = s_0$) und dem rechten Rand ($r = R$) von Ω gilt nach (3.34) $q(z,s) \geq (G_\infty - \varepsilon)\, z \geq q_-(z,s)$ und am linken Rand ($r = 0$) haben wir $q(z,s) \geq c_-^{'}\, z \geq q_-(z,s)$. Mit dem Maximumprinzip folgt daraus

$$G(z,s) \geq G_-(r(z,s))$$

auf ganz Ω.

Aus der Definition von r, s_1 und R folgt direkt, daß für $s = s_1$ und $z \geq A$ die Ungleichung $r(z,s) \geq A^2 - A$ gilt, wenn man A so groß wählt, daß $A > \sqrt{A}$ ist. Außerdem muß nach (3.36) $k_2 = O(A)$ sein. Damit erhalten wir

$$G_-(R) - G_-(r(z,s_1)) \leq C \left(\eta + \frac{1}{A} \right)$$

für $z \geq A$ und daraus schließlich die Abschätzung

$$G(z,s_1) \geq G_\infty - \varepsilon - C \left(\eta + \frac{1}{A} \right) \geq G_\infty - 2\varepsilon$$

für hinreichend großes A und hinreichend kleines η.

Ersetzen wir s_0 durch ein beliebiges $s > s_0$, so gilt obige Argumentation unverändert, und wir erhalten daher

$$G(z,s) \geq G_\infty - 2\varepsilon$$

für $z \geq A$ und $s \geq s_0 + \frac{R}{\alpha+\eta}$.

Macht man nun für die Konstruktion einer Superlösung q_+ den Ansatz

$$G_+(r) = c_+^{'} - k_1 \frac{r}{s_0} + k_2 \left(\frac{1}{r+A} - \frac{1}{A} \right)$$

mit $k_1, k_2 > 0$, so kann man mit derselben Methode wie bei der Konstruktion von G_- die Konstanten k_1 und k_2 wählen und dadurch erreichen, daß q_+ eine Superlösung von $\mathcal{P}$ auf Ω ist. Ebenfalls mit derselben Argumentation wie bei G_- zeigt man dann, daß

$$G(z,s) \leq G_\infty - 2\varepsilon$$

für $z \geq A$ und $s \geq s_0 + \frac{R}{\alpha+\eta}$ ist, und erhält somit (3.33). □

Des weiteren gilt:

Lemma 3.9
Für jedes $A > 0$ und $j \geq 0$ gibt es eine Konstante $C_j(A) < \infty$, so daß

$$\left| \frac{\partial^j q}{\partial z^j} \right| \leq C_j(A)$$

für $s \geq s_0 + 1$, $0 \leq z \leq A$ und $z^2 \leq \frac{1}{2}\eta s$ ist.

Beweis:
Für jedes $s_1 \geq s_0 + 1$ definieren wir eine Funktion $\bar{p}$ durch

$$\bar{p}(z,s) = p(z,s) - p(0,s_1)\left(\frac{s}{s_1}\right)^{\frac{m-1}{m-2}} .$$

Dann ist $\bar{p}$ ebenfalls eine Lösung von (3.26) und es gilt $\bar{p}_z = q$. Wegen $c'_- z \leq q(z,s) \leq c'_+ z$ ist $\bar{p}_{zz}(0,s) = \lim\limits_{z\to 0} \frac{q(z,s)}{z} \in (c'_-, c'_+)$. Setzen wir diese Information in (3.26) ein, so erhalten wir, daß

$$\left| \frac{\partial \bar{p}}{\partial s}(0,s) \right| \leq C\left(1 + \frac{1}{s}\,|\bar{p}(0,s)|\right)$$

ist.

Da $\bar{p}(0,s_1) = 0$ ist, folgt aus den Abschätzungen für $\frac{\partial \bar{p}}{\partial s}$ und $\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}$ mittels sukzessiver Integration, daß

$$|\bar{p}(z,s)| \leq C(1+z^2)$$

für $|s - s_1| \leq 1$ und $z^2 = \eta s$ ist.

