Nichtlineare Evolution von Hyperflächen entlang ihrer mittleren Krümmung

DISSERTATION

der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Felix Schulze
aus Böblingen

betreut von
Prof. Dr. G. Huisken

Juni 2002

Tag der mündlichen Qualifikation:	29. Juli 2002
Dekan:	Prof. Dr. W. Knapp
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. G. Huisken
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. K. Ecker

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Idee, eine Fläche mit einer Geschwindigkeit proportional zu ihrer Krümmung zu deformieren, hat in den letzten beiden Jahrzehnten zu einem eingehenden Studium der Evolution von Hyperflächen des $\mathbb{R}^{n+1}$ geführt. Bei den dabei betrachteten Evolutionen wird eine Fläche in Richtung ihrer Normalen mit einer Geschwindigkeit abhängig von den verschiedenen skalaren Krümmungsgrößen der Fläche an diesem Punkt bewegt. Unter diesen Flüssen kommt aufgrund der Analogie zur Wärmeleitungsgleichung dem Fluss mit der mittleren Krümmung der Fläche als Geschwindigkeit eine besondere Bedeutung zu.

Dieser sogenannte mittlere Krümmungsfluss wurde von verschiedenen Autoren mit Hilfe von differentialgeometrischen Methoden studiert. So konnte Huisken in [Hui84] beweisen, dass in Dimensionen $n \geq 2$ unter diesem Fluss eine konvexe Fläche zu einem Punkt kontrahiert. Zusätzlich konnte er zeigen, dass die entsprechend reskalierten Flächen dabei immer runder werden. Für den Fall $n = 1$, das heißt für die Evolution von Kurven, erhielten Gage und Hamilton in [GH86] ähnliche Resultate. In [Gra87] konnte Grayson zeigen, dass in diesem Spezialfall die Voraussetzung der Konvexität der Anfangskurve durch die Bedingung, dass die Kurve eingebettet ist, ersetzt werden kann. Das Studium beliebiger Anfangsflächen wurde von Ecker und Huisken in [EH89, EH91] fortgesetzt.

Eine wichtige geometrische Eigenschaft des mittleren Krümmungsflusses ist, dass er den Gradientenfluss zum Oberflächenfunktional bezüglich der L^2-Norm auf der Fläche darstellt. Dies bedeutet, dass der Fluss entlang der mittleren Krümmung lokal am schnellsten den Flächeninhalt minimiert. Unter anderem findet das darin seinen Ausdruck, dass unter diesem Fluss Hyperflächen in allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeiten unter bestimmten Voraussetzungen nicht zu einem Punkt kontrahieren, sondern gegen eine Minimalfläche konvergieren. Anwendung findet diese Eigenschaft in einigen numerischen Verfahren zur Auffindung von sogenannten Horizonten in Modellen von Raumzeiten der allgemeinen Relativitätstheorie, vergleiche [Pas97]. Desweiteren tritt der mittlere Krümmungsfluss als Grenzfall verschiedener physikalischer Modelle zur Beschreibung der Evolution von Phasengrenzen in bestimmten Metallschmelzen auf, vergleiche [AC79]. Die Verbindung zum mittleren Krümmungsfluss kommt dadurch zustande, dass die Evolution der Phasengrenzen durch die Minimierung der freien Oberflächenenergie bestimmt wird, das Funktional der freien Oberflächenenergie aber proportional zum Oberflächenfunktional ist.

Wenn man nun auf einer geschlossenen Anfangsfläche M_0 mit strikt positiver mittlerer Krümmung H nach dem Gradientenfluss zum Oberflächenfunktional nicht bezüglich der L^2-Norm auf der Fläche, sondern bezüglich einer beliebigen L^p-Norm fragt, führt dies zu einem Fluss mit einer positiven Potenz k der mittleren Krümmung als Geschwindigkeit. Da somit auch unter diesem Fluss in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit bei entsprechenden Voraussetzungen die Flächen zu einer Minimalfläche konvergieren, können bei einem numerischen Verfahren zur Auffindung von Horizonten durch geeignete Wahl des Exponenten k Vorteile entstehen.

In der vorliegenden Arbeit studieren wir die Evolution von Hyperflächen des $\mathbb{R}^{n+1}$ unter dieser Klasse von Geschwindigkeiten. Konkret betrachten wir folgendes Anfangswertproblem. Sei M^n eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand und $F_0 : M^n \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$ eine Einbettung mit $H(F_0(M^n)) > \delta_0 > 0$. Wir suchen dann eine Familie von Hyperflächen

$$F : M^n \times [0,T) \mapsto \mathbb{R}^{n+1}, \qquad T > 0,$$

die das Anfangswertproblem

$$(\Diamond) \quad \begin{cases} F(\cdot, 0) = F_0(\cdot) \\ \dfrac{dF}{dt}(\cdot, t) = -H^k(\cdot, t)\nu(\cdot, t) \end{cases}$$

löst. H bezeichnet hierbei die mittlere Krümmung und ν die äußere Normale der Fläche $F(M^n, t)$, so dass $-H\nu = \vec{H}$ der mittlere Krümmungsvektor ist. Die Voraussetzung, dass die mittlere Krümmung der Anfangsfläche positiv ist, ist notwendig, um zu garantieren, dass das Problem wohldefiniert und strikt parabolisch ist. Mit der Evolutionsgleichung für H läßt sich zeigen, dass dies auch für alle positiven t erhalten bleibt.
Im ersten Teil dieser Arbeit studieren wir die glatte Evolution von Flächen unter dem H^k-Fluss. Die Evolutionsgleichung ist für $k \neq 1$ voll nichtlinear, es übertragen sich aber aufgrund der direkten Beziehung zum Fall $k = 1$ einige schöne Eigenschaften des mittleren Krümmungsflusses. Wir können zeigen:

Theorem 1.1 *Sei $F_0 : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte Einbettung, wobei*

i) $F_0(M^n)$ strikt konvex sei falls $0 < k < 1$,

ii) $F_0(M^n)$ schwach konvex sei falls $k \geqslant 1$,

und $H(F_0(M^n)) > 0$. Dann existiert eine eindeutige, glatte Lösung zum Anfangswertproblem $(\Diamond)$ auf einem maximalen, endlichen Zeitintervall $[0, T]$. Die Flächen $F(M^n, t)$ sind strikt konvex für alle $t > 0$ und sie kontrahieren für $t \to T$ zu einem Punkt im $\mathbb{R}^{n+1}$.

Konkret gliedert sich der erste Teil dieser Arbeit wie folgt. In einem ersten Abschnitt bestimmen wir die Evolutionsgleichungen verschiedener geometrischer Größen der Flächen M_t unter dem Fluss. Zusammen mit der Kurzzeitexistenz für parabolische Gleichungen dieses Typs können wir dann obere und untere Schranken an die Existenzzeit T beweisen, die nur von der Anfangsfläche M_0 abhängen. Dann zeigen wir, dass die Konvexität erhalten bleibt, sowie für $k \geq 1$, dass schwach konvexe

Flächen sofort strikt konvex werden. Mit Hilfe der Sternförmigkeit folgt dann eine gleichmäßige Schranke an die zweite Fundamentalform und damit die Existenz des Flusses, solange eine kleine Kugel innerhalb des von den Flächen M_t umschlossenen Volumens existiert. Da sich zusätzlich zeigen lässt, dass das Minimum des kleinsten Eigenwertes der zweiten Fundamentalform monoton steigt unter der Evolution, können die Flächen M_t für $t \to T$ nur zu einem Punkt kontrahieren.

Wie schon beim mittleren Krümmungsfluss ist es auch bei der glatten Kontraktion von Flächen positiver mittlerer Krümmung unter dem H^k-Fluss zu erwarten, dass sich Singularitäten bilden, noch bevor die Flächen auf einen Punkt zusammenschrumpfen können. Die Bildung und Struktur der Singularitäten des glatten mittleren Krümmungsflusses wurde von Huisken [Hui90] und von Huisken und Sinestrari [HS99a], [HS99b] untersucht. Da an diesen Singularitäten die glatte differentialgeometrische Beschreibung zusammenbricht, sind verschiedene Ansätze für alternative Beschreibungen des mittleren Krümmungsflusses entwickelt worden, die über Singularitäten hinweg definiert sind und auch mit möglichen Änderungen der Topologie der Flächen M_t umgehen können.

Ein Ansatz von Brakke [Bra78] stammt noch aus der Zeit vor der klassischen Beschreibung des mittleren Krümmungsflusses. Brakke formuliert dabei den Fluss als einen passenden Fluss von Varifaltigkeiten im Sinne der Geometrischen Maßtheorie. Für die von ihm konstruierten Lösungen kann er unter einer zusätzlichen Dichteannahme Teilregularität beweisen.

Ein anderer Ansatz stammt von Evans und Spruck [ES91] und Chen-Giga-Goto [CGG91]. Sie fassen M_0 als glatten Rand einer beschränkten offenen Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^{n+1}$ auf. Indem sie eine Funktion $g : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}$ wählen, für die $\partial\Omega = \{g = 0\}$ gilt, können sie eine lipschitzstetige "Viskositätslösung" $u(x,t) : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstruieren mit $u(x,0) = g(x)$, die garantiert, dass sich die Niveaumengen $\{M_{b,t}\}_{t\geqslant 0}$ mit $M_{b,t} := \{u(x,t) = b\}$ für alle b nach dem mittleren Krümmungsfluss bewegen, insbesondere $\{M_{0,t}\}_{t\geqslant 0}$ mit $M_{0,0} = \partial\Omega$. In [ES91] und [ES92] beweisen sie die Eindeutigkeit sowie weitere geometrische Eigenschaften dieser Evolution. In [ES95] knüpfen sie eine Verbindung zu den Lösungen von Brakke und erhalten somit auch Regularitätsaussagen für fast jede Niveaumenge $M_{b,t}$. Entsprechende und weiterführende Regularitätsaussagen, wiederum basierend auf der Arbeit Brakkes, erhält Ilmanen in [Ilm94]. Neuere Arbeiten von White für Anfangsflächen mit positiver mittlerer Krümmung deuten auf eine umfassendere partielle Regularitätstheorie hin ([Whi94], [Whi97]).

Im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit konstruieren wir eine schwache Lösung des H^k-Flusses. Sei dazu M_0 der glatte Rand eines offenen, beschränkten Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $H(M_0) \geq \delta_0 > 0$. Inspiriert von den Arbeiten von Evans und Spruck [ES91] und Chen-Giga-Goto [CGG91] suchen wir eine Lösung $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ zu folgender singulärer, degeneriert elliptischer Gleichung

$$(\star)\quad \begin{cases} \operatorname{div}\Big(\dfrac{Du}{|Du|}\Big) = \dfrac{-1}{|Du|^k} & \text{auf } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Da sich die Flächen mit positiver mittlerer Krümmung nach dem H^k-Fluss immer nach innen bewegen, können wir in diesem Fall die Evolution von $M_0 = \partial\Omega$ als die Niveauflächen einer einzigen, zeitunabhängigen Funktion beschreiben. An einem Punkt, an dem u glatt ist und $Du \neq 0$, besagt die Gleichung $(\star)$, dass sich die Niveaumengen $\Gamma_t := \{u = t\}$ nach dem H^k-Fluss bewegen. Der rechten Seite entspricht dabei die mittlere Krümmung der Niveaumenge und der linken Seite die entsprechende Potenz der Geschwindigkeit. Aufgrund der mit der höheren Nichtlinearität als im Fall $k = 1$ verbundenen Schwierigkeiten verfolgen wir nicht wie Evans und Spruck den Ansatz einer "Viskositätslösung" für $(\star)$, sondern betrachten das Funktional

$$J_u(v) = \int |Dv| - \frac{v}{|Du|^{1/k}} dx$$

für eine lipschitzstetige Funktion u mit $|Du|^{-1/k} \in L^1_{loc}(\Omega)$. Da die Gleichung $(\star)$ die Euler-Lagrange-Gleichung des Funktionals $J_u(v)$ ist, können wir damit schwache Lösungen definieren. Wir sagen, dass u eine schwache Lösung des Funktionals J_u auf Ω ist, falls

$$J_u(u) \leqslant J_u(v) \ ,$$

für alle lipschitzstetigen v auf Ω mit $\{u \neq v\} \Subset \Omega$. Falls zusätzlich verlangt wird, dass $v \geqslant u$ beziehungsweise $v \leqslant u$ ist, sprechen wir von einer Super- beziehungsweise Sublösung. Angeregt ist dieser Lösungsansatz durch eine Arbeit von Huisken und Ilmanen [HI98], die ein entsprechendes Funktional benutzen, um schwache Lösungen des inversen mittleren Krümmungsflusses zu definieren.

Wir konstruieren eine schwache, lipschitzstetige Superlösung des Funktionals J_u auf Ω mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$ und untersuchen spezielle Eigenschaften dieser Lösung mit Methoden aus der geometrischen Maßtheorie. Als zusammenfassendes Theorem erhalten wir das folgende Ergebnis.

Theorem 1.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega$ glatt und $H(\partial\Omega) > \delta_0 > 0$. Dann existiert eine lipschitzstetige schwache Superlösung $u : \Omega \to \mathbb{R}^+$ zu $(\star)$, mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$ und $\sup u = T$. Sei $\Gamma_t := \{u = t\}$ und $E_t := \{u > t\}$. Es gilt für alle $t \in [0, T]$:*

i) $\mathcal{L}^{n+1}(\Gamma_t) = 0$.

ii) Die Mengen E_t sind minimierend von außen in Ω, das heißt:

$$|\partial^* E_t \cap K| \leqslant |\partial^* F \cap K|$$

für alle $E \subset F \subset \Omega$ *mit* $F \setminus E \subset K \Subset \Omega$.

Es existiert eine Menge $B \subset [0,T]$ *mit* $\mathcal{L}^1([0,T] \setminus B) = 0$, *so dass für alle* $t \in B$ *gilt:*

iii) $\partial^* E_t \subset \Gamma_t$ *und* $\mathcal{H}^n(\Gamma_t \setminus \partial^* E_t) = 0$.

iv) Die Varifaltigkeiten $V_t := V(\Gamma_t, 1)$ *besitzen eine verallgemeinerte mittlere Krümmung*

$$H_t \in L^{k+1}_{loc}(\Gamma_t; \mathbb{R}^{n+1})\ .$$

und es ist für $t_1, t_2 \in [0,T],\ t_1 < t_2$*:*

$$|\partial^* E_{t_2}| + \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega |H_t|^{k+1}\, d\mu_t\, dt \leqslant |\partial^* E_{t_1}|$$

v) Für $k > n-1$ *sind die Flächen* Γ_t *bis auf eine abgeschlossene Menge* $A_t \subset \Gamma_t$ *mit* $\mathcal{H}^n(A_t) = 0$ *lokal von der Klasse* $C^{1,1-\frac{k+1}{n}}$.

vi) Sei $k > n-1$. *Dann existiert ein* η_0, *unabhängig von* t, *so dass*

$$\langle -H_t(x), \nu_t(x) \rangle \geqslant \eta_0 > 0$$

$\mathcal{H}^n$*-fast überall auf* Γ_t.

Dabei ist $\mathcal{L}^p$ das p-dimensionale Lebesgue-Maß, $\mathcal{H}^p$ das p-dimensionale Hausdorffmaß und $\partial^* F$ bezeichnet den reduzierten Rand einer Caccioppoli-Menge. Unter $|\partial^* F \cap K| := \mathcal{H}^n(\partial^* F \cap K)$ verstehen wir das n-dimensionale Hausdorffmaß von $\partial^* F$ in K, wobei wir dies als $+\infty$ setzen, falls F in keiner Umgebung von K eine Caccioppoli-Menge ist. Für eine Menge mit C^1-Rand entspricht dies dem Oberflächenmaß des Randes.
Die Eigenschaft (i) kann man so deuten, dass die "Flächen" Γ_t unter der Evolution nicht springen. Dem Punkt (ii) entspricht, dass die Mengen E_t ihre eigene minimierende Hülle sind, was sich in klassische Begriffe übersetzen lässt als positive mittlere Krümmung des Randes.
Generisch kann die Niveaumenge einer stetigen Funktion extrem wild sein. Punkt (iii) und die erste Aussage von Punkt (iv) zeigen aber, dass für fast alle Zeiten die Mengen Γ_t n-rektifizierbar sind, was bedeutet, dass sie $\mathcal{H}^n$-fast überall einen maßtheoretischen n-dimensionalen Tangentialraum besitzen, und somit in gewissem Sinne Differentialgeometrie auf diesen Flächen möglich wird. Die Aussage, dass eine verallgemeinerte mittlere Krümmung existiert ergibt weitere Regularität und geometrische Struktur. In Punkt (v) wird ausgenützt, dass nach einem tiefen Regularitätstheorem der geometrischen Maßtheorie schon entsprechend hohe L^p-Schranken an die verallgemeinerte mittlere Krümmung genügen, um zeigen zu können, dass sich dann solch eine 'Fläche' schon im klassischen Sinn lokal als Graph einer $C^{1,\alpha}$-Funktion schreiben läßt.

Punkt (vi) sagt für $k > n-1$, dass die Flächen nicht nur eine positive mittlere Krümmung haben, sondern die mittlere Krümmung sogar strikt von Null weg beschränkt ist. Dies steht in Zusammenhang dazu, dass wir eine strikt positive untere Schranke an die mittlere Krümmung der Anfangsfläche $M_0 = \partial\Omega$ vorausgesetzt haben und unter dem klassischen H^k-Fluss diese untere Schranke erhalten bleibt.
Im Vergleich zur zweiten Aussage von (iv) gilt bei der glatten Evolution $\{M_t\}$ einer Fläche M_0 für $t_1 < t_2$:

$$|M_{t_2}| + \int_{t_1}^{t_2}\int_{M_t} |H_t|^{k+1} d\mu_t \, dt = |M_{t_1}|$$

Die Ungleichung für den schwachen Fluss spiegelt dabei die Tatsache wider, dass u nur eine Superlösung und nicht auch eine Sublösung ist. Aus diesem Grunde ist auch die Frage nach der Eindeutigkeit solch eines schwachen Flusses nicht geklärt. Für den Fall $k = 1$ stimmt diese Lösung mit der von Evans und Spruck konstruierten Lösung überein, und ist so im "Viskositätssinne" eindeutig.