Da der Graph von $\bar{p}(\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}, s)$ aus einer Lösung des MCF durch Translation und Blow-up mit Faktor $(T-t)^{1/m-1}$ hervorgeht, können wir [EH], Thm.3.4 anwenden und erhalten dadurch aufgrund der obigen Gradientenschranke die gewünschten Schranken für die höheren Ableitungen. □

Wir können nun den Beweis von Theorem 3.6 zuendeführen.

Sei (σ_n) eine reellwertige Folge mit $\sigma_n \geq s_0 + 1$ für alle $n \in I\!N$ und $\sigma_n \to +\infty$ für $n \to +\infty$. Sei außerdem zu jedem σ_n eine Funktion q_n gegeben mit $q_n(z,s) = q(z, s_n + s)$. Dann ist nach Lemma 7.6 für jedes $j \geq 0$ die Funktionenmenge $\left\{ \frac{\partial^j}{\partial z^j} q_n \,:\, n \in I\!N \right\}$ auf

$K(A) := [0, A] \times [-A, A]$ gleichmäßig beschränkt und aufgrund des Mittelwertsatzes auch gleichgradig stetig.

Daher existieren nach dem Satz von Arzela-Ascoli eine Teilfolge (σ_{n_k}) von (σ_n) und eine Funktion q_∞, so daß

$$\lim_{n_k \to \infty} \frac{\partial^j}{\partial z^j} q_{n_k}(z, s) = \frac{\partial^j}{\partial z^j} q_\infty(z, s)$$

gleichmäßig auf $K(A)$ für jedes $j \geq 0$ gilt.

Nach Lemma 3.7 folgt

$$c'_{-} z \leq q_\infty(z, s) \leq c'_{+} z$$

und nach Lemma 3.8 erhalten wir

$$\lim_{z \to \infty} \frac{q_\infty(z, s)}{z} = G_\infty$$

gleichmäßig in $s \in I\!R$.

Da nach (3.27)

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial s} q_{n_k}(z, s) &= \tfrac{\partial}{\partial z} \left(\tfrac{q_z(z, s_{n_k} + s)}{1 + (q(z, s_{n_k} + s))^2} + (n-1) \tfrac{q(z, s_{n_k} + s)}{z} \right) \\ &\quad - \tfrac{1}{s_{n_k} + s} \, \tfrac{m-1}{m-2} \, z \, q_z(z, s_{n_k} + s) \end{aligned}$$

gilt, ist auch $\left\{ \frac{\partial}{\partial s} q_{n_k} : k \in I\!N \right\}$ auf $K(A)$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig, so daß ebenfalls eine Teilfolge $\left(\frac{\partial}{\partial s} q_{n_{k_l}} \right)$ gleichmäßig auf K(A) gegen $\frac{\partial}{\partial s} q_\infty$ konvergiert. Insbesondere löst q_∞ auf $K(A)$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial s} q_\infty(z, s) &= \lim_{l \to \infty} \tfrac{\partial}{\partial s} q_{n_{k_l}}(z, s) \\ &= \tfrac{\partial}{\partial z} \left(\tfrac{\frac{\partial}{\partial z} q_\infty(z,s)}{1 + (q_\infty(z,s))^2} + \tfrac{(n-1)}{z} q_\infty(z, s) \right) \end{aligned} \tag{3.38}$$

Für jedes $\lambda > 0$ erfüllt auch Q_λ die Differentialgleichung (3.38) und es gilt $\lim\limits_{z \to \infty} \frac{Q_\lambda(z)}{z} = G_\infty$ genau dann wenn $\lambda = \frac{\xi_{(K\infty)}}{m} =: \lambda_\infty$ ist. Somit stellt sich die Frage, ob sogar $q_\infty \equiv Q_{\lambda_\infty}$ ist. Wäre dies der Fall, so würde daraus sofort das Theorem 3.6 folgen. Denn anderenfalls würde eine Folge (s_n) mit $s_n \to +\infty$ für $n \to +\infty$ existieren und $q(z, s_n)$ für $s_n \to +\infty$ nicht gegen $Q(\lambda_\infty z)$ konvergieren. Wegen $q_\infty \equiv Q_{\lambda_\infty}$ hätte die Folge $(q(z, s_n))$ aber eine gegen $Q(\lambda_\infty z)$ konvergente Teilfolge.

Wir zeigen nun durch einen Widerspruchsbeweis, daß tatsächlich $q_\infty \equiv Q_{\lambda_\infty}$ ist.