Der zweite Teil dieser Arbeit gliedert sich wie folgt: Nach der Definition der schwachen Lösung zeigen wir analog zur Arbeit von Huisken und Ilmanen die Äquivalenz des Variationsprinzips für eine Lösung u zu einem für alle Superniveaumengen E_t von u. Um die Existenz einer schwachen Superlösung zeigen zu können, approximieren wir $(\star)$ durch die quasilineare elliptische partielle Differentialgleichung:

$$(\star)_\varepsilon \begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{Du^\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + |Du^\varepsilon|^2}}\right) = -\left(\varepsilon^2 + |Du^\varepsilon|^2\right)^{-\frac{1}{2k}} & \text{auf } \Omega \\ u^\varepsilon = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \; . \end{cases}$$

Dieses Verfahren der elliptischen Regularisierung wurde in [ES91] und [HI98] angewendet um die Existenz einer schwachen Lösung zu zeigen. Die Gleichung $(\star)_\varepsilon$ besitzt eine geometrische Interpretation, da die Graphen

$$N_t^\varepsilon := \operatorname{graph}\left(\frac{u^\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{t}{\varepsilon}\right)$$

translatierende Lösungen des klassischen H^k-Flusses darstellen. Die Idee dieses Verfahrens ist, dass die möglicherweise singuläre Evolution von $\{\Gamma_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ im $\mathbb{R}^n$ approximiert wird durch die Evolution von $\{N_t^\varepsilon\}_{0\leqslant t\leqslant T}$, und zwar in dem Sinne, dass $N_t^\varepsilon \approx \Gamma_t \times \mathbb{R}$ für kleines ε. Da die Graphen N_t^ε den H^k-Fluss klassisch lösen, ist die zugehörige Niveaufunktion U^ε eine schwache Lösung des Funktionals J_{U^ε} auf $\Omega\times\mathbb{R}$. Mit Hilfe von Barrieren folgen dann gleichmäßige a-priori Sup- und Gradientenschranken an Lösungen von $(\star)_\varepsilon$, die mit einem Kontinuitätsargument die Existenz liefern. Insbesondere können wir eine Teilfolge auswählen, so dass $u^{\varepsilon_i} \to u$ gleichmäßig auf Ω. Aus dem Variationsprinzip für U^ε erhalten wir im Limes $\varepsilon \to 0$ die Eigenschaften (i), (ii) und (iii).

Mit Hilfe eines Resultats von Evans und Spruck [ES95], das sicherstellt, dass unter hier gegebenen Voraussetzungen nicht nur $Du^\varepsilon \rightharpoonup Du$, sondern sogar

$$|Du^\varepsilon| \rightharpoonup |Du| \tag{+}$$

konvergiert, können wir zeigen, dass $\int |Du^\varepsilon|^{-\frac{1}{k}}\, dx$ im Limes $\varepsilon \to 0$ unterhalbstetig ist. Dies hat zur Konsequenz, dass die Funktion u eine schwache Superlösung auf Ω ist.
Um weitere Regularitätsaussagen über die Mengen Γ_t machen zu können benützen wir nun L^p-Schranken an die mittlere Krümmung der Graphen N_t^ε, die aus der Evolutionsgleichung für den Flächeninhalt unter dem H^k-Fluss folgen. Mit diesen L^p-Schranken können wir anhand des Kompaktheitssatzes von Allard zeigen, dass für fast alle t $N_t^{\varepsilon_j} \to V_t$ im Sinne von Varifaltigkeiten konvergiert, wobei die Varifaltigkeiten V_t bis auf höhere Multiplizitäten mit den Mengen $\Gamma_t \times \mathbb{R}$ übereinstimmen. Da die Eigenschaft (+) impliziert, dass sich für fast alle t die Flächen $N_t^{\varepsilon_j}$ für $\varepsilon_j \to 0$ nicht "übereinanderlegen" können, sind für fast alle t die Multiplizitäten identisch Eins. So können wir Punkt (iv) und zusammen mit dem Regularitätstheorem von Allard auch Punkt (v) zeigen. Punkt (vi) ist eine Konsequenz aus dem Variationsprinzip sowie der Regularität aus (v).

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Herrn Prof. Dr. Gerhard Huisken, insbesondere für die Anregung zu dieser Arbeit und für die vielseitige Unterstützung über die letzten Jahre hinweg. Herrn Prof. Dr. Tom Ilmanen möchte ich für die Diskussionen während meines Besuches in Zürich meinen Dank aussprechen. Bei Sabine Dieter und Bernhard Nowak bedanke ich mich für die vielen erhellenden Diskussionen und für die Hilfe bei der Korrektur dieser Arbeit. Ebenso danke ich allen Mitarbeitern des Arbeitsbereiches Analysis.

2 Der klassische Fluss

2.1 Notation und Grundlagen

Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit ohne Rand, und $F : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte Immersion. Die induzierte Metrik bezeichnen wir mit $g = \{g_{ij}\}$, was sich in lokalen Koordinaten darstellen lässt als

$$g_{ij}(p) = \langle \frac{\partial F}{\partial x^i}(p), \frac{\partial F}{\partial x^j}(p) \rangle \ , p \in M^n,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das gewöhnliche Skalarprodukt des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Mit ∇ beziehungsweise $\{\Gamma_k^{ij}\}$ sei der zugeordnete Levi-Civita Zusammenhang und mit $\{R_{ijkl}\}$ der Riemannsche Krümmungstensor bezeichnet. Wenn mit $\nu(p)$ die Wahl eines lokalen Normalenvektorfeldes bezeichnet sei, erhalten wir für die zweite Fundamentalform $A = \{h_{ij}\}$:

$$h_{ij}(p) = \langle \frac{\partial \nu}{\partial x^i}(p), \frac{\partial F}{\partial x^j}(p) \rangle = -\langle \nu(p), \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \rangle \ , p \in M^n,$$

Für den Fall, dass $F(M^n)$ eine kompakte, orientierbare Hyperfläche beschreibt, wollen wir im Folgenden immer davon ausgehen, dass $\nu(p)$ die äußere Einheitsnormale ist. Somit ergibt sich A als symmetrische Bilinearform

$$A(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

und die selbstadjungierte Weingartenabbildung

$$W(p) : T_pM \to T_pM$$

als $W = \{h^i_j\}, \ h^i_j := g^{ik} h_{kj}$. Die Eigenwerte dieser Abbildung im Punkte p seien mit $\lambda_1(p), \ldots, \lambda_n(p)$ bezeichnet. Man nennt eine Fläche schwach konvex, falls $\lambda_i(p) \geqslant 0$ $\forall \ p \in M, \ i = 1, \ldots, n$ und strikt konvex, falls $\lambda_i(p) > 0 \ \forall \ p \in M, \ i = 1, \ldots, n$.
Mit Hilfe der homogenen Polynome ergeben sich die klassischen skalaren Invarianten der zweiten Fundamentalform:
Die mittlere Krümmung ist

$$H := \operatorname{tr}(W) = g^{ij} h_{ij} = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n \ ,$$

die Gauß-Krümmung

$$G := \det(W) = \det\{h^i_j\} = \frac{\det\{h_{ij}\}}{\det\{g_{ij}\}} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \ ,$$

die totale Krümmung

$$|A|^2 := \operatorname{tr}(W^t W) = h^i_j h^j_i = h^{ij} h_{ij} = g^{ik} g^{jl} h_{ij} h_{kl} = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 \ ,$$

und die skalare Krümmung

$$R := H^2 - |A|^2 \,.$$

Dabei ist allgemein die Norm eines Tensors $T = \{T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\}$ definiert durch

$$|T|^2 = g_{i_1k_1}\cdots g_{i_rk_r} g^{j_1l_1}\cdots g^{j_sl_s} T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} T^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s} \;.$$

Aus den Gaussgleichungen erhält man einen Zusammenhang zwischen der zweiten Fundamentalform und dem Riemannschen Krümmungstensor,

$$R_{ijkl} = h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}.$$

Somit gilt für das Vertauschen zweiter kovarianter Ableitungen:

$$\nabla_i\nabla_j X^k - \nabla_j\nabla_i X^k = R_{ijlm} g^{kl} X^m = (h_{il}h_{jm} - h_{im}h_{jl}) g^{kl} X^m$$

$$\nabla_i\nabla_j \omega_k - \nabla_j\nabla_i \omega_k = R_{ijkl} g^{lm} \omega_m = (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}) g^{lm} \omega_m$$

für ein Vektorfeld $X = \{X^k\}$ und eine 1-Form $\omega = \{\omega_k\}$.

Zusammen mit den Codazzi-Gleichungen $\nabla_i h_{kl} = \nabla_k h_{il} = \nabla_l h_{ik}$ ergeben sich daraus für die zweiten kovarianten Ableitungen von A folgende Vertauschungsrelationen:

Lemma 2.1 *Für die zweiten kovarianten Ableitungen von A gelten folgende Identitäten:*

$$\nabla_k\nabla_l h_{ij} = \nabla_i\nabla_j h_{kl} + h_{kl}h_{im}h^m_j - h_{km}h_{il}h^m_j + h_{kj}h_{im}h^m_l - h_{km}h_{ij}h^m_l$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}\nabla_k\nabla_l h_{ij} &= \nabla_k(\nabla_i h_{lj}) = \nabla_i\nabla_k h_{lj} + R_{kilm}h^m_j + R_{kijm}h^m_l \\ &= \nabla_i\nabla_j h_{kl} + (h_{kl}h_{im} - h_{km}h_{il})h^m_j + (h_{kj}h_{im} - h_{km}h_{ij})h^m_l \,.\end{aligned}$$

□

Korollar 2.2 *Für den Laplace-Operator Δ ($= \sum_i \nabla_i\nabla_i$ in Normalkoordinaten) der zweiten Fundamentalform gilt*

$$\begin{aligned}\Delta h_{ij} &= \nabla_i\nabla_j H + H h^m_i h_{mj} - h_{ij}|A|^2 \\ \frac{1}{2}\Delta|A|^2 &= h^{ij}\nabla_i\nabla_j H + |\nabla A|^2 + H\,tr(A^3) - |A|^4 \,.\end{aligned}$$

2.2 Evolutionsgleichungen

Im Folgenden sei M^n immer eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand, und

$$F_0 : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$$

eine Immersion. Desweiteren sei die glatte Familie von Hyperflächen

$$F : M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1},\ T > 0,$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} F(\cdot,0) &= F_0(\cdot) \\ \frac{\partial F}{\partial t}(\cdot,t) &= -f(\cdot,t)\ \nu(\cdot,t)\ . \end{aligned} \tag{$\star_f$}$$

Die Geschwindigkeit f sei dabei eine glatte, symmetrische und homogene Funktion der Hauptkrümmungen λ_i. Aufgrund der Symmetrie von f können wir äquivalent dazu f als eine Funktion $\tilde{f}$ der Weingartenabbildung W oder als eine Funktion $\hat{f}$ der zweiten Fundamentalform A auffassen:

$$\tilde{f}(W) = \tilde{f}(\{h^i_j\}) = \hat{f}(A) = \hat{f}(\{h_{ij}\}) = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Aus der Evolutionsgleichung ($\star_f$) für die Flächen $M_t := F(M^n,t)$ ergeben sich nun Evolutionsgleichungen für deren geometrische Größen.

Lemma 2.3 *Es gelten folgende Evolutionsgleichungen für geometrische Größen der Flächen M_t, d.h. für Lösungen der Gleichung ($\star_f$):*

i) $\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2fh_{ij}$

ii) $\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = 2fh^{ij}$

iii) $\frac{\partial}{\partial t} d\mu = -Hf\, d\mu$

iv) $\frac{\partial}{\partial t} \nu = \nabla f$

v) $\frac{\partial}{\partial t} h_{ij} = \nabla_i \nabla_j f - h_{ik}h^k_j f$

vi) $\frac{\partial}{\partial t} h^i_j = \nabla^i \nabla_j f + h^{ik}h_{kj} f$

vii) $\frac{\partial}{\partial t} f = \frac{\partial f}{\partial h^i_j} \nabla^i \nabla_j f + \frac{\partial f}{\partial h^i_j} h^{ik}h_{kj} f$

viii) $\frac{\partial}{\partial t} H = \Delta f + |A|^2 f$

Beweis: Siehe zum Beispiel [And94].

Wenn wir nun voraussetzen, dass die Anfangsfläche M_0 orientierbar ist, das heißt ein globales Normalenvektorfeld wählbar ist, sowie dass für die mittlere Krümmung

$$H_0(p) > 0 \ \ \forall \, p \in M$$

gilt, so ist dies auf einem kleinen Zeitintervall $[0, \tau)$, $\tau > 0$ erhalten und die Geschwindigkeit $f = H^k$, $k > 0$ wohldefiniert. Damit ergeben sich zusammen mit Lemma 2.1 die folgenden Evolutionsgleichungen.

Korollar 2.4 *Für den Fluss mit der Geschwindigkeit $f = H^k$, $k > 0$ gelten die Evolutionsgleichungen:*

i) $\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2H^k h_{ij}$

ii) $\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = 2H^k h^{ij}$

iii) $\frac{\partial}{\partial t} d\mu = -H^{k+1}\, d\mu$

iv) $\frac{\partial}{\partial t} \nu = kH^{k-1}\nabla H$

v) $\frac{\partial}{\partial t} h_{ij} = kH^{k-1}\Delta h_{ij} + k(k-1)H^{k-2}\nabla_i H \nabla_j H - (k+1)H^k h_{il}h^l_j + kH^{k-1}|A|^2 h_{ij}$

vi) $\frac{\partial}{\partial t} h^i_j = kH^{k-1}\Delta h^i_j + k(k-1)H^{k-2}\nabla^i H \nabla_j H - (k-1)H^k h^i_l h^l_j + kH^{k-1}|A|^2 h^i_j$

vii) $\frac{\partial}{\partial t} H = kH^{k-1}\Delta H + k(k-1)H^{k-2}|\nabla H|^2 + |A|^2 H^k$

viii) $\frac{\partial}{\partial t} |A|^2 = kH^{k-1}\Delta|A|^2 - 2kH^{k-1}|\nabla A|^2 + 2k(k-1)H^{k-2}h^i_j\nabla^i H \nabla_j H$
$\qquad - 2(k-1)H^k tr(A^3) + 2kH^{k-1}|A|^4$

ix) $\frac{\partial}{\partial t} \langle x, \nu\rangle = kH^{k-1}\Delta\langle x, \nu\rangle - (k+1)H^k + kH^{k-1}|A|^2\langle x, \nu\rangle$

Beweis: Die Punkte i) - viii) folgen aus Lemma 2.3 und Korollar 2.2.

ix) Man erhält mit

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle x, \nu\rangle = -H^k\langle \nu, \nu\rangle + kH^{k-1}\langle x, \nabla H\rangle = -H^k + kH^{k-1}\langle x, \nabla H\rangle$$

und in einem adaptierten orthonormalen n-Bein

$$\begin{aligned}\Delta\langle x, \nu\rangle &= \nabla_i\nabla_i\langle x, \nu\rangle \\ &= \nabla_i(h_{ij}\langle x, e_j\rangle) = \langle x, \nabla H\rangle + H - |A|^2\langle x, \nu\rangle\end{aligned}$$

die gewünschte Gleichung. $\square$

Dass der H^k-Fluss, wie in der Einleitung behauptet, der Gradientenfluss bezüglich der $L^{(k+1)/k}$-Norm auf der Fläche ist, sieht man wie folgt. Die Evolution des Oberflächeninhalts $|M_t|$ der Fläche zum Zeitpunkt t unter der Evolution $d/dt\; M_t = -f\nu$ bei beliebiger Geschwindigkeit f ist nach Lemma 2.3 bestimmt durch die Formel

$$\frac{d}{dt}|M_t| = -\int\limits_M f \cdot H d\mu_t \;.$$

Daraus erhalten wir mit der Hölderschen Ungleichung und der Eigenschaft, dass $H > 0$ unter dem H^k-Fluss erhalten ist:

$$\frac{|\int f \cdot H d\mu_t|}{\left(\int |f|^{\frac{k+1}{k}} d\mu_t\right)^{\frac{k}{k+1}}} \leqslant \left(\int H^{k+1} d\mu_t\right)^{\frac{1}{k+1}} = \frac{\int (H^k) \cdot H d\mu_t}{\left(\int (H^k)^{\frac{k+1}{k}} d\mu_t\right)^{\frac{k}{k+1}}} \;,$$

wobei Gleichheit genau dann auftritt, wenn $f = H^k$.

Im Falle der Evolution strikt konvexer Hyperflächen wird es sich als hilfreich erweisen nicht nur die Weingartenabbildung, sondern auch deren inverse Abbildung W^{-1} zu betrachten. Falls also $F(M,\cdot)$ strikt konvex ist, ist $W_p^{-1} = \{b^i_j\} : T_pM^n \to T_pM^n$ wohldefiniert, und es gilt

$$b^i_l h^l_j = \delta^i_j,$$

wobei hier die Eigenwerte von W_p^{-1} mit $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ bezeichnet werden. Offensichtlich gilt

$$\kappa_i(p) = \frac{1}{\lambda_i(p)} \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Die b^i_j genügen der Evolutionsgleichung:

Lemma 2.5 *Es gilt für alle* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\frac{\partial}{\partial t} b^i_j = kH^{k-1}\Delta b^i_j - 2kH^{k-1}h^l_m \nabla_p b^i_l \nabla^p b^m_j - k(k-1)H^{k-2}(b^i_l \nabla_l H)(b^m_j \nabla_m H)$$
$$+ (k-1)H^k \delta^i_j - kH^{k-1} b^i_j |A|^2$$

Beweis: Aus $b^i_l h^l_j = \delta^i_j$ erhalten wir $\frac{\partial}{\partial t} b^i_j = -b^i_p b^q_j \frac{\partial}{\partial t} h^p_q$ und $\nabla_l b^i_j = -b^i_p b^q_j \nabla_l h^p_q$ womit sich

$$\Delta b^i_j = -b^i_l b^m_j \Delta h^l_m + 2h^l_m \nabla_p b^i_l \nabla^p b^m_j$$

ergibt, was zusammen mit Korollar 2.4 die Behauptung liefert. □

Es stellt sich heraus, dass sich die Evolutionsgleichung für b^i_j vereinfachen lässt, wenn sich $f(\lambda) = 1/g(\kappa)$ als Kehrwert einer Funktion g in den Hauptradien schreiben lässt.