Dazu nehmen wir zunächst an, daß es Punkte (z', s') gibt, an denen $q_\infty(z', s') < Q_{\lambda_\infty}(z', s')$ ist. Da $Q(\lambda z) \leq C\lambda z$ und $q_\infty(z, s) \geq c'_{-} z$ ist, gilt für genügend kleine λ die Beziehung $q_\infty \geq Q_\lambda$. Daher existiert ein $\lambda_- := \sup\{\lambda :$

$Q_\lambda \leq q_\infty\} < \lambda_\infty$. Aus dem starken Maximumprinzip folgt nun, daß $q_\infty(z,s) > Q(\lambda z)$ für alle $z > 0, s \in I\!R$ und $\lambda \leq \lambda_-$ ist. Für $z = 0$ gilt dagegen $q_\infty(0,s) = 0 = Q_\lambda(0)$ für alle $s \in I\!R$ und $\lambda > 0$.

Sei nun $((z_n, s_n))$ eine Folge von Punkten in $I\!R^+ \times I\!R$ mit der Eigenschaft, daß $q_\infty(z_n, s_n) < Q((\lambda_- + 2^{-n})z_n)$ ist. Dann muß die Folge (z_n) beschränkt sein. Denn sonst gäbe es eine Teilfolge $z_{n_k} \uparrow \infty$ mit

$$\lim_{z_{n_k}\to\infty} \frac{q_\infty(z_{n_k}, s)}{z_{n_k}} \leq \lim_{z_{n_k}\to\infty} \frac{Q((\lambda_- + 2^{-n_k})z_{n_k})}{z_{n_k}}.$$

Da $\lim_{z\to\infty} Q'(z) = \frac{1}{n-1}$ ist, würde daraus mit Hilfe des Mittelwertsatzes die Ungleichung

$$G_\infty \leq \lim_{z_{n_k}\to\infty} \frac{q_\infty(z_{n_k}, s)}{z_{n_k}} \leq \lim_{z_{n_k}\to\infty} \frac{Q(\lambda_- z_{n_k})}{z_{n_k}} < \lim_{z_{n_k}\to\infty} \frac{Q(\lambda_\infty z_{n_k})}{z_{n_k}} = G_\infty$$

folgen.

Somit existieren eine Teilfolge (z_{n_j}), die gegen ein z_* konvergiert, und eine Funktionenfolge (q_{n_j}) mit $q_{n_j}(z,s) = q_\infty(z, s_{n_j} + s)$, die wiederum nach Arzela-Ascoli gleichmäßig auf kompakten Raum-Zeit-Mengen gegen eine Funktion q_* konvergiert, welche ebenfalls (3.38) erfüllt.

Für alle $(z,s) \in I\!R^+ \times I\!R$ ist

$$q_*(z,s) = \lim_{j\to\infty} q_\infty(z, s_{n_j} + s) \geq Q(\lambda_- z). \tag{3.39}$$

Für $(z_*, 0)$ gilt aber auch

$$q_*(z_*, 0) = \lim_{j\to\infty} q_\infty(z_{n_j}, s_{n_j}) \leq \lim_{j\to\infty} Q((\lambda_- + 2^{-n_j})z_{n_j}) = Q(\lambda_- z_*).$$

Daher muß $q_*(z_*, 0) = Q(\lambda_- z_*)$ und somit nach dem starken Maximumprinzip $z_* = 0$ sein.

Wegen (3.39) folgt

$$\frac{\partial}{\partial z} q_*(0,0) = \lim_{z\to 0} \frac{q_*(z,0)}{z} \geq \lambda_- Q'(0).$$

Weil $\frac{\partial}{\partial z} q_{n_j}$ gleichmäßig auf kompakten Raum-Zeit-Mengen gegen $\frac{\partial}{\partial z} q_*$ und z_{n_j} gegen $z_* = 0$ konvergiert, erhalten wir aber auch die Ungleichung

$$\lambda_- Q'(0) = \lim_{j\to\infty} (\lambda_- + 2^{-n_j}) \frac{Q((\lambda_- + 2^{-n_j})z_{n_j})}{(\lambda_- + 2^{-n_j})z_{n_j}} > \lim_{j\to\infty} \frac{q_\infty(z_{n_j}, s_{n_j})}{z_{n_j}},$$

wobei

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \tfrac{q_\infty(z_{n_j}, s_{n_j})}{z_{n_j}} &= \lim_{j\to\infty} \tfrac{\partial}{\partial z} q_{n_j}(\vartheta_{n_j}) \quad , \vartheta_{n_j} \in [0, z_{n_j}] \\ &= \tfrac{\partial}{\partial z} q_*(0,0) \end{aligned}$$

ist. Das bedeutet, daß
$$\frac{\partial}{\partial z}q_*(0,0) = \lambda_- Q'(0)$$
sein muß.

Mit dieser Aussage haben wir jedoch einen Widerspruch abgeleitet. Es gilt hier nämlich, obwohl die Differentialgleichung (3.38) einen Koeffizienten besitzt, der für $z \to 0$ gegen ∞ geht, die Behauptung des Hopfschen Randpunktlemmas, vgl. [PW], welche verlangt, daß
$$\frac{\partial}{\partial z}q_*(0,0) > \lambda_- Q'(0)$$
sein muß.

Um dies einzusehen, betrachten wir die Funktion $\mu = q_* - Q_{\lambda_-}$. Diese Funktion erfüllt wegen (3.38) die lineare parabolische Differentialgleichung
$$\frac{\partial \mu}{\partial s}(z,s) = \frac{\partial}{\partial z}\left\{(1 + z^2\mathcal{E}_1(z,s))\mu_z + \left(\frac{n-1}{z} + z\mathcal{E}_2(z,s)\right)\mu\right\}, \tag{3.40}$$
wobei $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ glatte Funktionen sind.

Seien außerdem für $\varepsilon > 0$ Funktionen der Form
$$\mu_\varepsilon(z,s) = -\varepsilon z^{-\alpha} + z^3 + (n+2)(s+\sigma)z$$
mit $\sigma > 0$ gegeben. Durch direktes Einsetzen erkennt man, daß die Funktionen μ_ε Sublösungen von (3.40) auf $(0,\delta) \times (-2\sigma, 0)$ sind, wenn $0 < \alpha < n-1$ und $\delta > 0$ hinreichend klein ist.

Sei $\delta < \sqrt[3]{(n+2)\sigma}$. Dann gilt nach (3.39) und nach Konstruktion von μ_ε die Ungleichung $\beta\mu_\varepsilon(z,-\sigma) \le \mu(z,-\sigma)$ für alle $\beta, \varepsilon > 0$ und $z \in (0,\delta)$. Außerdem existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\gamma(\varepsilon)$, so daß $\beta\mu_\varepsilon(z,s) \le \mu(z,s)$ für alle $\beta > 0$, $z \in (0,\gamma(\varepsilon))$ und $s \in [-\sigma, 0]$ gilt. Da nach (3.39) und dem starken Maximumprinzip $M := \min_{s\in[-\sigma,0]} \mu(\delta,s) > 0$ ist, kann man schließlich β so klein wählen, daß $\beta \max_{s\in[-\sigma,0]} \mu_\varepsilon(\delta,s) \le M$ für alle $\varepsilon > 0$ ist.

Daher ergibt sich mit Hilfe des Maximumprinzips, daß $\mu(z,0) \ge \beta\mu_\varepsilon(z,0)$ für alle $\varepsilon > 0$ und $z \in (0,\delta)$ ist. Läßt man nun ε gegen 0 gehen, so erhält man die Abschätzung $\mu(z,0) \ge \beta z^3 + \beta(n+2)\sigma z$ für $z \in (0,\delta)$. Daraus folgt dann
$$\frac{\partial}{\partial z}\mu(0,0) = \lim_{z\to 0}\frac{\mu(z,0)}{z} \ge \lim_{z\to 0}(\beta z^2 + \beta(n+2)\sigma) > 0\ ,$$
also die Behauptung des Lemmas von Hopf.