Im Folgenden wollen wir die Funktionen f und g jeweils als Funktionen von λ beziehungsweise h^i_j und κ beziehungsweise b^i_j auffassen, ohne dies in der Notation zu unterscheiden. Es ergibt sich:

Lemma 2.6 *Sei* $f(h^i_j) = 1/g(b^i_j)$. *Es gilt*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial h^i_j \partial h^p_q} &= \frac{2}{f}\,\frac{\partial f}{\partial h^i_j}\,\frac{\partial f}{\partial h^p_q} - \frac{1}{g^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial b^m_n \partial b^k_l}\, b^{mq}\, b_{np}\, b^{jk}\, b_{il} - \frac{1}{g^2}\,\frac{\partial g}{\partial b^k_l}\left(b^{jq}\, b^k_p\, b_{il} + b^{jk}\, b^q_l\, b_{ip}\right)\\ &= \frac{2}{f}\,\frac{\partial f}{\partial h^i_j}\,\frac{\partial f}{\partial h^p_q} - \frac{1}{g^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial b^m_n \partial b^k_l}\, b^{mq}\, b_{np}\, b^{jk}\, b_{il} - \frac{\partial f}{\partial h^{ip}}\, b^{jq} - \frac{\partial f}{\partial h_{jq}} b_{ip}\,.\end{aligned}$$

Beweis: Aus $h^k_j\, b^j_l = \delta^k_l$ folgt $\frac{\partial}{\partial h^i_j}\, b^k_l = -\, b^{jk}\, b_{il}$. Also ist

$$\frac{\partial f}{\partial h^i_j} = -\,\frac{1}{g^2}\,\frac{\partial g}{\partial h^i_j} = -\,\frac{1}{g^2}\,\frac{\partial g}{\partial b^k_l}\,\frac{\partial}{\partial h^i_j}\, b^k_l = \frac{1}{g^2}\,\frac{\partial g}{\partial b^k_l}\, b^{jk} b_{il}\,.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial h^i_j \partial h^p_q} = -\,\frac{2}{g^3}\,\frac{\partial g}{\partial h^p_q}\,\frac{\partial g}{\partial b^k_l}\, b^{jk} b_{il} + \frac{1}{g^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial b^m_n \partial b^k_l}\Big(\frac{\partial}{\partial h^p_q}\, b^m_n\Big) b^{jk} b_{il} + \frac{1}{g^2}\,\frac{\partial g}{\partial b^k_l}\,\frac{\partial}{\partial h^p_q}\left(b^{jk} b_{il}\right).$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial h^p_q}\, b^{jk} = \frac{\partial}{\partial h^p_q}\left(g^{jl}\, b^k_l\right) = -\, g^{jl}\, b^k_p\, b^q_l = -\, b^{jq}\, b^k_p$$

und analog

$$\frac{\partial}{\partial h^p_q}\, b_{il} = \frac{\partial}{\partial h^p_q}\left(g_{ik}\, b^k_l\right) = -\, g_{ik}\, b^k_p\, b^q_l = -\, b_{ip}\, b^q_l$$

ergibt sich die Behauptung. □

An einigen Punkten ist es günstig, nicht nur Größen wie H und $|A|^2$, sondern auch den gesamten Satz elementarsymmetrischer Polynome S_l in den Hauptkrümmungen wie auch deren Quotienten Q_l zu betrachten. Aus diesem Grund sind im nächsten Abschnitt einige ihrer Eigenschaften zusammengestellt. Für Beweise wollen wir auf [Lie96], [HS99a] oder [Die02] verweisen.

Für jedes $l \in \{1, ..., n\}$ seien die elementarsymmetrischen Polynome S_l und deren Quotienten Q_l definiert als

$$S_l(\lambda) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_l} \qquad \text{für} \quad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$$

und

$$Q_l(\lambda) = \frac{S_l(\lambda)}{S_{l-1}(\lambda)} \qquad \text{für} \quad \lambda \in \Gamma_{l-1}$$

mit $S_0 \equiv 1$ und $S_l \equiv 0$ für $l > n$.
Dabei definieren wir

$$\Gamma_l := \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid S_1(\lambda) > 0,\, S_2(\lambda) > 0, \dots, S_l(\lambda) > 0\}\,.$$

Die Mengen Γ_l sind offene Kegel und erfüllen $\Gamma_l \supset \Gamma_{l+1}$ für alle $l \in \{1, \dots, n-1\}$. Γ_n stimmt mit dem positiven Kegel überein.

Weiter wollen wir mit $S_{l;i}(\lambda)$ die Summe aller Terme von $S_l(\lambda)$ bezeichnen, die den Faktor λ_i nicht enthalten. Folgenden Identitäten ergeben sich (vgl. [HS99a]):

Lemma 2.7 *Für alle $l \in \{0, ..., n\}$, $i \in \{1, ..., n\}$ und $\lambda \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_{l+1}}{\partial \lambda_i}(\lambda) &= S_{l;i}(\lambda)\,,\\
S_{l+1}(\lambda) &= S_{l+1;i}(\lambda) + \lambda_i S_{l;i}(\lambda)\,,\\
\sum_{i=1}^{n} S_{l;i}(\lambda) &= (n-l) S_l(\lambda)\,,\\
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_{l;i}(\lambda) &= (l+1) S_{l+1}(\lambda)\,,\\
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 S_{l;i}(\lambda) &= S_1(\lambda) S_{l+1}(\lambda) - (l+2) S_{l+2}(\lambda)\,.
\end{aligned}$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft dieser Polynome ist die sogenannte *Newton-Ungleichung*.

Lemma 2.8 *Für alle $l \in \{1, ..., n-1\}$ und $\lambda \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$(l+1)(n-l+1) S_{l-1}(\lambda) S_{l+1}(\lambda) \leqslant l(n-l) S_l^2(\lambda)\,.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn alle λ_i identisch sind.

Ebenso gilt:

Lemma 2.9

i) Die Funktion Q_{l+1} ist konkav auf Γ_l für $l \in \{0, \dots, n-1\}$.

ii) $\frac{\partial}{\partial \lambda_i} Q_l(\lambda) > 0$ auf Γ_l für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $l \in \{2, \dots, n\}$.

Mit diesen Eigenschaften und Lemma 2.6 ergibt sich eine hilfreiche Evolutionsungleichung für die inverse Weingartenabbildung.

Lemma 2.10 *Sei $k > 0$ und M_t ein Fluss strikt konvexer Flächen. Dann gilt:*

$$\frac{\partial}{\partial t} b^i_j \leqslant kH^{k-1}\Delta b^i_j + (k-1)H^k\delta^i_j - kH^{k-1}b^i_j|A|^2$$

Beweis: Für $k \geqslant 1$ folgt dies direkt aus der Evolutionsgleichung von b^i_j. Für $k < 1$ wenden wir Lemma 2.6 auf $f = H^k(\lambda)$ und $g = Q^k_n(\kappa)$ an. Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} k(k-1)H^{k-2}\delta^m_l\delta^q_p = \frac{\partial^2 f}{\partial h^m_l \partial h^q_p} &= 2k^2H^{k-2}\delta^m_l\delta^q_p - H^{2k}\frac{\partial^2(Q^k_n)}{\partial b^n_o \partial b^r_s} b^{nq}b_{op}b^{rm}b_{sl} \\ &\quad - kH^{k-1}\delta_{lp}b^{mq} - kH^{k-1}\delta^{mq}b_{lp} \end{aligned}$$

und durch Multiplikation mit $\nabla^v h^m_l \nabla_w h^q_p$ und Summation

$$\begin{aligned} k(k-1)H^{k-2}\nabla^v H\nabla_w H &= 2k^2H^{k-2}\nabla^v H \nabla_w H \\ &\quad - H^{2k}\frac{\partial^2(Q^k_n)}{\partial b^n_o\partial b^r_s}(b^{nq}b_{op}\nabla_w h^p_q)(b^{rm}b_{ls}\nabla^v h^l_m) \\ &\quad - 2kH^{k-1}b^{mq}\nabla_w h^p_q \nabla^v h_{pm}. \end{aligned}$$

Anhand der Codazzi-Gleichungen und der Konkavität von $Q^k_n(\kappa)$ für $0 < k \leqslant 1$ folgt nun

$$-k(k+1)H^{k-2}\nabla^v H\nabla_w H \geqslant -2kH^{k-1}b^{mq}\nabla_p h^v_m \nabla^p h_{qw} \ ,$$

was zusammen mit

$$\nabla^l h^q_w = -h^s_w h^q_t \nabla^l b^t_s$$

und durch Multiplizieren mit $\frac{k-1}{k+1}\, b^i_v\, b^w_j$, sowie $-1 < \frac{k-1}{k+1} < 0$, ergibt:

$$-k(k-1)H^{k-1}(b^i_v\nabla^v H)(b^w_j\nabla_w H) \leqslant 2kH^{k-1}h^l_m\nabla_p b^i_l \nabla^p b^m_j \ .$$

Einsetzen in Lemma 2.5 liefert die Behauptung. □

2.3 Erste Eigenschaften

Sei $F_0 : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte geschlossene Hyperfläche wie in der Einleitung. Zusätzlich sei M_0 orientierbar und ν die Wahl eines Einheitsnormalenvektorfeldes. Wir wollen nun das Anfangswertproblem $(\star_f)$ betrachten für $f = H^k,\ k > 0$. Um Wohldefiniertheit und Kurzzeitexistenz garantieren zu können, müssen wir wie im vorherigen Abschnitt voraussetzen, dass

$$H_0(p) > \delta > 0 \ \text{ für alle } p \in M. \tag{+}$$

Zu bemerken ist, dass selbst mit dieser Bedingung Gleichung $(\star_{H^k})$ nur schwach parabolisch ist aufgrund der Invarianz der Gleichung unter tangentialen Diffeomorphismen. Nichtsdestotrotz garantiert (+), dass

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} H^k_0(\lambda) > 0 \quad \text{für alle } 1 \leqslant i \leqslant n,\ p \in M^n,$$

womit wir aus [HP96] erhalten:

Proposition 2.11 (Kurzzeitexistenz) *Falls die mittlere Krümmung auf M_0 strikt positiv ist, hat $(\star_{H^k})$ eine eindeutige Lösung $F : M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$, zumindest für ein kleines $T > 0$.*

Bemerkung 2.12 Es ist nicht zu erwarten, dass für $k > 1$ im Allgemeinen glatte Lösungen auf einem kleinen Zeitintervall existieren, solange man nur

$$H_0(p) \geqslant 0 \quad p \in M^n$$

fordert. Dies folgt aus einem Vergleich mit der Diffusionsgleichung im porösen Medium

$$\frac{\partial}{\partial t}u - \Delta(u^\gamma) = 0 \ \text{ auf } \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$

für $u \geqslant 0,\ \gamma > 1$. Für diese Gleichung ist bekannt, dass Lösungen existieren, deren Träger zum Zeitpunkt $t = 0$ und auch für spätere Zeiten beschränkt ist, wie auch dass diese Lösungen nicht notwendig C^∞ sind. Ein anderes geometrisches Beispiel liefert der Gauß-Fluss

$$\frac{\partial}{\partial t}F = -K \cdot \nu$$

wofür R. Hamilton [Ham94] zuerst bemerkte, dass zu schwach konvexen Anfangsdaten Lösungen existieren, die schwach konvex bleiben und nicht C^∞ sind.

Beispiel 2.13 Für die Evolution einer Sphäre mit Anfangsradius R_0 erhalten wir als Evolutionsgleichung für den Radius $R(t) = \frac{n}{H(t)}$

$$\frac{d}{dt}R = -\Big(\frac{n}{R}\Big)^k$$

mit der Lösung

$$R(t) = \big(R_0^{k+1} - (1+k)n^k \cdot t\big)^{\frac{1}{k+1}},$$

womit sich als maximale Existenzzeit $T = \frac{R_0^{k+1}}{n^k(1+k)}$ ergibt.

Mit Hilfe der Evolutionsgleichung von H folgt nun eine untere Schranke an $H_{\min}(t) := \min_{p \in M^n} H(p,t)$ und eine obere Schranke an das maximale Existenzintervall.

Lemma 2.14 *Es ist*

$$H_{min}(t) \geqslant H_{min}(0) \cdot \big(1 - \frac{k+1}{n} H_{min}^{k+1}(0) \cdot t\big)^{-\frac{1}{k+1}}.$$

Beweis: Aus der Evolutionsgleichung für H (Korollar 2.4) und $|A|^2 \geqslant \frac{1}{n}H^2$ erhält man

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H &= kH^{k-1}\Delta H + k(k-1)H^{k-2}|\nabla H|^2 + |A|^2 H^k \\ &\geqslant kH^{k-1}\Delta H + k(k-1)H^{k-2}|\nabla H|^2 + \frac{1}{n}H^{k+2}\ ,\end{aligned}$$

woraus sich aus dem Vergleich mit der GDGL

$$\frac{d}{dt}\varphi = \frac{1}{n}\varphi^{k+2}; \quad \varphi(0) = H_{\min}(0)$$

die gewünschte Abschätzung ergibt. □

Bemerkung 2.15 Insbesondere liefert dies für die maximale Existenzzeit des Flusses $T_{\max}$, dass $T_{\max} \leqslant \frac{n}{k+1} H_{\min}^{-(k+1)}(0)$.

Mit Hilfe des elliptischen Maximumprinzips folgt nun, dass eine Anfangsfläche M_0 unter dem H^k-Fluss eingebettet bleibt.

Lemma 2.16 *Sei $F_0(M^n)$ eine eingebettete Hyperfläche des $\mathbb{R}^{n+1}$ und $F : M^n \times [0,T)$ ein H^k-Fluss mit $H(\cdot,t) \geqslant 0$ für $t \in [0,T)$. Dann ist $F(M^n,t)$ eine Einbettung für alle $t \in [0,T)$.*

Beweis: Da M_0 eingebettet ist, ist M_0 insbesondere orientierbar und berandet ein Volumen V_0. Sei $t_0 \in (0,T)$ der erste Zeitpunkt an dem $F(M^n,\cdot)$ keine Einbettung mehr ist. Als einzige Möglichkeit dafür, dass bei $t = t_0$ keine Einbettung vorhanden ist, kann auftreten, dass sich zwei Lagen der Fläche an einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ berühren. Und da $F(M^n,t)$ für $t < t_0$ ein Volumen berandet sind die Normalenvektoren jeweils nach außen gerichtet. Zusätzlich können wir o.B.d.A. voraussetzen, dass die beiden Lagen in keiner Umgebung von x_0 übereinstimmen. Indem wir die Flächen wieder lokal als Graphen über dem gemeinsamen Tangentialraum in x_0 auffassen, ergibt sich wegen $H \geqslant 0$ ein Widerspruch zum strikten elliptischen Maximumprinzip. □

Aus dem strikten Maximumprinzip für parabolische Differentialgleichungen bekommt man ein Barrieren-Prinzip.

Proposition 2.17 *Seien $F_i : M_i^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $i = 1,2$ zwei Einbettungen und $F_i : M_i^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ die zugehörigen H^k-Flüsse, und $H_i(\cdot,t) \geqslant \delta > 0$ für $t \in [0,T)$. Sind dann $F_1(M_1^n,0)$ und $F_2(M_2^n,0)$ disjunkt, so auch $F_1(M_1^n,t)$ und $F_2(M_2^n,t)$ für alle $t \in [0,T)$.*

Beweis: Angenommen zum Zeitpunkt t_0 sei in $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ der erste Berührpunkt der beiden Flüsse. Dann können wir dies in $U \times (t_0 - \varepsilon, t_0]$, U eine Umgebung von x_0, als die Evolution der Graphen zweier Funktionen u_1, u_2 über dem Tangentialraum $T_{x_0}F_1(M_1^n,t_0) = T_{x_0}F_2(M_2^n,t_0)$ auffassen. O.B.d.A. sei $u_1 \geqslant u_2$ und $u_1 > u_2$ auf $\bar{U} \times [t_0 - \varepsilon, t_0)$. Sei weiter angenommen, dass die Normalenvektoren der beiden Graphen in (x_0,t_0) in die entgegengesetzte Richtung zeigen. Dann können sie jeweils nur nach außen zeigen, da sich die Flächen sonst nicht in x_0 hätten berühren können. Mit dem strikten elliptischen Maximumprinzip folgt dann aber wie in Lemma 2.16

der Widerspruch. Wir können damit davon ausgehen, dass die Normalenvektoren in die gleiche Richtung zeigen. Anhand von Interpolation zwischen den parabolischen Differentialgleichungen, die u_1 und u_2 erfüllen, sieht man, dass auch $w := u_1 - u_2$ eine lineare, strikt parabolische Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{\partial}{\partial t} w = a^{ij} D_i D_j w + b^i D_i w \ .$$

Da aber w sein Minimum auf $U \times (t_0 - \varepsilon, t_0]$ annimmt, liefert das strikte Maximumprinzip für parabolische Differentialgleichungen (vergleiche [Lie96]) dass $w \equiv 0$ und damit den Widerspruch. $\square$

Bemerkung 2.18 Für $F_0(M^n) \subset B(x, R),\ x \in \mathbb{R}^{n+1}$, ergibt sich zusammen mit der maximalen Existenzzeit der Evolution von $\partial B(x, R)$ (Beispiel 2.13) eine weitere Schranke an die Maximale Existenz von $F_t(M^n)$.

In der nächsten Proposition soll dargelegt werden, unter welchen Bedingungen wir aus der Kurzzeitexistenz auf Langzeitexistenz schließen können.

Proposition 2.19 *Sei* $[0, T)$ *das maximale Existenzintervall des* H^k*-Flusses* M_t *und* $T < \infty$*, sowie* $H(\cdot, 0) \geqslant \delta_0 > 0$*. Dann gilt* $\limsup_{t \to T} \max_{M_t} |A|^2 = +\infty$.

Beweis: Wir wollen zeigen, dass unter der Annahme $max_{M_t}|A|^2 \leqslant C$ die Flächen M_t zu einer glatten Grenzfläche M_T konvergieren. Wegen der unteren Schranke an $H_{\min}(t)$, Lemma 2.14, ist $H_{\min}(T) > 0$ und die Kurzzeitexistenz, Prop. 2.11, liefert einen Widerspruch zur Maximalität von T.

Sei also

$$max_{M_t}|A| \leqslant C \quad \text{für } 0 \leqslant t < T.$$

Aus der Evolutionsgleichung und der oberen Schranke an $H \leqslant \sqrt{n}|A| \leqslant C$ erhalten wir durch Integration

$$|F(p, t_1) - F(p, t_2)| \leqslant C|t_1 - t_2|$$

und damit die Konvergenz von $F(\cdot, t)$ zu einer stetigen Grenzfläche $F(\cdot, T)$. Wegen der Schranke an $|A|$ ist die Konvergenz sogar in C^1.

Wie zum Beispiel zu Beginn des Beweises von Lemma 2.10 zu sehen ist, ist H^k für $k \leqslant 1$ konkav in h^i_j. Da die Schranke an $|A|$ lokale Gradientenschranken impliziert, ist die Evolutionsgleichung $(\star_{H^k})$ wegen Lemma 2.14 gleichmäßig parabolisch. Somit sind zusammen mit der angenommenen gleichmäßigen C^2-Schranke die Abschätzungen von Krylov [Kry78], Theorem 2, Kapitel 5.5 anwendbar und liefern gleichmäßige $C^{2,\alpha}$-Schranken.

Für $k > 1$ betrachten wir o.B.d.A. den Fluß lokal, gegeben durch den Graphen einer Funktion $u(x,t)$ über einem passenden affinen n-dimensionalen Unterraum. Die Höhenfunktion u erfüllt dann folgende parabolische Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \sqrt{1+|Du|^2}^{1-k}\left(\left(\delta^{ij} - \frac{D_iuD_ju}{1+|Du|^2}\right)D_{ij}u\right)^k \quad . \tag{1}$$

Dieser Operator ist nicht mehr konkav in den zweiten Ableitungen. Mit den a-priori Abschätzungen an $|A|$ lässt sich dennoch leicht zeigen, dass die Voraussetzungen für Theorem 2, Kapitel 5.3 in [Kry78] erfüllt sind, woraus sich gleichmäßige Hölder-Abschätzungen in Raum und Zeit an $\frac{\partial}{\partial t}u$ ergeben. Mit Hilfe von [Kry78] Theorem 4 in Kapitel 5.2 erhält man ebenfalls gleichmäßige Hölder-Abschätzungen in Raum und Zeit an Du. Wegen $H(\cdot,t) \geqslant \delta$ und Gleichung (1) erfüllen insbesondere

$$v := \sqrt{1+|Du|^2}^{1-k} \quad \text{und} \quad w := \left(\left(\delta^{ij} - \frac{D_iuD_ju}{1+|Du|^2}\right)D_{ij}u\right)^{k-1}$$

gleichmäßige C^β-Abschätzungen in Raum und Zeit, $\beta \leqslant \alpha$. Damit können wir (1) als strikt parabolische Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u - a^{ij}D_{ij}u = 0$$

auffassen mit Koeffizienten a^{ij} in C^β in Raum und Zeit. Die inneren Schauderabschätzungen im parabolischen Fall, vergleiche [Lie96], ergeben nun die gewünschten $C^{2,\beta}$-Abschätzungen.
In beiden Fällen, das heisst $k \leqslant 1$ und $k > 1$, folgen anhand der Schauderabschätzungen auch alle höheren C^l-Schranken. $\square$

Bemerkung 2.20 $C^{2,\alpha}$-Abschätzungen die nicht nur im Innern, sondern auch in einer Umgebung einer Anfangsfläche M_0 gelten, kann man anhand der Resultate von Krylov [Kry78] zeigen. Es lässt sich nachprüfen, dass diese nur von der Schranke an $|A|$ und der $C^{2,\alpha}$-Norm der Anfangsfläche abhängen.

Bemerkung 2.21 Für den Fall, dass man den H^k-Fluss nicht im euklidischen Raum, sondern auf einer Mannigfaltigkeit betrachtet, ist unter Voraussetzung von gleichmäßigen $|A|$-Schranken zu erwarten, dass die Flächen M_t für $t \to \infty$ zu einer Minimalfläche konvergieren. Dies wird Gegenstand eines zukünftigen Projekts sein.

An einigen weiteren Punkten wird es sich als sinnvoll erweisen, bei der Evolution von h^i_j und b^i_j auch die Evolution von $\lambda_{\max}$, $\kappa_{\max}$ zu studieren. Da aber $\lambda_{\max}$, $\kappa_{\max}$ nur lipschitz-stetig sind, ist es notwendig, glatte Approximationen zu betrachten.

Die Niveauflächen der Funktion $\max(x_1, x_2)$ auf $\mathbb{R}^2$ lassen sich durch Hyperbeln approximieren. Diese sind Niveauflächen der Funktion

$$\tilde{u}_2(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \delta^2}$$

für ein $\delta > 0$.
Rekursiv erhält man eine Approximation an $max(x_1, \ldots, x_n)$.

Definition 2.22 Für $\delta > 0$ setze

$$\tilde{u}_2(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \delta^2}$$

$$\tilde{u}_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{u}_2(x_i, \tilde{u}_n(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1})), \ n \geqslant 2 \ .$$

Lemma 2.23 *Für jedes $\delta > 0$ und $n \geqslant 2$ gilt:*

(i) $\tilde{u}_n(x_1, \ldots, x_n)$ *ist glatt, symmetrisch, monoton steigend und konvex .*

(ii) $\frac{\partial \tilde{u}_n(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \leqslant 1$

(iii) $\max(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \tilde{u}_n(x_1, \ldots, x_n) \leqslant max(x_1, \ldots, x_n) + (n-1)\delta$

(iv) *Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\tilde{u}_n(x_1, \ldots, x_n) - (n-1)\delta \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}_n(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \cdot x_i \leqslant \tilde{u}_n(x_1, \ldots, x_n)$$

(v) $\sum_i \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_i} = 1$.

Beweis: Die Aussagen folgen direkt und meist induktiv aus der Definition, vergleiche [Hei01].

Das nächste Lemma zeigt, dass gleichmäßige Schranken an die mittlere Krümmung auch auf einem kleinen Zeitintervall Schranken an $|A|$ implizieren.

Lemma 2.24 *Sei $F : M^n \times [0, \tau) \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein H^k-Fluss, $k \geqslant 1$, und $0 < H < C$ auf $M^n \times [0, \tau)$. Für $\lambda_{min}(t) := \min_{M_t, i} \lambda_i(p)$ gilt dann*

$$|\lambda_{min}(t)| \leqslant \left((\max\{-\lambda_{min}(0),\ 1\})^{-2} - C't\right)^{-\frac{1}{2}} ,$$

mit $C' = 2knC^{k-1}(C^2 + (n-1)^2)$.

Beweis: Für die Evolution von $\beta^i_j := -h^i_j$ erhalten wir aus Korollar 2.4:

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta^i_j \leqslant kH^{k-1}\Delta\beta^i_j + (k-1)H^k\beta^i_l\beta^l_j + kH^{k-1}|A|^2\beta^i_j \; .$$

Sei nun $u(\beta^i_j)$ eine glatte Approximation an $-\min(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ wie in Definition 2.22 für ein $\delta > 0$. Aus

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{\partial u}{\partial \beta^i_j}\left(\frac{\partial}{\partial t}\beta^i_j\right)$$

und

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^p_q \partial \beta^l_m}\nabla^v\beta^p_q\nabla_v\beta^l_m + \frac{\partial u}{\partial \beta^i_j}\Delta\beta^i_j \; ,$$

sowie der Monotonie von u folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u \leqslant kH^{k-1}\Delta u \,-\, kH^{k-1}&\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^p_q \partial \beta^l_m}\nabla^v\beta^p_q\nabla_v\beta^l_m \\ &+(k-1)H^k\frac{\partial u}{\partial \beta^i_j}\beta^i_l\beta^l_j + kH^{k-1}|A|^2\frac{\partial u}{\partial \beta^i_j}\beta^i_j \; ,\end{aligned}$$

wodurch sich mit Lemma 2.23

$$\frac{\partial}{\partial t}u \leqslant kH^{k-1}\Delta u + kH^k|A|^2 + kH^{k-1}|A|^2 u$$

ergibt. Wegen $H > 0$ ist auch $\lambda_{\max}(p) > 0$ und mit

$$\lambda_{\max}(p) \leqslant H - (n-1)\lambda_{\min}(p) \leqslant H + (n-1)u$$

ist

$$|A|^2 \leqslant 2n(H^2 + (n-1)^2u^2) \leqslant 2n(C^2 + (n-1)^2u^2). \tag{2}$$

Wir erhalten für o.B.d.A $u \geqslant 1$:

$$\frac{\partial}{\partial t}u \leqslant kH^{k-1}\Delta u + C'u^3 \; ,$$

mit $C' = 2knC^{k-1}(C^2 + (n-1)^2)$. Das Resultat ergibt sich nun aus dem Vergleich mit der GDGL und $\delta \to 0$. $\square$

Bemerkung 2.25 Da $C = C(H)$ im obigen Beweis ist, liefert (2) insbesondere auch eine Schranke an $|A|$.

Theorem 2.26 *Sei $F : M^n \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Familie von Einbettungen, die den H^k-Fluss löst, mit Anfangsfläche $M_0 := F(M^n, 0)$. Weiter sei $H(\cdot, 0) \geqslant \delta_0 > 0$, $k \geqslant 1$ und T die maximale Existenzzeit. Dann ist $T \geqslant \rho(M_0) > 0$, wobei ρ nur von der $C^{2,\alpha}$-Norm der Anfangsfläche und δ_0 abhängt.*

Beweis: Sei $d(\cdot, M_0)$ die mit Vorzeichen versehene Abstandsfunktion zu M_0. Dabei sei das Vorzeichen so gewählt, dass $V := \nabla d : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ auf M_0 mit dem Normalenvektorfeld übereinstimmt. Auf $\Omega_{\gamma_0} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | d(x, M_0) \leqslant \gamma_0\}$ ist V glatt, wobei $\gamma_0 > 0$ nur von der C^2-Norm der Anfangsfläche M_0 abhängt. Wir glätten V nun, dafür definieren wir $X := \rho_\xi * V$, wobei ρ_ξ der Standard-Glättungskern für ein $\xi > 0$ sei. Zu jedem $\delta > 0$ existiert ein $\xi = \xi(\delta, C^2(M_0))$, so dass

$$|X - V|(x) \leqslant \delta \quad \text{für alle } x \in \Omega_{\frac{\gamma_0}{2}}.$$

Insbesondere hängt damit die C^2-Norm von X auf $\Omega_{\frac{\gamma_0}{2}}$ nur von der C^2-Norm von M_0 und δ ab.

Für ein hinreichend kleines $\delta > 0$, zum Beispiel $\delta = \frac{1}{100}$, sei $w := \langle X(F(p,t)), \nu(p,t)\rangle$. Folglich ist $|w - 1|(p) \leqslant \delta$ für $p \in M_0$, $\ w \geqslant \frac{1}{2}$ auf $M^n \times [0, \varepsilon)$, $\ 0 < \varepsilon \leqslant T$, und für die Evolutionsgleichung erhält man in einem adaptierten n-Bein:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} w = kH^{k-1}\Delta w - kH^{k-1}\langle \Delta X, \nu\rangle - 2kH^{k-1}h^{ij}\langle \nabla_i X, e_j\rangle \\ + kH^{k-1}|A|^2\langle X, \nu\rangle - H^k\langle DX(\nu), \nu\rangle\ .\end{aligned}$$

Indem wir nun die Evolution von w mit der von H^k günstig kombinieren, können wir die schlechten Krümmungsterme kontrollieren. Es ergibt sich für $v := \frac{H^k}{w - 1/4}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} v &= kH^{k-1}\Delta v + \frac{2k}{H} v\langle \nabla w, \nabla v\rangle + \Big(\frac{k}{H}\langle \Delta X, \nu\rangle + \frac{2k}{H} h^{ij}\langle \nabla_i X, e_j\rangle \\ &\qquad + \langle DX(\nu), \nu\rangle - \frac{k}{4H}|A|^2\Big)v^2 \\ &\leqslant kH^{k-1}\Delta v + \frac{2k}{H} v\langle \nabla w, \nabla v\rangle + \Big(\frac{C}{H} + C\frac{|A|}{H} + C - \frac{k}{4H}|A|^2\Big)v^2 \\ &\leqslant kH^{k-1}\Delta v + \frac{2k}{H} v\langle \nabla w, \nabla v\rangle + \Big(C + \frac{C}{H} - \frac{k}{8n}H\Big)v^2\end{aligned}$$

wobei $C = C(C^2(M_0), k, n)$. Wegen $H^k \geqslant \frac{H^k}{4(w-1/4)} = \frac{1}{4}v$ erhalten wir einen Widerspruch falls v sein erstes Maximum größer $C(C^2(M_0), k)$ annimmt und so

$$H \leqslant C'(C^2(M_0), k, n) \ \text{ auf } [0, \varepsilon).$$

Sei $t_0 := \max\{t \in [0, T) | \min_{M_t}\langle X, \nu\rangle \geqslant \frac{1}{2}\}$. Nach der obigen Rechnung erhalten wir gleichmäßige Schranken an H auf dem Intervall $[0, t_0]$, die nur von den C^2-Schranken an M_0 abhängen. Für $\tau := \min\{t_0, \frac{1}{2}{C'}^{-1}(\max\{|\lambda_{\min}(0)|, 1\})^{-2}\}$ ergibt Lemma 2.24 gleichmäßige Schranken an $|A|$ auf dem Intervall $[0, \tau]$. Mit $C^{2,\alpha}$-Schranken an M_0 und Bemerkung 2.20 impliziert dies gleichmäßige $C^{2,\alpha}$-Abschätzungen auf $[0, \tau]$.

Um $\frac{\partial}{\partial t}\nu = kH^{k-1}\nabla H$ zu kontrollieren benötigen wir C^3-Abschätzungen. Indem wir den Fluß wieder lokal als die Evolution der Höhenfunktion u über einem passenden Tangentialraum auffassen, erhalten wir mit $v_k := \frac{\partial u}{\partial x_k}$, $k \in \{1,\ldots,n\}$ und den inneren Schauderabschätzungen im parabolischen Fall (vergleiche [Lie96], Theorem 4.9):

$$|v_k|^*_{2+\alpha} \leqslant C \; . \tag{3}$$

Für die parabolischen Höldernormen verwenden wir die Notation wie in [Lie96]. Die $C^{2,\alpha}$-Schranken an u und (3) lassen sich zusammenfassen als

$$|u|^{(-(2+\alpha))}_{2+\alpha}, \; |u|^{(-1)}_{3+\alpha} \leqslant C \; . \tag{4}$$

Im restlichen Beweis werden wir durch Interpolation zwischen diesen beiden Normen zeigen, dass $|\nabla H|$ gerade noch in der Zeit integrabel ist. Wir rechnen dazu in lokalen Koordinaten, das heisst wir betrachten wieder die Evolution der Höhenfunktion u auf $\Omega_\varepsilon := \Omega \times (0,\varepsilon)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet.

Mit $X = (x,t)$ sei ein Punkt im $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnet, $x \in \mathbb{R}^n$. Die Norm $|x|$ sei die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ und $|X| := \max\{|x|, |t|^{\frac{1}{2}}\}$ sei die parabolische Norm auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$. Für $X \in \Omega_\varepsilon$ bezeichne $d(X)$ den Abstand zum parabolischen Rand von Ω_ε und $d(X,Y) := \min d(X), d(Y)$. Wir wählen $X_1 \in \omega_\varepsilon$ mit o.B.d.A $d(X_1) \leqslant \frac{1}{2}$, es sei $\mu \in (0, \frac{1}{2}]$ eine noch zu bestimmende Konstante und

$$v := \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \qquad \text{für ein festes Tupel } i,j \in \{1,\ldots,n\}.$$

Wähle nun x_2, so dass $x_1 - x_2$ parallel zu $Dv(X_1)$ ist und $|x_1 - x_2| = \mu d(X_1)$. Damit ist $X_2 := (x_2, t_1) \in \Omega_\varepsilon$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein x_3 auf der Verbindungslinie zwischen x_1 und x_3, so dass für $X_3 := (x_3, t_1)$ gilt:

$$Dv(X_3) \cdot (x_1 - x_2) = v(X_1) - v(X_2) \; .$$

Nach unserer Wahl von X_2 erhalten wir

$$|Dv|(X_1) = Dv(X_1) \cdot \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|} \leqslant Dv(X_3) \cdot \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|} + |Dv(X_1) - Dv(X_3)|$$

und daraus

$$\begin{aligned} |Dv|(X_1) &\leqslant \frac{|v(X_1) - v(X_2)|}{|x_1 - x_2|} + |Dv(X_3) - Dv(X_1)| \\ &\leqslant |v|^{(-\alpha)}_\alpha \frac{|X_1 - X_2|^\alpha}{|x_1 - x_2|} + |v|^{(1)}_{1+\alpha} \frac{|X_1 - X_3|^\alpha}{d(X_1, X_3)^{2+\alpha}} \; . \end{aligned} \tag{5}$$

Wegen $d(X_1) \geqslant 2|x_1 - x_2| \geqslant 2|x_1 - x_3|$ ist $\frac{1}{2}d(X_1) \leqslant d(X_1, X_3) \leqslant d(X_1)$. Aus (5) ergibt sich:

$$|Dv|(X_1) \leqslant |v|^{(-\alpha)}_\alpha (\mu d(X_1))^{\alpha - 1} + 2^{2+\alpha} |v|^{(1)}_{1+\alpha} d(X_1)^{-2} \mu^\alpha \; .$$

Multiplikation mit $d(X_1)^{(2+\alpha)(1-\alpha)}$ und die Wahl $\mu := d(X_1)^{1+\alpha}$ liefert

$$d(X_1)^{(2+\alpha)(1-\alpha)}|Dv|(X_1) \leqslant |v|_{\alpha}^{(-\alpha)} + 2^{2+\alpha}|v|_{1+\alpha}^{(1)} ,$$

was sich in Termen von u als

$$|u|_3^{((2+\alpha)(1-\alpha)-3)} \leqslant |u|_{2+\alpha}^{(-(2+\alpha))} + 2^{2+\alpha}|u|_{3+\alpha}^{(-1)}$$

ausdrücken lässt.

Da aber für $F : M^n \times [0, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ der parabolische Rand nur aus M_0 besteht und in die parabolische Norm die Zeit t nur mit der halben Potenz eingeht, folgt daraus

$$|\nabla H|(p,t) \leqslant \frac{C}{t^{\eta}} \qquad \text{mit } \eta := \frac{(2+\alpha)(1-\alpha)}{2} < 1 \ .$$

Zusammen mit $|DX(\nu)|(p,t) \leqslant C(M_0)$ auf $M^n \times (0,\tau)$ sieht man für $p \in M^n$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \leqslant & |\langle X,\nu\rangle(p,0) - \langle X,\nu\rangle(p,\tau)| \\ \leqslant & \Big| \int_0^{\tau} -H^k \langle DX(\nu),\nu\rangle + \langle X, kH^{k-1}\nabla H\rangle \, dt \Big| \leqslant C(\tau + \tau^{1-\eta}) \ ,\end{aligned}$$

was die gewünschte untere Schranke an τ liefert. □

2.4 Der Fluss konvexer Flächen

In diesem Abschnitt wollen wir die Evolution konvexer Flächen unter dem H^k-Fluss studieren. Um für beliebiges $k > 0$ Kurzzeitexistenz und strikte Parabolizität garantieren zu können sei als Grundvoraussetzung immer gefordert, dass

$$H(p,0) \geqslant \delta > 0 \quad \text{für alle } p \in M^n \ .$$

Wie auch beim mittleren Krümmungsfluss ist die Konvexität für beliebiges $k > 0$ unter dem Fluss erhalten. Darüber hinaus werden wir im Hauptresultat dieses Abschnitts zeigen können, dass für alle $k > 0$ die Flächen M_t im Limes $t \to T$ zu einem Punkt schrumpfen.

Lemma 2.27 *Sei $F_0(M^n)$ schwach konvex und $F : M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ der zugehörige H^k-Fluss, $k \geqslant 1$. Dann ist $F(M^n,t)$ schwach konvex für alle $t \in [0,T)$.*

Beweis: Aus der Evolutionsgleichung von h^i_j, (Korollar 2.4), erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t} h^i_j \geqslant kH^{k-1}\Delta h^i_j - (k-1)H^k h^i_l h^l_j + kH^{k-1}|A|^2 h^i_j \ .$$

Sei nun $\xi(p) \in T_pM^n$ ein Nulleigenvektor von $W(p,t)$, das heisst $h^i_j\xi^j = 0$, $i = 1,\dots,n$ und damit auch

$$\big(-(k-1)H^k h^i_l h^l_j + kH^{k-1}|A|^2 h^i_j\big)\ \xi^j(p,t) = 0\ .$$

Nach dem schwachen Maximumprinzip für 2-Tensoren von R. Hamilton, [Ham82], Theorem 9.1, ist damit $h^i_j \geqslant 0$ erhalten. □

Stärker noch ist für strikt konvexe Flächen der minimale Eigenwert $\lambda_{\min}(t) := \min_{M_t,i}\lambda_i$ monoton wachsend. Insbesondere gilt dies auch für $0 < k \leqslant 1$.