Mit derselben Argumentation wie eben kann man auch die Existenz von Punkten (z', s') mit $q_\infty(z', s') > Q(\lambda_\infty z')$ ausschließen. Also gilt doch $q_\infty \equiv Q_{\lambda_\infty}$ und folglich auch das Theorem 3.6. □

Dem Beweis von Theorem 3.6 kann man entnehmen, daß

$$\lim_{\tau \to \infty} p_{zz}(0, \tau) \;=\; P^{''}(0)$$

ist. Somit konvergiert der Wert der mittleren Krümmung im linken Endpunkt der Lösungsfläche gegen den Wert der mittleren Krümmung im Scheitelpunkt des Solitons. Infolgedessen bildet die Lösungsfläche eine Typ 2 - Singularität aus. Damit ist das Haupttheorem vollständig bewiesen. $\square$

Anhang

Wir geben hier noch den Beweis für die Proposition 1.1.

Sei P die eindeutige Lösung von (1.20-21) und θ definiert durch $\theta(z) = \arctan P^{'}(z)$. Dann erfüllt θ das Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dz}\theta(z) = 1 - \frac{n-1}{z}\tan\theta(z)\ , \quad \theta(0) = 0\ , \quad \theta^{'}(0) = \frac{1}{n} \quad . \tag{3.41}$$

Nach (3.41) ist $\theta^{'}(z) > 0$ für alle z mit $\theta(z) = 0$. Da $\theta(0) = 0$ ist, folgt daraus $\theta(z) > 0$ für alle $z > 0$.

Sei eine Funktion θ_* gegeben durch

$$\theta_*(z) = \arctan\frac{z}{n-1} \quad .$$

Dann ist $\theta(0) = \theta_*(0)$, und für $z > 0$ gilt $\theta(z) = \theta_*(z)$ genau dann, wenn $\theta^{'}(z) = 0$ ist. Da $\theta^{'}(0) < \theta^{'}_*(0)$ ist, folgt $\theta(z) < \theta_*(z)$ für alle $z > 0$ und $\theta^{'} > 0$. Das bedeutet, daß θ für $z \to \infty$ einen Grenzwert haben muß. Dieser Grenzwert muß $\pi/2$ sein, denn anderenfalls wäre $\liminf\limits_{z\to\infty}\theta^{'}(z) = 1$, was einen Widerspruch zu $\theta \leq \theta_*$ ergeben würde.

Aus den obigen Aussagen folgt, daß P eine konvexe Funktion ist, deren Ableitung für $z \to +\infty$ ebenfalls gegen $+\infty$ strebt.

Wir definieren nun eine Funktion θ_- vermöge $\theta_-(z) = \frac{\pi}{2} - \frac{K}{z}$, wobei K eine Konstante ist, die im folgenden präzisiert wird.
Da $\lim\limits_{z\to\infty} z^{-1} = K^{-1}$ ist, existiert ein $K_- > n-1$, so daß die Funktion θ_- für die Konstante K_- auf dem Intervall $z \geq 4K_-/\pi$ eine Sublösung von (3.41) ist und $\theta(4K_-/\pi) > \pi/4 = \theta_-(4K_-/\pi)$ gilt. Das Maximumprinzip für die Differentialgleichung (3.41) liefert dann $\theta(z) > \theta_-(z)$ und somit

$$\theta(z) = \frac{\pi}{2} - O\left(\frac{1}{z}\right)$$

für alle $z \geq 4K_-/\pi$.

Sei nun eine Funktion σ gegeben durch

$$\sigma(z) = \frac{\pi}{2} - \frac{n-1}{z}\left(1 + \sigma(z)\right) \quad . \tag{3.42}$$

Dann ist σ beschränkt und erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{n-1}{z^2}(1+\sigma) - \frac{n-1}{z}\frac{d\sigma}{dz} + \frac{1}{1+\sigma}\left\{F\left(\frac{(1+\sigma)^2}{z^2}\right)+1\right\} = 1 \quad ,$$

wobei F durch

$$F(\lambda) = (n-1)\sqrt{\lambda}\,\frac{\cos((n-1)\sqrt{\lambda})}{\sin((n-1)\sqrt{\lambda})} - 1$$

definiert ist.