Lemma 2.28 *Sei $F_0(M^n)$ strikt konvex und $F : M^n \times [0,\tau) \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein H^k-Fluss, $k > 0$. Dann sind alle M_t, $t \in [0,\tau)$ strikt konvex und $\lambda_{min}(t)$ monoton wachsend.*

Beweis: Mit Lemma 2.10 folgt für die Evolution der inversen Weingartenabbildung $W^{-1} = \{b^i_j\}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}b^i_j \leqslant kH^{k-1}\Delta b^i_j + (k-1)H^k\delta^i_j - kH^{k-1}|A|^2 b^i_j\ .$$

Zu einem $\delta > 0$ wählen wir eine glatte Approximation $u(b^i_j)$ an $\max(\kappa_1,\dots,\kappa_n)$ wie in Definition 2.22. Aus

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{\partial u}{\partial b^i_j}\Big(\frac{\partial}{\partial t}b^i_j\Big) \quad \text{und} \quad \Delta u = \frac{\partial u}{\partial b^i_j}\Delta b^i_j + \frac{\partial^2 u}{\partial b^p_q\,\partial b^l_m}\nabla^v b^p_q \nabla_v b^l_m$$

sowie der Monotonie von u ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t}u \leqslant kH^{k-1}\Delta u - kH^{k-1}\frac{\partial^2 u}{\partial b^p_q\,\partial b^l_m}\nabla^v b^p_q\nabla_v b^l_m + (k-1)H^k \mathrm{tr}(\frac{\partial u}{\partial b^i_j}) - kH^{k-1}|A|^2\frac{\partial u}{\partial b^i_j}b^i_j\ .$$

Die Identitäten und Abschätzungen aus Lemma 2.23 liefern zusammen mit der Konvexität von u, dass

$$\frac{\partial}{\partial t}u \leqslant kH^{k-1}\Delta u + (k-1)H^k - kH^{k-1}|A|^2(u-(n-1)\delta)\ .$$

An Punkten (p,t) mit $u > (n-1)\,k\,\delta$ sieht man, dass

$$\frac{\partial}{\partial t}u(p,t) < kH^{k-1}\Delta u(p,t) + (k-1)H^{k-1}\big(\frac{H}{u} - |A|^2\big)u(p,t) \leqslant kH^{k-1}\Delta u$$

wegen

$$\frac{H}{u}(p) \leqslant \frac{H(p)}{\kappa_{\max}(p)} = H(p)\lambda_{\min}(p) \leqslant |A|^2(p)\ .$$

Wir erhalten so einen Widerspruch falls u zum ersten Mal ein neues Maximum größer $(n-1)\,k\,\delta$ annimmt. Der Limes $\delta \to 0$ ergibt die Behauptung, da $u(p,0) > 0$. □

Bemerkung 2.29 Um auch für $0 < k < 1$ zu zeigen, dass schwache Konvexität erhalten ist, approximieren wir zuerst eine schwach konvexe Anfangsfläche M_0 mit $H(M_0) > \delta > 0$ durch strikt konvexe Flächen M_0^i (zum Beispiel mit Hilfe des mittleren Krümmungsflusses). Von diesen Flächen starten wir jeweils den H^k-Fluss, mit Lemma 2.30 sehen wir, dass eine gleichmäßige untere Schranke an T_i existiert. Mit Proposition 2.19 erhalten wir gleichmäßige $C^{2,\alpha}$-Schranken an die Flüsse M_t^i, die aber nach Lemma 2.28 konvex sind. Durch Auswahl einer konvergenten Teilfolge ergibt sich, dass auch der Fluss M_t konvex ist.

Im konvexen Fall liefert die Evolutionsgleichung für H schon eine obere Schranke an $|A|$ für kleine Zeiten.

Lemma 2.30 *Sei $F_0(M^n)$ konvex und $F(\cdot,t)$ ein H^k-Fluss. Dann ist*

$$|A|(p,t) \leqslant H(p,t) \leqslant \left(H_{max}(0)^{-(k+1)} - (k+1)t\right)^{-\frac{1}{k+1}} ,$$

und somit insbesondere $T \geqslant \frac{1}{k+1} H_{max}(0)^{-(k+1)}$.

Beweis: Wegen Lemma 2.27 und Bemerkung 2.29 sind die Flächen M_t konvex und damit $|A| \leqslant H$. Die Evolutionsgleichung für H zeigt, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} H \leqslant k H^{k-1} \Delta H + k(k-1) H^{k-2} |\nabla H|^2 + H^{k+2} .$$

Der Vergleich mit der GDGL ergibt die Schranke an H und Proposition 2.19 die untere Schranke an T. □

Um zeigen zu können, dass für $k \geqslant 1$ schwach konvexe Flächen sofort strikt konvex werden, untersuchen wir die Evolution der Quotienten Q_l der elementarsymmetrischen Polynome in den Hauptkrümmungen.

Lemma 2.31 *Sei $k \geqslant 1$ und $F : M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein H^k-Fluss konvexer Flächen mit*

$$S_{l-1}(p,t) > 0 \quad \text{für alle } (p,t) \in M^n \times [0,T) ,$$

so dass Q_l wohldefiniert ist. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_l \geqslant k H^{k-1} \Delta Q_l + H^{k-1} (k|A|^2 - l(k-1) H Q_l) Q_l . \tag{6}$$

Beweis: Aus

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_l = \frac{\partial Q_l}{\partial h_j^i} \Big(\frac{\partial}{\partial t} h_j^i \Big) \quad \text{und} \quad \Delta Q_l = \frac{\partial Q_l}{\partial b_j^i} \Delta h_j^i + \frac{\partial^2 Q_l}{\partial h_q^p \, \partial h_m^l} \nabla^v h_q^p \nabla_v h_m^l$$

sowie der Evolutionsgleichung für h^i_j bekommen wir

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_l = kH^{k-1}\Delta Q_l - kH^{k-1}\frac{\partial^2 Q_l}{\partial h^p_q\,\partial h^l_m}\nabla^v h^p_q \nabla_v h^l_m + k(k-1)H^{k-2}\frac{\partial Q_l}{\partial h^i_j}\nabla^i H \nabla_j H$$
$$- (k-1)H^k\frac{\partial Q_l}{\partial h^i_j}h^i_l h^l_j + kH^{k-1}|A|^2\frac{\partial Q_l}{\partial h^i_j}h^i_j \ .$$

Mit Hilfe von Lemma 2.7 können wir die beiden letzten Terme vereinfachen.

$$\frac{\partial Q_l}{\partial h^i_j}h^i_j = \sum_m \frac{\partial Q_l}{\partial \lambda_m}\lambda_m = \frac{1}{S^2_{l-1}}\big(S_{l-1}\sum_i S_{l-1,i}\,\lambda_i - S_l\sum_i S_{l-2,i}\,\lambda_i\big)$$
$$= \frac{1}{S^2_{l-1}}\big(lS_{l-1}S_l - (l-1)S_{l-1}S_l\big) = Q_l$$

$$\frac{\partial Q_l}{\partial h^i_j}h^i_l h^l_j = \sum_m \frac{\partial Q_l}{\partial \lambda_m}\lambda^2_m = \frac{1}{S^2_{l-1}}\big(S_{l-1}\sum_i S_{l-1,i}\,\lambda^2_i - S_l\sum_i S_{l-2,i}\,\lambda^2_i\big)$$
$$= \frac{1}{S^2_{l-1}}\big(S_{l-1}(S_1S_l - (l+1)S_{l+1}) - S_l(S_1S_{l-1} - lS_l)\big)$$
$$= -(l+1)\frac{S_{l+1}}{S_{l-1}} + lQ^2_l \ .$$

Mit der Monotonie und der Konkavität der Q_l folgt daraus die Ungleichung. □

Es ergibt sich direkt:

Proposition 2.32 *Sei $F_0 : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine schwach konvexe Hyperfläche mit $H(F_0) \geqslant \delta > 0$ und $F : M^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ der zugehörige H^k-Fluss mit $k \geqslant 1$. Dann ist M_t strikt konvex für alle $t \in (0,T)$.*

Beweis: Wegen $H(p,0) > 0$ ist $H(p,t) > 0$ für alle $t \in (0,T)$. Somit ist Q_2 wohldefiniert und nichtnegativ. Wegen der Schranken an $|A|^2$ für $t \in [0,\varepsilon]$ ist

$$|H^k(k|A|^2 - 2(k-1)HQ_2)| \leqslant C$$

auf diesem Intervall. Damit ergibt sich aus (6):

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_2 \geqslant kH^{k-1}\Delta Q_2 - CQ_2$$

für $t \in [0,\varepsilon)$. Für $v := e^{Ct}Q_2$ erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial t}v \geqslant kH^{k-1}\Delta v \ . \tag{7}$$

Angenommen es existiere $(p_0,t_0) \in M^n \times (0,\varepsilon)$ mit $Q_2(p_0,t_0) = 0$, dann ist auch $v(p_0,t_0) = 0$. Die Harnackungleichung im parabolischen Fall (vergleiche [Lie96]) und Gleichung (7) liefert, dass $v \equiv 0$ für alle $t \in (0, t_0)$ und somit $Q_2 \equiv 0$ für alle $t \in (0, t_0)$. Dies steht im Widerspruch zur Existenz von strikt konvexen Punkten auf M_t, und damit ist $Q_2 > 0$ auf $M^n \times (0, T)$. Dieses Argument kann iterativ fortgesetzt werden bis zu $Q_n > 0$ auf $M^n \times (0, T)$. □

Das nächste Lemma zeigt, dass die mittlere Krümmung und somit auch $|A|$ beschränkt bleiben, solange M_t ein nicht verschwindendes Volumen berandet.

Lemma 2.33 *Sei $F : M^n \times [0, \tau)$ ein H^k-Fluss konvexer Flächen und für $\delta > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, sei $B_\delta(x_0) \subset V_t$ für alle $t \in [0, \tau)$, wobei V_t das von M_t berandete Volumen bezeichne. Dann ist*

$$H(p, t) \leqslant C(\delta, k, n) \quad \textit{für alle } (p, t) \in M^n \times [0, \tau) \ .$$

Beweis: Sei $X := x - x_0$ das Ortsvektorfeld mit Ursprung in x_0. Aufgrund der Konvexität der Flächen M_t existiert $\alpha > 0$, $\alpha = \alpha(\delta)$, sodass

$$\langle X, \nu \rangle - \alpha \geqslant \frac{\alpha}{2} > 0 \qquad \text{für alle } (p, t) \in M^n \times [0, \tau) \ .$$

Insbesondere ist

$$v := \frac{H^k}{\langle X, \nu \rangle - \alpha}$$

wohldefiniert. Mit Korollar 2.4 erhalten wir für die Evolutionsgleichung von v:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v &= k H^{k-1} \Delta v + \frac{2k}{H} v \nabla^i \langle X, \nu \rangle \nabla_i v + (k+1) v^2 - \alpha k \frac{|A|^2}{H} v^2 \\ &\leqslant k H^{k-1} \Delta v + \frac{2k}{H} v \nabla^i \langle X, \nu \rangle \nabla_i v + \big((k+1) - \frac{\alpha k}{n} H \big) v^2 \ . \end{aligned}$$

Angenommen in (p_0, t_0) nehme v zum ersten Mal ein Maximum $C \gg 0$ an. Dann ist

$$H^k(p_0, t_0) \geqslant C(\langle X, \nu \rangle - \alpha)(p_0, t_0) \geqslant \frac{\alpha C}{2} \ ,$$

woraus der Widerspruch folgt, falls

$$C \geqslant \frac{2}{\alpha} \Big(\frac{n(k+1)}{\alpha k} \Big)^k \ .$$

□

Nun sind alle Vorbereitungen für das abschließende Resultat getroffen.

Theorem 2.34 *Sei $F : M^n \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein H^k-Fluss, wobei*

i) $F_0(M^n)$ strikt konvex sei für $0 < k < 1$, *ii)* $F_0(M^n)$ *schwach konvex sei für* $k \geqslant 1$ *,*

und $H(F_0(M^n)) > 0$. *Dann existiert der Fluss bis zu einem maximalen Zeitpunkt* T *an dem die Flächen* M_t *zu einem Punkt im* $\mathbb{R}^{n+1}$ *kontrahieren.*

Beweis: Wegen Lemma 2.33 und Proposition 2.19 kann der Fluss so lange fortgesetzt werden wie eine kleine Kugel in seinem Inneren existiert. Aufgrund von Proposition 2.32 werden die Flächen M_t für $k \geqslant 1$ sofort strikt konvex. Für $0 < k < 1$ folgt dies aus den Voraussetzungen und Lemma 2.28. Insbesondere ist in beiden Fällen wegen Lemma 2.28 $\lambda_{\min}(t)$ monoton wachsend und $\lim_{t \to T} \lambda_{\min}(t) \geqslant \delta > 0$.

Sei nun angenommen, dass zwei verschiedene Punkte $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ existieren mit $x, y \in V_t$ für alle $t \in [0, T)$, V_t das von M_t berandete Volumen. Dann schneidet jede 2-dimensionale Ebene Z durch x und y die Flächen M_t transvers in regulären Kurven c_t^Z. Wegen $\lambda_{\min}(t) > \frac{\delta}{2}$ ist auch die Krümmung der Kurven C_t^Z größer $\varepsilon_0 > 0$.

Sei $I_t := Z \cap V_t$. Da $\mathcal{H}^n(V_t) \to 0$, muss ein Z existieren mit $\mathcal{H}^2(I_t) \to 0$. Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass $x, y \in I_t$ und die Krümmung der Kurven c_t^Z gleichmäßig von Null weg beschränkt ist. $\square$

3 Der schwache Fluss

Für eine beliebige n-dimensionale, eingebettete Hyperfläche $N_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $H(N_0) > \delta_0 > 0$ ist wie beim mittleren Krümmungsfluss auch beim H^k-Fluss zu erwarten, dass sich bei der Evolution der Flächen M_t Singularitäten entwickeln, noch bevor die Flächen M_t zu einem Punkt oder Ähnlichem kontrahieren können.

Um nun auch eine Evolution über Singularitäten hinweg definieren zu können, machen wir wie in der Einleitung beschrieben den folgenden Ansatz. Sei im Folgenden $N_0 = \partial\Omega,\ ,\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und beschränkt. Ferner sei N_0 glatt und

$$H(N_0) \geqslant \delta_0 > 0\ .$$

Wir wollen die Evolution von N_0 als Niveaumengen einer Funktion $u : \Omega \to [0, \infty)$ anhand von

$$E_t := \{x \in \Omega | u(x) > t\}, \quad N_t := \partial E_t$$

darstellen. An einem Punkt, an dem u glatt mit $Du \neq 0$ ist, ist $(\star_{H^k})$, siehe S. 12, äquivalent zu

$$(\star) \qquad \operatorname{div}\left(\frac{Du}{|Du|}\right) = -\frac{1}{|Du|^{\frac{1}{k}}}\ .$$

Dabei ist die linke Seite die mittlere Krümmung der Niveaumenge $\{u = t\}$ und die rechte Seite die entsprechende Potenz der Geschwindigkeit.

3.1 Schwache Lösungen

Wir wollen nun einen schwachen Lösungsbegriff für $(\star)$ einführen. Wie es sich herausstellt ist $(\star)_{H^k}$ für beliebiges $k > 0$ weder der Gradientenfluss einer Energie, noch ist $(\star)$ eine Euler-Lagrange-Gleichung. Indem wir jedoch die rechte Seite von $(\star)$ fixieren, können wir die Gleichung als Euler-Lagrange-Gleichung des Funktionals

$$J_u(v) = J_u^K(v) := \int\limits_K |Dv| - \frac{v}{|Du|^{\frac{1}{k}}}\, dx \tag{8}$$

auffassen. Dabei haben wir uns von [HI98] inspirieren lassen. Huisken und Ilmanen verwenden in dieser Arbeit einen entsprechenden Ansatz um schwache Lösungen des inversen mittleren Krümmungsflusses zu definieren.

Definition 3.1 Sei $u \in C^{0,1}_{\text{loc}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ und $|Du|^{-\frac{1}{k}} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Dann ist u eine schwache (Sub- bzw. Super-) Lösung von $(\star)$ auf Ω, falls

$$J_u^K(u) \leqslant J_u^K(v) \tag{9}$$

für jede lokal lipschitzstetige Funktion v ($v \leqslant u$ bzw. $v \geqslant u$) mit $\{v \neq u\} \subset K \subset \Omega$, K kompakt. Da die Definition nicht von der speziellen Wahl von K abhängt, werden wir den Index K im Weiteren unterdrücken.

Aufgrund der Identität

$$J_u(\min(v,w)) + J_u(\max(v,w)) = J_u(v) + J_u(w)$$

für $\{v \neq w\} \Subset \Omega$ sieht man für $v = w$, dass u genau dann eine schwache Lösung ist, falls u gleichzeitig eine schwache Sub- und Superlösung ist.

Äquivalente Formulierung: Sei $F \subset \Omega \times \mathbb{R}$ eine messbare Teilmenge und $\partial^* F$ der reduzierte Rand von F. Wir bezeichnen mit $|\partial^* F \cap K|$ das $(n+1)$-dimensionale Hausdorffmaß $\mathcal{H}^{n+1}$ von $\partial^* F \cap K$, wobei wir $|\partial^* F \cap K| := +\infty$ setzen, falls F in keiner Umgebung von K eine Caccioppoli-Menge ist. $E \triangle F := (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$ bezeichne die symmetrische Differenz zweier Mengen E und F.
Damit können wir für eine Lipschitzfunktion u auf $\Omega \times \mathbb{R}$ mit $|Du|^{-\frac{1}{k}} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R})$ das Funktional

$$J_u^K(F) := |\partial^* F \cap K| - \int\limits_{F \cap K} |Du|^{-\frac{1}{k}}\, dx \tag{10}$$

für $F \subset \Omega \times \mathbb{R}$ definieren. Dabei sagen wir, dass E das Funktional J_u in einer Menge A (von außen bzw. von innen) minimiert, falls

$$J_u^K(E) \leqslant J_u^K(F) \tag{11}$$

für alle F mit $F \triangle E \Subset A$ (bzw. zusätzlich $F \supset E,\ F \subset E$), mit einer kompakten Menge K mit $F \triangle E \subset K \subset A$. Wiederum hängt diese Definition nicht von der speziellen Wahl von K ab. Mit Hilfe der allgemeinen Ungleichung, siehe Lemma 3.15,

$$J_u(E \cup F) + J_u(E \cap F) \leqslant J_u(E) + J_u(F) \tag{12}$$

für $E \triangle F \Subset A$, sieht man, dass E das Funktional J_u in A genau dann minimiert, wenn E es gleichzeitig von außen und von innen minimiert.

Lemma 3.2 *Sei $u \in C^{0,1}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ und $|Du|^{-\frac{1}{k}} \in L^1_{loc}(\Omega)$. u ist genau dann eine (Sub- bzw. Super-) Lösung von $(\star)$ auf Ω, falls für jedes t die Menge $E_t := \{u > t\}$ das Funktional J_u in Ω (von innen bzw. von außen) minimiert.*

Beweis: 1) Sei v lokal lipschitzstetig mit $\{v \neq u\} \subset K \subset \Omega$. Für $F_t := \{v > t\}$ ist dann $F_t \triangle E_t \subset K$ für alle t. Man wähle $a < b$ mit $a < u, v < b$ auf K. Mit der

Koflächenformel sieht man, dass

$$
\begin{aligned}
J_u^K(v) &= \int\limits_K |Dv| - \frac{v}{|Du|^{\frac{1}{k}}}\,dx \\
&= \int_a^b |\partial^* F_t \cap K|\,dt - \int\limits_K \int_a^b \chi_{F_t} \frac{1}{|Du|^{\frac{1}{k}}}\,dt\,dx - a \int\limits_K \frac{1}{|Du|^{\frac{1}{k}}}\,dx \qquad (13)\\
&= \int_a^b J_u^K(F_t)\,dt - a \int\limits_K \frac{1}{|Du|^{\frac{1}{k}}}\,dx\ .
\end{aligned}
$$

Falls nun jedes E_t das Funktional J_u in Ω minimiert, zeigt diese Gleichung, dass u auch (8) minimiert. Das gleiche Argument ist auch für schwache Sub- und Superlösungen anwendbar.

2) Sei nun u eine Sublösung von (8). Man wähle t_0 und F, so dass

$$F \subset E_{t_0}, \quad E_{t_0} \setminus F \Subset \Omega\ .$$

Wir wollen zeigen, dass $J_u(E_{t_0}) \leqslant J_u(F)$. Da J_u unterhalbstetig unter L^1_{loc}-Konvergenz ist, können wir annehmen, dass

$$J_u(F) \leqslant J_u(G) \tag{14}$$

für alle G mit $G \bigtriangleup E_{t_0} \subset E_{t_0} \setminus F$. Indem man

$$F_t := \begin{cases} F \cap E_t & t \geqslant t_0 \\ E_t & 0 \leqslant t < t_0 \end{cases}$$

definiert, erhält man aus (14) $J_u(F) \leqslant J_u(E_t \cup F)$ für alle $t \geqslant t_0$, und daraus mit (12)

$$J_u(E_t \cap F) \leqslant J_u(E_t)$$

für $t \geqslant t_0$. Insgesamt ist also

$$J_u(F_t) \leqslant J_u(E_t) \ \text{ für alle } t\ .$$

Wir definieren nun v durch $v > t$ auf F_t, womit $v \leqslant u$ und $\{v \neq u\} \Subset \Omega$. Folglich ist $v \in BV_{\text{loc}} \cap L^\infty_{\text{loc}}$, insbesondere ist dann $J_u(v)$ wohldefiniert . Indem wir v durch glatte Funktionen $v_i \to v$ mit $|Dv_i| \to |Dv|$ approximieren, erhalten wir aus den Voraussetzungen, dass $J_u(u) \leqslant J_u(v)$. Da damit (13) auch für v zutreffend ist, gilt

$$\int_a^b J_u(E_t)\,dt \leqslant \int_a^b J_u(F_t)\,dt\ ,$$

wodurch wir $J_u(F_t) = J_u(E_t)$ für fast alle t erhalten. Mit (14) folgt daraus

$$J_u(E_t \cup F) \leqslant J_u(F)$$

für fast alle $t \geqslant t_0$. Im Limes $t \searrow t_0$ ergibt sich aus der Unterhalbstetigkeit

$$J_u(E_{t_0}) \leqslant J_u(F) \ .$$

3) Für den Fall, dass u eine Superlösung ist, wählen wir wie in 2) t_0 und F mit

$$E_{t_0} \subset F, \quad F \setminus E_{t_0} \Subset \Omega \ .$$

Wie zuvor können wir annehmen, dass

$$J_u(F) \leqslant J_u(G)$$

für alle G mit $G \triangle E_{t_0} \subset F \setminus E_{t_0}$. Man definiert wieder

$$F_t := \begin{cases} F \cup E_t & 0 \leqslant t \leqslant t_0 \\ E_t & t > t_0 \end{cases} ,$$

woraus völlig analog zu 2) folgt, dass

$$J_u(E_t \cap F) \leqslant J_u(F)$$

für fast alle $t \leqslant t_0$. Da aber nach Voraussetzung $|Du|^{-\frac{1}{k}} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, ist $\mathcal{H}^{n+1}(\{u = t_0\}) = 0$, und somit konvergiert $E_t \to E_{t_0}$ für $t \nearrow t_0$, insbesondere $E_t \cap F \to E_{t_0}$, woraus wieder anhand der Unterhalbstetigkeit folgt, dass

$$J_u(E_{t_0}) \leqslant J_u(F) \ .$$

□

Damit die Definition 3.1 sinnvoll ist, muss natürlich gewährleistet sein, dass im Falle eines glatten Flusses diese Bedingungen erfüllt sind.

Lemma 3.3 *Sei $(N_t)_{c \leqslant t \leqslant d}$ eine glatte Familie von Hyperflächen enthalten in $\Omega \times \mathbb{R}$ mit strikt positiver, gleichmäßig beschränkter mittlerer Krümmung, die den H^k-Fluss im klassischen Sinne löst. Es sei W die vom Fluss $(N_t)_{c \leqslant t \leqslant d}$ überstrichene Menge, und sei auf W die Funktion u durch $u = t$ auf N_t mit $E_t := \{u > t\}$ definiert. Dann minimieren die E_t das Funktional J_u in W für alle $t \in [c, d]$.*

Beweis: Die äußere Normale, definiert durch $\nu_u := -\frac{Du}{|Du|}$, ist ein glattes Vektorfeld auf W mit $\mathrm{div}(\nu_u) = H_{N_t} = |Du|^{-\frac{1}{k}} > 0$. Für eine Menge F mit $F \triangle E_t \subset K \Subset W$

erhalten wir mit dem Divergenzsatz und indem wir ν_u als Kalibrierung benutzen:

$$
\begin{aligned}
|\partial^* E_t \cap K| - \int\limits_{E_t \cap K} |Du|^{-\frac{1}{k}}\,dx &= \int\limits_{\partial^* E_t \cap K} \nu_{\partial E_t} \cdot \nu_u \, d\mathcal{H}^{n+1} - \int\limits_{E_t \cap K} |Du|^{-\frac{1}{k}}\,dx \\
&= \int\limits_{\partial^* E_t \cap \overline{F}} \nu_{\partial E_t} \cdot \nu_u \, d\mathcal{H}^{n+1} + \int\limits_{\partial^* E_t \setminus F} \nu_{\partial E_t} \cdot \nu_u \, d\mathcal{H}^{n+1} - \int\limits_{E_t \cap K} |Du|^{-\frac{1}{k}}\,dx \\
&= \int\limits_{\partial^* F_t \setminus E_t} \nu_{\partial^* F} \cdot \nu_u \, d\mathcal{H}^{n+1} - \int\limits_{F \setminus E_t} |Du|^{-\frac{1}{k}}\,dx + \int\limits_{\partial^* F \cap \overline{E_t}} \nu_{\partial^* F} \cdot \nu_u \, d\mathcal{H}^{n+1} \\
&\quad + \int\limits_{E_t \setminus F} |Du|^{-\frac{1}{k}}\,dx - \int\limits_{E_t \cap K} |Du|^{-\frac{1}{k}}\,dx \\
&= \int\limits_{\partial^* F \cap K} \nu_{\partial^* F} \cdot \nu_u \, d\mathcal{H}^{n+1} - \int\limits_{F \cap K} |Du|^{-\frac{1}{k}}\,dx \leqslant |\partial^* F \cap K| - \int\limits_{F \cap K} |Du|^{-\frac{1}{k}}\,dx \; .
\end{aligned}
$$

$\square$

3.2 Elliptische Regularisierung

In diesem Abschnitt beweisen wir mit Hilfe elliptischer Regularisierung die Existenz approximativer Lösungen zu ($\star$). In Abschnitt 3.3 werden wir dann zeigen können, dass wir im Limes $\varepsilon \to 0$ eine schwache Superlösung im Sinne von Definition 3.1 erhalten. Wie in [ES91] und [HI98] ist die Approximation von ($\star$) durch die quasilineare elliptische partielle Differentialgleichung

$$
(\star)_\varepsilon \begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{Du^\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + |Du^\varepsilon|^2}}\right) = -\left(\varepsilon^2 + |Du^\varepsilon|^2\right)^{-\frac{1}{2k}} & \text{auf } \Omega \\ u^\varepsilon = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}
$$

der Schlüssel zur Existenz einer schwachen Lösung. Dieser Differentialgleichung können wir eine geometrische Interpretation geben. Indem wir $w^\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon} u^\varepsilon$ definieren, erfüllt w^ε:

$$
(\star\star)_\varepsilon \begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{Dw^\varepsilon}{\sqrt{1 + |Dw^\varepsilon|^2}}\right) = -\varepsilon^{-\frac{1}{k}}\left(1 + |Dw^\varepsilon|^2\right)^{-\frac{1}{2k}} & \text{auf } \Omega \\ w^\varepsilon = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}
$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die translatierenden Graphen

$$
N_t^\varepsilon := \operatorname{graph}\Big(w^\varepsilon - \frac{t}{\varepsilon}\Big), \quad -\infty < t < \infty
$$

den H^k-Fluss auf $\Omega \times \mathbb{R}$ lösen. Dies sieht man leicht, indem man

$$U^\varepsilon(x', t) := u^\varepsilon(x) - \varepsilon z, \qquad x' := (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R} \tag{15}$$

definiert, so dass $N_t^\varepsilon = \{U^\varepsilon = t\}$. Unter der Annahme, dass u^ε glatt ist, erfüllt U^ε die Gleichung $(\star)$.

Sei angenommen, die approximativen Lösungen u^ε konvergieren in einem passenden Sinne im Limes $\varepsilon \to 0$ zu einer schwachen Lösung u mit den Niveaumengen

$$\Gamma_t := \{u = t\} \ .$$

Die grundsätzliche Idee ist, dass die möglicherweise singuläre Evolution $\{\Gamma_t\}_{0 \leqslant t \leqslant T}$ im $\mathbb{R}^n$ approximiert wird durch die glatte Evolution $\{N_t^\varepsilon\}_{t \in \mathbb{R}}$ im $\mathbb{R}^{n+1}$, und zwar in dem Sinne, dass für ein $0 < t < T$, $N_t^\varepsilon \approx N_t := \Gamma_t \times \mathbb{R}$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$.

Um die Existenz einer Lösung zu $(\star)_\varepsilon$ zu zeigen, benötigen wir a-priori Abschätzungen.

Lemma 3.4 *Sei u^ε eine C^2-Lösung zu $(\star)_\varepsilon$ und diam$(\Omega) = R$. Dann ist*

$$\sup_\Omega |u^\varepsilon| \leqslant C(R, k) \ .$$

Beweis: Wir zeigen, dass

$$\gamma(r) := \frac{\sigma}{\varepsilon}(R_0^{k+1} - r^{k+1})$$

für hinreichend großes $\sigma > 0$ eine Superlösung zu $(\star\star)_\varepsilon$ ist. Dabei sei $\Omega \subset B(x_0, R_0)$, $x_0 \notin \Omega$, $d(x_0, \Omega) \geqslant 1$, $r := |x - x_0|$. Es wäre also zu zeigen, dass

$$\Big(\delta_{ij} - \frac{D_i\gamma D_j\gamma}{1 + |D\gamma|^2}\Big) D_i D_j \gamma \leqslant -\varepsilon^{-\frac{1}{k}} \big(1 + |D\gamma|^2\big)^{\frac{k-1}{2k}} \tag{16}$$

auf Ω. Sei o.B.d.A $x_0 = 0$. Aus

$$\begin{aligned} D_i\gamma &= -\frac{\sigma}{\varepsilon}(k+1) r^{k-1} x_i \\ |D\gamma|^2 &= \big(\frac{\sigma}{\varepsilon}(k+1)\big)^2 r^{2k} \\ D_i D_j \gamma &= -\big(\frac{\sigma}{\varepsilon}(k+1) r^{k+1}\big)\delta_{ij} - \frac{\sigma}{\varepsilon}(k+1)(k-1) r^{k-3} x_i x_j \end{aligned}$$

erhalten wir äquivalent zu (16):

$$\frac{1}{1 + |D\gamma|^2}\Big(\frac{\sigma}{\varepsilon}\, k(k+1) r^{k-1}\Big) + \frac{\sigma}{\varepsilon} n(k+1) r^{k-1} \geqslant \varepsilon^{-\frac{1}{k}} \big(1 + |D\gamma|^2\big)^{\frac{k-1}{2k}}. \tag{17}$$

Für $k \geqslant 1$ ist $0 \leqslant \frac{k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{2}$, und wegen $(a+b)^\alpha \leqslant a^\alpha + b^\alpha$ für $a, b \geqslant 0,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ ergibt sich für $0 < \varepsilon \leqslant 1$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-\frac{1}{k}}\big(1+|D\gamma|^2\big)^{\frac{k-1}{2k}} &\leqslant \varepsilon^{-\frac{1}{k}}\big(1+(k+1)^{\frac{k-1}{k}}\big(\frac{\sigma}{\varepsilon}\big)^{\frac{k-1}{k}} r^{k-1}\big) \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon} r^{k-1}(1+(k+1)\sigma^{\frac{k-1}{k}}) \ . \end{aligned}$$

Wird also σ so groß gewählt, dass

$$(1+(k+1)\sigma^{\frac{k-1}{k}}) \leqslant \sigma(k+1)n \ ,$$

so ist (17) erfüllt.

Für $k < 1$ genügt es zu zeigen, dass

$$\varepsilon^{-\frac{1}{k}} \leqslant \big(1+|D\gamma|^2\big)^{\frac{1-k}{2k}}\Big(\frac{\sigma}{\varepsilon}n(k+1)r^{k-1}\Big) \ .$$

Wegen $r \geqslant 1$ erhalten wir aber

$$\big(1+|D\gamma|^2\big)^{\frac{1-k}{2k}}\Big(\frac{\sigma}{\varepsilon}n(k+1)r^{k-1}\Big) \geqslant \Big(\frac{\sigma}{\varepsilon}\Big)^{\frac{1}{k}}(k+1)^{\frac{1}{k}}n \ .$$

Damit wäre für $\sigma \geqslant ((k+1)n^k)^{-1}$ die Bedingung (17) erfüllt.

Da nach dem Maximumprinzip $w^\varepsilon \geqslant 0$ und $\gamma|_{\partial\Omega} \geqslant 0$ ist, folgt ebenfalls mit dem Maximumprinzip die Schranke an $\sup|w^\varepsilon|$.

□

Aus dem nächsten Lemma ergeben sich a-priori Schranken an den Gradienten von u^ε.

Lemma 3.5 *Es sei $H(\partial\Omega) \geqslant \delta_0 > 0$. Dann ist*

$$|Du^\varepsilon| \leqslant (R, \delta_0, C^2(\partial\Omega)),$$

mit $R = diam(\Omega)$.

Beweis: Wir konstruieren Barrieren am Rand für $(\star\star)_\varepsilon$ der Form

$$v(x) = \Psi(d), \quad \text{mit } d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$$

in einer Umgebung $V := \{0 \leqslant d(x) < \alpha_0\}$, in der d glatt ist. Zusätzlich sei $\alpha_0 > 0$ so klein gewählt, dass

$$\alpha_0 \sup_{\partial\Omega}|A| < \frac{1}{2} \ \text{ auf } V, \tag{18}$$

wobei $|A|$ hier die Norm der zweiten Fundamentalform von $\partial\Omega$ bezeichne. Nach Lemma 14.17 in [GT83] gilt für $x_0 \in V$:

$$\left[D^2 d(x_0)\right] = \operatorname{diag}\left[\frac{-\lambda_1}{1-\lambda_1 d}, \ldots, \frac{-\lambda_n}{1-\lambda_n d}, 0\right]$$

bezüglich eines Normalkoordinatensystems in y_0 mit $d(x_0) = |x_0 - y_0|$, $y_0 \in \partial\Omega$. Mit (18) erhalten wir

$$\Delta d(x_0) = -H(y_0) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^2 d}{1-\lambda_i d} \leqslant -H(y_0) \leqslant -\delta_0 \ . \tag{19}$$

Notwendige Bedingung für eine Superlösung von $(\star\star)_\varepsilon$ ist

$$Qv := \big((1+|Dv|^2)\delta_{ij} - D_i v D_j v\big) D_i D_j v + \varepsilon^{-\frac{1}{k}} \big(1+|Dv|^2\big)^{\frac{3k-1}{2k}} \leqslant 0 \ .$$

Für unseren Ansatz $v(x) = \Psi(d)$ ist wegen $D_i d D_j D_i d = 0$

$$Q\Psi(d) \leqslant -\Psi'\big(1+(\Psi')^2\big)\delta_0 + \Psi'' + \varepsilon^{-\frac{1}{k}}\big(1+(\Psi')^2\big)^{\frac{3k-1}{2k}} \ . \tag{20}$$

Unter der Voraussetzung $\Psi' \geqslant \max\left\{1, \frac{4^k}{\delta_0^k \varepsilon}\right\}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, folgt dann

$$Q\Psi(d) \leqslant -\Psi' - (\Psi')^3\delta_0 + \Psi'' + \delta_0(\Psi')^3 \leqslant -\Psi'\delta_0 + \Psi'' \ .$$

Damit ist für o.B.d.A. $\delta_0 \leqslant 1$

$$\Psi(d) := \frac{4^k a}{\delta_0^k \varepsilon} d \ ,$$

und $a \geqslant 1$ eine Superlösung auf V. Wenn wir nun a hinreichend groß wählen, so dass

$$\frac{4^k a}{\delta_0^k \varepsilon}\alpha \geqslant \frac{1}{\varepsilon} C(R,k)$$

ist, wobei $C(R,k)$ die Konstante aus Lemma 3.4 bezeichne, dann ist $\Psi(d) \geqslant w^\varepsilon$ auf ∂V und wir erhalten

$$|Dw^\varepsilon|\Big|_{\partial\Omega} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} C(R,k,\alpha) \ .$$

Sei nun τ der $n+2$-te Einheitsvektor in $\Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$. Dann gilt für $v := \langle \nu, \tau\rangle^{-1}$ auf graph(w^ε):

$$\Delta v = 2v^{-1}|\nabla v|^2 + |A|^2 v - v^2\langle \nabla H, \tau\rangle \ .$$

Wegen $v = \sqrt{\varepsilon^2 + |Dw^\varepsilon|^2}$ liefert $(\star\star)_\varepsilon$:

$$H(w^\varepsilon) = H(v) = \varepsilon^{-\frac{1}{k}} v^{-\frac{1}{k}}$$

und somit

$$\nabla H = -\frac{1}{k}\varepsilon^{-\frac{1}{k}} v^{-\frac{k+1}{k}} \nabla v \ .$$

Man sieht, dass

$$-\Delta v + 2v^{-1}|\nabla v|^2 + |A|^2 v + \frac{1}{k}\varepsilon^{-\frac{1}{k}} v^{\frac{k-1}{k}} \langle \nabla v, \tau\rangle = 0,$$

womit wir nach dem Maximumprinzip erhalten, dass

$$\max_{\Omega} |Dw^\varepsilon| = \max_{\partial\Omega} |Dw^\varepsilon| \ .$$

$\square$

Mit Hilfe der a-priori Abschätzungen sind wir nun in der Lage, die Existenz von Lösungen zu $(\star)_\varepsilon$ zu beweisen. Dazu studieren wir Lösungen zu folgender Familie von Gleichungen:

$$(\star)_{\varepsilon,\tau} \begin{cases} \operatorname{div}\Big(\frac{Du^{\varepsilon,\tau}}{\sqrt{\varepsilon^2+|Du^{\varepsilon,\tau}|^2}}\Big) = -\tau \ \big(\varepsilon^2 + |Du^{\varepsilon,\tau}|^2\big)^{-\frac{1}{2k}} & \text{auf } \Omega \\ u^{\varepsilon,\tau} = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ und $0 < \varepsilon \leqslant 1$.