Schreiben wir σ als Funktion von $s = z^2$, dann löst σ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \tfrac{d\sigma}{ds} + \tfrac{1}{2(n-1)}\tfrac{\sigma}{1+\sigma} \quad &= \quad \tfrac{1}{2(n-1)}\left\{\tfrac{n-1}{s}(1+\sigma) + \tfrac{1}{1+\sigma}F\left(\tfrac{(1+\sigma)^2}{s}\right)\right\} \\ &=: \quad G(1/s,\sigma) \quad . \end{aligned} \tag{3.43}$$

Da man die Funktion F für hinreichend kleine $\lambda \geq 0$ als konvergente Potenzreihe $\sum\limits_{l\geq 1} F_l \lambda^l$ schreiben kann, besitzt $G(1/s,\sigma)$ für genügend große s die Reihenentwicklung $G(1/s,\sigma) = \sum\limits_{k\geq 1}\sum\limits_{l\geq 0} G_{kl}\,(1/s)^k\,\sigma^l$.

Formt man die Differentialgleichung (3.43) zu

$$\frac{d\sigma}{ds} + \frac{\sigma}{2(n-1)} = G(1/s,\sigma) + \frac{1}{2(n-1)}\frac{\sigma^2}{1+\sigma}$$

um, so erhält man aus dieser Gleichung mit Hilfe der Variation der Konstanten Formel die Beziehung

$$\begin{aligned} \sigma(s) \quad &= \quad e^{\frac{(s-s_0)}{2(n-1)}}\sigma(s_0) + \int\limits_{s_0}^{s} e^{-\frac{(s-s')}{2(n-1)}} \sum_{k\geq 1} G_{k0}(s')^{-k}\,ds' \\ &\quad + \int\limits_{s_0}^{s} e^{-\frac{(s-s')}{2(n-1)}} \left\{\sum_{k\geq 1}\sum_{l\geq 1} G_{kl}\,(s')^{-k}\,\sigma(s')^l + \tfrac{1}{2(n-1)}\tfrac{\sigma(s')^2}{1+\sigma(s')}\right\} ds' \quad . \end{aligned} \tag{3.44}$$

Nach (3.43) gilt für hinreichend große s die Abschätzung $\sigma(s) = O(s^{-1})$. Denn anderenfalls wäre für diese s-Werte $\frac{d\sigma}{ds}(s) > Cs^{-1}$ für alle $C > 0$, was im Widerspruch zur Beschränktheit von σ steht. Per Induktion nach L erhält man daher aus (3.44) die Entwicklung

$$\sigma(s) = \frac{A_1}{s} + ... + \frac{A_L}{s^L} + O(s^{-(L+1)})$$

mit wohldefinierten Koeffizienten A_i, wenn man s in Abhängigkeit von L genügend groß wählt.

Setzt man diese Entwicklung in (3.42) ein und beachtet, daß $P'(z) = \tan\theta(z)$ ist, so bekommt man für P' die "Laurententwicklung"

$$P'(z) = \frac{z}{n-1} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{-(2j+1)} \quad (z \to \infty) \quad .$$

Nach (1.20) muß auch P'' eine Laurententwicklung für $z \to \infty$ besitzen. Die Laurentreihe von P'' muß durch gliedweise Differentiation aus der Laurentreihe von P' hervorgehen, anderenfalls erhält man durch Integration der Reihe von P'' einen Widerspruch zur Größenordnung von P'. Setzt man nun diese beiden Laurentreihen in (1.20) ein, dann ergibt sich durch Koeffizientenvergleich, daß $a_0 = -1$ sein muß. $\square$

Literaturverzeichnis

[AAG] S. J. Altschuler, S. B. Angenent und Y. Giga, Motion by mean curvature through singularities for surfaces of rotation, AMS Nos.: primary 58G11, 35K55 (1995), preprint

[A1] S. B. Angenent, Parabolic equations for curves on surfaces, Part I, Ann. Math. 132 (1990), 451-483

[A2] S. B. Angenent, Parabolic equations for curves on surfaces, Part II, Ann. Math. 133 (1991), 171-215

[A3] S. B. Angenent, On the formation of singularities in the curve shortening flow, J. Diff. Geom. 33 (1991), 601-633

[A4] S. B. Angenent, Some recent results on Mean Curvature Flow, in: Recent Advances in PDE's, Ed. M. A. Herrero and E. Zuazua, Ed. Masson (1994), 1-18