Lemma 3.6 (Approximative Existenz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, Ω offen und beschränkt, sowie $\partial\Omega$ glatt und $H(\partial\Omega) \geqslant \delta_0 > 0$. Dann existiert zu jedem $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ eine glatte Lösung $u^{\varepsilon,\tau}$ mit Schranken*

$$|u^{\varepsilon,\tau}| \leqslant C(\delta_0, k, R), \quad |Du^{\varepsilon,\tau}| \leqslant C(\delta_0, k, R)$$

unabhängig von ε, τ; $R = diam(\Omega)$.

Beweis: Gleichmäßige Abschätzungen an $\sup|u^\varepsilon|$ und $\sup|Du^\varepsilon|$, unabhängig von ε, τ folgen völlig analog wie in Lemma 3.4 und Lemma 3.5. Um die Existenz von Lösungen zu zeigen, wollen wir die Kontinuitätsmethode auf $(\star)_{\varepsilon,\tau}$ für $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ anwenden. Sei $\varepsilon > 0$ fest gewählt, $u^\tau := u^{\varepsilon,\tau}$; wir schreiben $(\star)_{\varepsilon,\tau}$ in der Form

$$F^\tau(u^\tau) := \operatorname{div}\Big(\frac{Du^\tau}{\sqrt{\varepsilon^2 + |Du^\tau|^2}}\Big) + \frac{\tau}{\big(\varepsilon^2 + |Du^\tau|^2\big)^{\frac{1}{2k}}} = 0$$

mit $u^\tau = 0$ auf $\partial\Omega$. Die Abbildung

$$F : C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \times \mathbb{R} \to C^\alpha(\overline{\Omega}) \ ,$$

definiert durch $F(v,\tau) := F^\tau(v)$, ist C^1 und hat die eindeutige Lösung $F(0,0) = 0$. Sei

$$S := \big\{\tau | \tau \in [0,1],\ (\star)_{\varepsilon,\tau} \text{ hat ein Lösung } u^{\varepsilon,\tau} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})\big\} \ .$$

Offensichtlich ist $0 \in S$. Wir wollen zeigen, dass S offen wie auch abgeschlossen ist.

Sei $\tau \in S$ und u^τ die zugehörige Lösung von $(\star)_{\varepsilon,\tau}$. Für die Linearisierung von F^τ um u^τ erhalten wir in Richtung $h \in C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}F^\tau\Big|_{u^\tau}(h) =& \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+|Du^\tau|^2}}\bigg(\delta_{ij} - \frac{D_iu^\tau D_ju^\tau}{\varepsilon^2+|Du^\tau|^2}\bigg)D_iD_jh + D_i\bigg(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+|Du^\tau|^2}}\bigg)D_ih \\ & - D_i\bigg(\frac{D_iu^\tau D_ju^\tau}{\big(\varepsilon^2+|Du^\tau|^2\big)^{\frac{3}{2}}}\bigg)D_jh - \frac{\tau}{k}\frac{D_iu^\tau}{\big(\varepsilon^2+|Du^\tau|^2\big)^{\frac{1}{2k}+1}}D_ih\ .\end{aligned}$$

Damit hat die Linearisierung $L(h) := \mathcal{D}F^\tau\Big|_{u^\tau}(h) : C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^\alpha(\overline{\Omega})$ die Form

$$Lh = a^{ij}D_iD_jh + b^iD_ih$$

mit $\lambda|\xi|^2 \leqslant a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2$, $\lambda, \Lambda > 0$, wobei die Koeffizienten $\{a^{ij}\}$ von der Klasse $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ und die Koeffizienten $\{b^i\}$ von der Klasse $C^\alpha(\overline{\Omega})$ sind. Nach Theorem 6.14 in [GT83] ist L bijektiv. Die Schauder-Abschätzungen, Theorem 6.6 [GT83], zusammen mit Theorem 3.7 [GT83] zeigen, dass L^{-1} stetig ist. Mit dem impliziten Funktionensatz erhalten wir Lösungen von $(\star)_{\varepsilon,\tau}$ auf einem Intervall $(\tau-\delta, \tau+\delta)$, $\delta > 0$. Insbesondere ist S somit offen.

Wir wollen nun zeigen, dass S ebenso abgeschlossen ist. Dafür sei u^τ wieder eine Lösung von $(\star)_{\varepsilon,\tau}$. Mit Hilfe der Nash-Moser-DeGiorgi Abschätzungen, Theorem 13.2 [GT83], und den a-priori Schranken, ergeben sich gleichmäßige Schranken an $\|u^\tau\|_{C^{1,\alpha}}$, unabhängig von τ. Mit den Schauder-Abschätzungen folgt

$$\|u^\tau\|_{C^{2,\alpha}} \leqslant C(\varepsilon)\ ,$$

unabhängig von τ. Mit Hilfe von Arzela-Ascoli sieht man, dass S geschlossen ist. Aus den höheren Schauder-Abschätzungen folgt die Glattheit der Lösungen. $\square$

Um sie später teilweise in den Limes übertragen zu können, wollen wir nun einige geometrische Eigenschaften des approximierenden Flusses studieren.

Wir verwenden die folgende Notation: u^ε sei eine Lösung zu $(\star)_\varepsilon$ auf Ω, $w^\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon}u^\varepsilon$. Nach $(\star\star)_\varepsilon$ sind die Flächen $N_t^\varepsilon \subset \Omega\times\mathbb{R}$,

$$N_t^\varepsilon := \operatorname{graph}\Big(w^\varepsilon(x) - \frac{t}{\varepsilon}\Big), \quad -\infty < t < \infty, \tag{21}$$

translatierende Lösungen des H^k-Flusses auf $\Omega\times\mathbb{R}$. Diese Graphen sind Niveaumengen der Funktion

$$U^\varepsilon(x,z) := u^\varepsilon(x) - \varepsilon z, \tag{22}$$

mit $U^\varepsilon : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $N_t^\varepsilon = \{U^\varepsilon = t\}$. Analog wie bei Caccioppoli-Mengen definieren wir

$$|\partial^* N_t^\varepsilon \cap K| = (\mathcal{H}^{n+1} \llcorner N_t^\varepsilon)(K) := \mathcal{H}^{n+1}(N_t^\varepsilon \cap K)$$

für $K \subset \Omega\times\mathbb{R}$.

Bemerkung 3.7 Da die Graphen N_t^ε den H^k-Fluss glatt lösen und ihre mittlere Krümmung beschränkt ist, ist die Funktion U^ε nach Lemma 3.3 eine schwache Lösung des Funktionals J_{U^ε} auf $\Omega\times\mathbb{R}$.

Die nächsten drei Lemmata sind direkte Konsequenzen aus dem Variationsprinzip.

Lemma 3.8 *Die Mengen E_t^ε sind strikt minimierend von außen in $\Omega\times\mathbb{R}$, das heißt*

$$|\partial^* E_t^\varepsilon \cap K| < |\partial^* F \cap K|$$

für F mit $E_t^\varepsilon \subset F$, $F \setminus E_t^\varepsilon \subset K \Subset \Omega\times\mathbb{R}$, und $\mathcal{H}^{n+2}(F \setminus E_t^\varepsilon) > 0$.

Beweis: Mit Bemerkung 3.7 erhalten wir

$$|\partial^* E_t^\varepsilon \cap K| + \int\limits_{(F\setminus E_t^\varepsilon)\cap K} |DU^\varepsilon|^{-\frac{1}{k}}\, dx \leqslant |\partial^* F \cap K| \tag{23}$$

□

Lemma 3.9 (Massenschranke) *Es sei $K' := \Omega \times [0,1]$. Dann ist*

$$|N_t^\varepsilon \cap K'| \leqslant \mathcal{H}^n(\partial\Omega) + 2\mathcal{H}^{n+1}(\Omega)$$

für alle $-\infty < t < \infty$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$.

Beweis: Sei $M_i \subset \Omega$ eine Folge von glatten, geschlossenen Hyperflächen, die $\partial\Omega$ von innen approximiert mit $\mathcal{H}^n(M_i) \to \mathcal{H}^n(\partial\Omega)$, sowie $V_i \to \Omega$, V_i das von M_i berandete Volumen. Sei

$$F := E_t^\varepsilon \cup \big(V_i \times [0,1]\big), \tag{24}$$

dann liefert Lemma 3.8 die gewünschte Abschätzung für $i \to \infty$. □

Lemma 3.10 *Sei $K' := \Omega \times [0,1]$ und $T_\varepsilon^+ := \sup_{K'} U^\varepsilon$, $T_\varepsilon^- := \inf_{K'} U^\varepsilon$. Dann ist*

$$\int\limits_{T_\varepsilon^-}^{T_\varepsilon^+} \int_{N_t^\varepsilon\cap K'} |H_t^\varepsilon|^{k+1}\, d\mathcal{H}^{n+1} dt \leqslant \mathcal{H}^n(\partial\Omega) + 2\mathcal{H}^{n+1}(\Omega)\ , \tag{25}$$

wobei H_t^ε die mittlere Krümmung von N_t^ε bezeichne.

Beweis: Indem wir F wie in (24) definieren, erhalten wir wie in Lemma 3.9

$$|\partial^* E_t^\varepsilon \cap K'| + \int\limits_{K' \setminus E_t^\varepsilon} |DU^\varepsilon|^{-\frac{1}{k}}\, dx \leqslant \mathcal{H}^n(\partial\Omega) + 2\mathcal{H}^{n+1}(\Omega)$$

und wegen $\lim_{t \to T_\varepsilon^+} |\partial^* E_t^\varepsilon \cap K'| = 0$,

$$\int\limits_{K'} |DU^\varepsilon|^{-\frac{1}{k}}\, dx \leqslant \mathcal{H}^n(\partial\Omega) + 2\mathcal{H}^{n+1}(\Omega)\ . \tag{26}$$

Anhand der Koflächenformel und $(\star\star)_\varepsilon$ folgt dann

$$\int\limits_{K'} |DU^\varepsilon|^{-\frac{1}{k}}\, dx = \int\limits_{T_\varepsilon^-}^{T_\varepsilon^+} \int_{N_t^\varepsilon \cap K'} |DU^\varepsilon|^{-\frac{k+1}{k}}\, d\mathcal{H}^{n+1} dt = \int\limits_{T_\varepsilon^-}^{T_\varepsilon^+} \int_{N_t^\varepsilon \cap K'} |H_t^\varepsilon|^{k+1}\, d\mathcal{H}^{n+1} dt\ .$$

□

Bemerkung 3.11 Die Massenschranke an N_t^ε lässt sich durch geeignete Wahl einer Testfunktion auch direkt aus der partiellen Differentialgleichung $(\star\star)_\varepsilon$ gewinnen. Ebenso erhält man die Aussage von Lemma 3.10 aus der Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} d\mu = -H^{k+1} d\mu$$

des Maßes $d\mu$ unter dem H^k-Fluss.

3.3 Eigenschaften des schwachen Flusses

Einige der Ergebnisse des vorangegangenen Abschnitts lassen sich nun im Limes $\varepsilon \to 0$ auf den "Grenzfluss "übertragen. Aufgrund der gleichmäßigen Abschätzungen an $\sup |u^\varepsilon|$ und $\sup |Du^\varepsilon|$ können wir eine Folge $\varepsilon_i \to 0$ auswählen, so dass

$$u^{\varepsilon_i} \to u$$

gleichmäßig auf $\overline{\Omega}$. Obwohl wir erst später zeigen werden, dass u eine schwache Superlösung im Sinne von Definition 3.1 auf Ω ist, wollen wir dem vorgreifend schon jetzt u als schwachen H^k-Fluss bezeichnen.

Da $u^{\varepsilon_i} \to u$ konvergiert, gilt auch

$$U^{\varepsilon_i} \to U$$

lokal gleichmäßig auf $\Omega \times \mathbb{R}$, für $U : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, z) \mapsto u(x)$. Es ist für $E_t := \{u > t\} \subset \Omega$ und $E'_t := \{U > t\} \subset \Omega \times \mathbb{R}$,

$$E'_t = E_t \times \mathbb{R} \ .$$

Die maximale Existenzzeit des schwachen Flusses sei wie im klassischen Fall mit

$$T := \sup_{\Omega} u$$

bezeichnet. Auf $K \subset \Omega \times \mathbb{R}$, K kompakt, gilt für

$$T_\varepsilon^+ := \sup_K U^\varepsilon, \quad T_\varepsilon^- := \inf_K U^\varepsilon \ ,$$

dass $T_\varepsilon^+ \to T$ und $T_\varepsilon^- \to 0$. Um die Konvergenz von $E_t^\varepsilon \to E'_t$ zu untersuchen, benötigen wir das folgende einfache Lemma.

Lemma 3.12 *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $(f_i)_{i \geqslant 1}$, f messbare Funktionen mit*

$$f_i \to f \quad \textit{punktweise fast überall.}$$

Ist $\mathcal{H}^{n+1}(\{f = \tau\}) = 0$, so konvergiert

$$\chi_{\{f_i > \tau\}} \to \chi_{\{f > \tau\}}$$

in $L^1_{loc}(U)$.

Beweis: Wegen $\mathcal{H}^{n+1}(\{f = \tau\}) = 0$ konvergiert $\chi_{\{f_i > \tau\}} \to \chi_{\{f > \tau\}}$ punktweise fast überall und damit auch in $L^1_{\text{loc}}(U)$. □

Theorem 3.13 *Der schwache H^k-Fluss ist "non-fattening", das heißt $\mathcal{H}^{n+1}(\{u = \tau\}) = 0$ für alle $\tau \in [0, T]$.*

Beweis: Wir setzen wieder $K' := \Omega \times [0, 1]$. Für zwei beliebige $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$ und $0 < \varepsilon \leqslant 1$, folgt mit der Koflächenformel:

$$\mathrm{Vol}(E_{t_1}^\varepsilon \cap K') - \mathrm{Vol}(E_{t_2}^\varepsilon \cap K') = \int_{t_1}^{t_2} \int_{N_t^\varepsilon \cap K'} (H_t^\varepsilon)^k \, d\mathcal{H}^{n+1} dt \ . \tag{27}$$

Daraus ergibt sich mit der Hölderschen Ungleichung, sowie Lemma 3.9 und Lemma 3.10:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{N_t^\varepsilon \cap K'} (H_t^\varepsilon)^k \, d\mathcal{H}^{n+1} dt &\leqslant |t_2 - t_1|^{\frac{1}{k+1}} \left(\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{N_t^\varepsilon \cap K'} (H_t^\varepsilon)^k \, d\mathcal{H}^{n+1} \right)^{\frac{k+1}{k}} dt \right)^{\frac{k}{k+1}} \\ &\leqslant |t_2 - t_1|^{\frac{1}{k+1}} C \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_{N_t^\varepsilon \cap K'} (H_t^\varepsilon)^{k+1} \, d\mathcal{H}^{n+1} dt \right)^{\frac{k}{k+1}} \\ &\leqslant C |t_2 - t_1|^{\frac{1}{k+1}} \ , \end{aligned} \tag{28}$$

wobei $C = C(\Omega, \partial\Omega, K')$, unabhängig von ε. Damit ist

$$|\mathrm{Vol}(E^\varepsilon_{t_1} \cap K') - \mathrm{Vol}(E^\varepsilon_{t_2} \cap K')| \leqslant C|t_2 - t_1|^{\frac{1}{k+1}} \ . \tag{29}$$

Nun ist $\mathcal{H}^{n+1}(\{u = \tau\}) = 0$ für alle $\tau \in [0,T] \setminus \mathcal{J}$, $\mathcal{J}$ abzählbar, und so auch $\mathcal{H}^{n+2}(\{U = \tau\}) = 0$ für alle entsprechenden τ. Sei $\tau_0 \in \mathcal{J} \cap (0,T)$. Wir wählen Folgen $(t_j^-)_{j\geqslant 1}, (t_j^+)_{j\geqslant 1} \subset (0,T) \setminus \mathcal{J}$ mit $t_j^- \nearrow \tau_0$ und $t_j^+ \searrow \tau_0$. Nach Lemma 3.12 gilt

$$\mathrm{Vol}(E^{\varepsilon_i}_{t_j^+} \cap K') \to \mathrm{Vol}(E'_{t_j^+} \cap K')$$

und

$$\mathrm{Vol}(E^{\varepsilon_i}_{t_j^-} \cap K') \to \mathrm{Vol}(E'_{t_j^-} \cap K')$$

für $\varepsilon_i \to 0$, und damit aus (29)

$$|\mathrm{Vol}(E'_{t_j^-} \cap K') - \mathrm{Vol}(E'_{t_j^+} \cap K')| \to 0$$

für $j \to \infty$. Aus

$$E'_{t_j^-} \to \{U \geqslant \tau_0\}; \quad E'_{t_j^+} \to \{U > \tau_0\}$$

erhalten wir

$$\mathcal{H}^{n+2}(\{U = \tau_0\}) = 0 \ \text{ und } \ \mathcal{H}^{n+1}(\{u = \tau_0\}) = 0 \ .$$

Für $\tau = T$ wählen wir eine Folge $(t_j^-)_{j\geqslant 1} \subset (0,T) \setminus \mathcal{J}$ und $t_j^+ > T$ mit $t_j^- \nearrow T$, $t_j^+ \searrow T$. Wegen

$$\mathrm{Vol}(E^{\varepsilon_i}_{t_j^+} \cap K') \to 0$$

für $i \to \infty$ ergibt sich analog wie zuvor

$$\mathrm{Vol}(E'_{t_j^-} \cap K') \to 0$$

für $j \to \infty$ und folglich $\mathcal{H}^{n+1}(\{u = T\}) = 0$. Analog argumentiert man für $\tau = 0$. □

Bemerkung 3.14 Die Ungleichung (29) sagt insbesondere aus, dass die Funktion

$$\mathrm{Vol}_t : [0,T] \to \mathbb{R} : t \mapsto \mathcal{H}^{n+1}(E_t)$$

eine hölderstetige Funktion mit Hölderexponent $\frac{1}{k+1}$ ist, sowie dass

$$\lim_{t\to T} \mathrm{Vol}_t = 0 \ .$$

Um zu zeigen, dass auch im Limes $\varepsilon_i \to 0$ die Mengen E_t minimierend von außen sind, sind die zwei folgenden Lemmata hilfreich.