[AV] S. B. Angenent und J. J. L. Velázquez, Degenerate neckpinches in mean curvature flow, J. reine angew. Math. 482 (1997), 15-66

[Bra] K. A. Brakke, The motion of a surface by its mean curvature, Math. Notes, Princeton, NJ, Princeton University Press (1978)

[Bre] A. Bressan, On the asymptotic shape of blow-up, Ind. Univ. Math. J. 39 (1990), 947-960

[CGG] Y. G. Chen, Y. Giga und S. Goto, Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow, J. Diff. Geom. 33 (1991), 749-786

[Co] C. Conley, Isolated Invariant Sets and the Morse Index, CBMS notes 38 (1978)

[EH] K. Ecker und G. Huisken, Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature, Invent. Math. 105 (1991), 547-569

[ES1] L. C. Evans und J. Spruck, Motion of level sets by mean curvature I, J. Diff. Geom. 33 (1991), 635-681

[ES2] L. C. Evans und J. Spruck, Motion of level sets by mean curvature II, Trans. A. M. S. 330 (1992), 321-332

[ES3] L. C. Evans und J. Spruck, Motion of level sets by mean curvature *III*, J. Geom. Anal. 2 (1992), 121-150

[ES4] L. C. Evans und J. Spruck, Motion of level sets by mean curvature *IV*, J. Geom. Anal. 5 (1995), 77-114

[FG] S. Filippas und J. S. Guo, Quenching profiles for one-dimensional semilinear heat equations, Quart. Appl. Math. LI (1993), 713-729

[FK] S. Filippas und R. V. Kohn, Refined asymptotics for the blow-up of $u_t - \Delta u = u^p$, Comm. Pure Appl. Math. 45 (1992), 821-869

[Fr] A. Friedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type, Prentice - Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ (1964)

[GK1] Y. Giga und R. V. Kohn, Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat equations, Comm. Pure Appl. Math. 38 (1985), 297-319

[GK2] Y. Giga und R. V. Kohn, Characterizing blow-up using similarity variables, Ind. Univ. Math. J. 36 (1987), 1-40

[GK3] Y. Giga und R. V. Kohn, Nondegeneracy of blow-up for semilinear heat equations, Comm. Pure Appl. Math. 42 (1987), 845-884

[Gr] M. A. Grayson, A short note on the evolution of a surface by its mean curvature, Duke Math. J. 58(3) (1989), 555-558

[GT] D. Gilbarg und N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 224, Sec. Ed., Springer New York (1983)

[Ha1] R. S. Hamilton, Three-Manifolds with Positive Ricci Curvature, J. Diff. Geom. 17 (1982), 255-306

[Ha2] R. S. Hamilton, Lecture Notes on Heat Equations in Geometry, Honululu, Hawaii (1989)

[HV1] M. A. Herrero und J. J. L. Velázquez, Blow-up behaviour of one-dimensional semilinear parabolic equations, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. nonlin. 10 (1993), 131-189

[HV2] M. A. Herrero und J. J. L. Velázquez, Explosion de solutions d'equations semi-linéaires supercritiques, C. R. Acad. Sci. Paris 319 (1994), 141-145

[Hu1] G. Huisken, Flow by Mean Curvature of Convex Surfaces into Spheres, J. Diff. Geom. 20 (1984), 237-266

[Hu2] G. Huisken, Contracting convex hypersurfaces in Riemannian manifolds by their mean curvature, Invent. Math. 84 (1986), 463-480

[Hu3] G. Huisken, Asymptotic behaviour for singularities of the mean curvature flow, J. Diff. Geom. 31 (1991), 285-299

[Lb] G. M. Lieberman, Second order parabolic differential equations, World Scientific (1996)

[LSU] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov und N. A. Uralseva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, A. M. S. Transl. Math. Monogr. 23 (1968)

[PW] M. H. Protter und H. F. Weinberger, Maximum Principles in Differential Equations, Springer New York (1984)

[V1] J. J. L. Velázquez, Classification of singularities for blowing up solutions in higher dimensions, Trans. AMS 338 (1993), 441-464

[V2] J. J. L. Velázquez, Blow-up for semilinear parabolic equations, in: Recent Advances in PDE's, Ed. M. A. Herrero and E. Zuazua, Ed. Masson (1994), 131-145