Lemma 3.15 *Seien E_1, E_2 Caccioppoli-Mengen in $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dann gilt für jede offene Menge $A \subset U$:*

$$|\partial^*(E_1 \cup E_2) \cap A| + |\partial^*(E_1 \cap E_2) \cap A| \leqslant |\partial^* E_1 \cap A| + |\partial^* E_2 \cap A| \tag{30}$$

Beweis: Seien zuerst f, g glatte Funktionen mit $0 \leqslant f \leqslant 1,\ 0 \leqslant g \leqslant 1$ und sei

$$\phi := f + g - f \cdot g \quad \text{und} \quad \psi := f \cdot g\ .$$

Es gilt

$$|D\phi| \leqslant (1-f)|Dg| + (1-g)|Df| \quad \text{und} \quad |D\psi| \leqslant f|Dg| + g|Df|\,,$$

und damit

$$\int_A |D\phi| + \int_A |D\psi| \leqslant \int_A |Df| + \int_A |Dg|\ .$$

Wir wählen zwei Folgen glatter Funktionen in A, $\{f_j\}, \{g_j\}$, die in $L_1(A)$ gegen χ_{E_1} und χ_{E_2} konvergieren mit

$$\int_A |Df_j| \to |\partial^* E_1 \cap A| \quad \text{und} \quad \int_A |Dg_j| \to |\partial^* E_2 \cap A|.$$

Da $\phi_j \to \chi_{E \cup F}$ und $\psi_j \to \chi_{E \cap F}$ folgt (30) aus der Unterhalbstetigkeit bei L^1_{loc}-Konvergenz. □

Lemma 3.16 *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Menge und $E_h \subset U$ eine Folge von Caccioppoli-Mengen in U, die in $L^1_{loc}(U)$ zu $E \subset U$ konvergieren. Ist $|\partial^* E_h \cap K| \leqslant C(K)$, unabhängig von h für $K \subset U$, K kompakt, sowie die Mengen E_h minimierend von außen in U, so ist auch E minimierend von außen in U.*

Beweis: Es sei $E \subset F$ mit $F \setminus E \subset K \subset U$, K kompakt. Wegen $\chi_{F \cup E_h} \to \chi_E$ und $\chi_{E_h} \to \chi_E$ in $L^1_{\text{loc}}(U \setminus K)$, existiert $K' \subset U$ kompakt mit $\mathring{K'} \supset K$ und $\partial K'$ glatt, so dass (gegebenenfalls für eine Teilfolge, siehe die nachfolgende Bemerkung)

$$|\partial^*(F \cup E_h) \cap \partial K'| = |\partial^* E_h \cap \partial K'| = 0 \quad \forall h, \qquad \int\limits_{\partial K'} |\varphi^-_{F \cup E_h} - \varphi^+_{E_h}|\, d\mathcal{H}^n \to 0\ . \tag{31}$$

Dabei bezeichnen $\varphi^-_{F \cup E_h}$, $\varphi^+_{E_h}$ die innere, beziehungsweise äußere, Spur von $\chi_{F \cup E_h}$ und χ_{E_h} auf $\partial K'$. Wir erhalten für $F_h := E_h \cup (F \cap K')$, vergleiche [Giu84], Prop. 2.8:

$$|\partial^* F_h \cap U| = |\partial^* E_h \cap (U \setminus K')| + \int\limits_{\partial K'} |\varphi^-_{F \cup E_h} - \varphi^+_{E_h}|\, d\mathcal{H}^n + |\partial^*(F \cup E_h) \cap K'|\ . \tag{32}$$

F_h ist eine zulässige Vergleichsmenge für E_h, damit ist $|\partial^* E_h \cap U| \leqslant |\partial^* F_h \cap U|$. Aus (32) folgt

$$|\partial^*(F \cup E_h) \cap K'| \geqslant |\partial^* E_h \cap K'| - \int_{\partial K'} |\varphi^-_{F\cup E_h} - \varphi^+_{E_h}|\, d\mathcal{H}^n \ .$$

Aus (30) ergibt sich

$$|\partial^* F \cap K'| \geqslant |\partial^*(E_h \cap F) \cap K'| - \int_{\partial K'} |\varphi^-_{F\cup E_h} - \varphi^+_{E_h}|\, d\mathcal{H}^n \ .$$

Wegen (31) und $\chi_{E_h \cap F} \to \chi_E$ in L^1_{loc}, sowie der Unterhalbstetigkeit sieht man, dass

$$|\partial^* F \cap K'| \geqslant |\partial^* E \cap K'| \ .$$

□

Bemerkung 3.17 Um die Existenz einer Menge K' zu zeigen, die (31) erfüllt, sei $W \subset U$ kompakt mit $\mathring{W} \supset K$ und ∂W glatt. Es sei $d(x) := d(x, W)$ die Abstandsfunktion zu W. Dann bilden die Hyperflächen $M_t := \{x | d(x) = t\}$ für $0 < t < \delta$, $\delta > 0$ eine glatte Blätterung einer äußeren Tubenumgebung von ∂W. Analog wie in [Giu84], Remark 2.13, gilt für die inneren und äußeren Spuren $\varphi^-_{F\cup E_h,t}$ und $\varphi^+_{E_h,t}$ auf M_t:

$$\varphi^-_{F\cup E_h,t}(x) = \chi_{F\cup E_h}(x), \quad \varphi^+_{E_h,t}(x) = \chi_{E_h}(x)$$

$\mathcal{H}^n$-fast überall auf M_t für fast alle $t \in (0, \delta)$. Aus der Konvergenz von $(\chi_{F\cup E_h} - \chi_E) \to 0$ auf $U \setminus K$ erhalten wir mit der Koflächenformel:

$$\begin{aligned}\int_{\{0<d(x)<\delta\}} |\chi_{F\cup E_h} - \chi_E|\, dx &= \int_{\{0<d(x)<\delta\}} |\varphi^-_{F\cup E_h,t} - \varphi^+_{E_h,t}|\, dx \\ &= \int_0^\delta \int_{M_t} |\varphi^-_{F\cup E_h,t} - \varphi^+_{E_h,t}|(x)\, d\mathcal{H}^n(x)\, dt \to 0 \ ,\end{aligned}$$

und damit, dass $\int_{M_t} |\varphi^-_{F\cup E_h,t} - \varphi^+_{E_h,t}|(x)\, d\mathcal{H}^n(x) \to 0$ für fast alle $t \in (0, \delta)$. Da für jedes feste h

$$|\partial^*(F \cup E_h) \cap M_t| = |\partial^* E_h \cap M_t| = 0$$

für alle bis auf abzählbar viele t, können wir ein $t \in (0, \delta)$ wählen, so dass (31) erfüllt ist.

Proposition 3.18 *Die Mengen E_t sind minimierend von außen in Ω für alle $t \in (0,T)$.*

Beweis: Sei $t \in (0,T)$. Nach Lemma 3.13 und Lemma 3.12 konvergiert $E_t^{\varepsilon_i} \to E_t'$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega\times\mathbb{R})$. Die Mengen $E_t^{\varepsilon_i}$ sind nach Lemma 3.8 minimierend von außen und wegen Lemma 3.17 ist dann auch E_t' minimierend von außen auf $\Omega\times\mathbb{R}$.

Wir wollen zeigen, dass auch die Mengen E_t minimierend von außen sind. Sei dazu $F \subset \Omega$ mit $E_t \subset F$, $F \setminus E_t \subset K \subset \Omega, K$ kompakt. $F' := F \times [-l,l]$ ist eine zulässige Vergleichsmenge zu E_t' und wir erhalten für $K' := K \times [-l-1, l+1]$ aus $|\partial^* E_t' \cap K'| \leqslant |\partial^* F' \cap K'|$:

$$2(l+1)|\partial^* E_t \cap K| \leqslant 2l|\partial^* F \cap K| + 2\mathcal{H}^{n+1}(F \setminus E_t)$$

und daraus im Limes $l \to \infty$,

$$|\partial^* E_t \cap K| \leqslant |\partial^* F \cap K| \ .$$

□

Korollar 3.19 *Die Funktion $[0,T] \to \mathbb{R} : t \mapsto |\partial^* E_t \cap \overline{\Omega}|$ ist monoton fallend.*

Um weitere Eigenschaften des schwachen Flusses u zu studieren, wollen wir auf Ergebnisse von L.C.Evans und J.Spruck in [ES95] zurückgreifen. Dazu definieren wir

$$H^\varepsilon := \operatorname{div}\left(\frac{Du^\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + |Du^\varepsilon|^2}}\right) \quad \text{und} \tag{33}$$

$$\nu^\varepsilon := \frac{Du^\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + |Du^\varepsilon|^2}} \quad , \tag{34}$$

wobei wir H^ε als die approximative mittlere Krümmung und ν^ε als approximative Normale der Niveaumengen von u verstehen. Unter der Voraussetzung, dass

$$\sup_{0<\varepsilon_i\leqslant 1} \int_\Omega |H^{\varepsilon_i}|\, dx < \infty \ , \tag{35}$$

haben Evans und Spruck gezeigt, dass nicht nur $Du^\varepsilon \rightharpoonup Du$, sondern sogar

$$|Du^{\varepsilon_i}| \rightharpoonup |Du| \quad \text{schwach} - * \text{ in } L^\infty(\Omega) \ .$$

Heuristisch sagt dies aus, dass bei der Konvergenz der Graphen $N_t^\varepsilon \to N_t$ für fast alle Zeiten t kein Verlust an Flächeninhalt auftritt. Dies impliziert insbesondere, dass sich die Flächen N_t^ε im Limes $\varepsilon \to 0$ nicht "zusammenfalten "oder "übereinanderlegen". Genau diese Implikation werden wir in einem späteren Abschnitt ausnutzen, um zu zeigen, dass die "Grenzflächen" N_t im Limes fast überall Dichte 1 besitzen.

Lemma 3.20 *Sei u^ε eine Lösung zu $(\star)_\varepsilon$ auf Ω. Dann ist*

$$\int_\Omega |H^\varepsilon|\,dx \leqslant C(|\partial\Omega|,|\Omega|)\ .$$

Beweis: Dies ist eine Umformulierung von (26). □

Die genaue Aussage von Evans und Spruck lautet wie folgt:

Theorem 3.21 (Evans/Spruck) *Seien $v^{\varepsilon_i} : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\varepsilon_i \to 0$, eine Folge von Funktionen mit*

$$\sup_{\varepsilon_i} \|v^{\varepsilon_i}\|_{L^\infty(U)} < \infty \quad , \quad \sup_{\varepsilon_i} \||Dv^{\varepsilon_i}|\|_{L^\infty(U)} < \infty$$

und

$$v^{\varepsilon_i} \to v \quad \textit{lokal gleichmäßig}$$

$$Dv^{\varepsilon_i} \rightharpoonup Dv \quad \textit{schwach}-* \textit{ in } L^\infty(U;\mathbb{R}^{n+1})\ ,$$

sowie

$$\sup_{\varepsilon_i} \|H^{\varepsilon_i}\|_{L^1(U)} < \infty \quad .$$

Dann konvergiert auch

$$|Dv^{\varepsilon_i}| \rightharpoonup |Dv| \textit{ schwach}-* \textit{ in } L^\infty(U)$$

$$\nu^{\varepsilon_i} \to \nu := \frac{Dv}{|Dv|} \quad \textit{in } L^2(\{|Dv| \neq 0\};\mathbb{R}^{n+1})\ .$$

Beweis: Siehe [ES95], Kapitel 3. Der Beweis benutzt Methoden der "Compensated Compactness". Evans und Spruck beweisen das Resultat für $U = \mathbb{R}^{n+1}$, für $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ läuft der Beweis analog. □

Da $u^{\varepsilon_i} \to u$ lokal gleichförmig und u^{ε_i}, u gleichmäßig lipschitz-stetig sind, konvergiert auch $Du^{\varepsilon_i} \rightharpoonup Du$ im Sinne von Distributionen auf Ω. Wegen der Kompaktheit in schwach$-*$ $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{n+1})$ konvergiert auch

$$Du^{\varepsilon_i} \rightharpoonup Du \ \text{ schwach}-* \text{ in } L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{n+1})\ .$$

Wir erhalten mit Theorem 3.21 und Lemma 3.20:

$$|Du^{\varepsilon_i}| \rightharpoonup |Du| \quad \text{schwach}-* \text{ in } L^\infty(\Omega) \tag{36}$$

$$\nu^{\varepsilon_i} \to \nu := \frac{Du}{|Du|} \quad \text{in } L^2(\{|Du| \neq 0\};\mathbb{R}^{n+1})\ . \tag{37}$$

Als erste Konsequenz ergibt sich:

Lemma 3.22 *Seien $u^{\varepsilon_i} \to u$, wo u^{ε_i} Lösungen von $(\star)_{\varepsilon_i}$sind, wie oben definiert. Dann ist*

$$\mathcal{H}^{n+1}(\{Du = 0\}) = 0 \ .$$

Beweis: Sei $A := \{Du = 0\} \subset \Omega$. Wegen Lemma 3.20 gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_A 1\, dx &= \lim_{\varepsilon_i \to 0} \int\limits_A \sqrt{\varepsilon_i^2 + |Du^{\varepsilon_i}|^2}^{-\frac{1}{k+1}} \sqrt{\varepsilon_i^2 + |Du^{\varepsilon_i}|^2}^{\frac{1}{k+1}}\, dx \\
&\leqslant \limsup_{\varepsilon_i \to 0} \left(\int\limits_A \sqrt{\varepsilon_i^2 + |Du^{\varepsilon_i}|^2}^{-\frac{1}{k}}\, dx \right)^{\frac{k}{k+1}} \cdot \left(\int\limits_A \sqrt{\varepsilon_i^2 + |Du^{\varepsilon_i}|^2}\, dx \right)^{\frac{1}{k+1}} \\
&\leqslant C \ \limsup_{\varepsilon_i \to 0} \left(\int\limits_A \sqrt{\varepsilon_i^2 + |Du^{\varepsilon_i}|^2}\, dx \right)^{\frac{1}{k+1}} .
\end{aligned}$$

Aus $\left| \sqrt{\varepsilon_i^2 + |Du^{\varepsilon_i}|^2} - |Du^{\varepsilon_i}| \right| \leqslant \varepsilon_i$ und (36) ergibt sich

$$\mathcal{H}^{n+1}(A) \leqslant C \limsup_{\varepsilon_i \to 0} \left(\int\limits_A |Du^{\varepsilon_i}|\, dx \right)^{\frac{1}{k+1}} = 0 \ .$$

□

Proposition 3.23 *Seien u^{ε_i} Lösungen zu $(\star)_{\varepsilon_i}$ mit $\varepsilon_i \to 0$,so dass $u^{\varepsilon_i} \to u$ lokal gleichmäßig auf Ω. Dann ist für $\phi \in L^\infty(\Omega)$, $\phi \geqslant 0$:*

$$\int\limits_\Omega \phi |Du|^{-\frac{1}{k}}\, dx \leqslant \liminf_{\varepsilon_i \to 0} \int\limits_\Omega \phi \sqrt{\varepsilon_i^2 + |Du^{\varepsilon_i}|^2}^{\frac{1}{k}}\, dx$$

Beweis: Seien $\phi, \psi \in L^\infty(\Omega)$, $\phi, \psi \geqslant 0$. Man erhält

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega \phi\psi\, dx &= \lim_{\varepsilon_i \to 0} \int\limits_\Omega \left(\phi^{\frac{1}{k+1}} \psi \sqrt{\varepsilon_i^2 + |Du^{\varepsilon_i}|^2}^{\frac{1}{k+1}} \right) \left(\phi^{\frac{k}{k+1}} \sqrt{\varepsilon_i^2 + |Du^{\varepsilon_i}|^2}^{-\frac{1}{k+1}} \right) dx \\
&\leqslant \liminf_{\varepsilon_i \to 0} \left(\int\limits_\Omega \phi\psi^{k+1} \sqrt{\varepsilon_i^2 + |Du^{\varepsilon_i}|^2}\, dx \right)^{\frac{1}{k+1}} \left(\int\limits_\Omega \phi \sqrt{\varepsilon_i^2 + |Du^{\varepsilon_i}|^2}^{-\frac{1}{k}}\, dx \right)^{\frac{k}{k+1}} \\
&= \left(\int\limits_\Omega \phi\psi^{k+1} |Du|\, dx \right)^{\frac{1}{k+1}} \liminf_{\varepsilon_i \to 0} \left(\int\limits_\Omega \phi \sqrt{\varepsilon_i^2 + |Du^{\varepsilon_i}|^2}^{-\frac{1}{k}}\, dx \right)^{\frac{k}{k+1}} .
\end{aligned} \tag{38}$$

Wir wählen $\psi := \varphi_m\big(|Du|^{-\frac{1}{k}}\big)$ mit $\varphi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi_m(z) = \begin{cases} m & z \geqslant m \\ z & -m \leqslant z \leqslant m \\ -m & z \leqslant -m \quad . \end{cases}$$

Wegen $\psi \leqslant |Du|^{-\frac{1}{k}}$ erhalten wir aus (38)

$$\Bigg(\int\limits_\Omega \phi\psi\,dx\Bigg)^{\frac{k}{k+1}} \leqslant \liminf_{\varepsilon_i\to 0}\Bigg(\int\limits_\Omega \phi\sqrt{\varepsilon_i^2+|Du^{\varepsilon_i}|^2}^{\,-\frac{1}{k}}\,dx\Bigg)^{\frac{k}{k+1}} ,$$

woraus mit monotoner Konvergenz folgt, dass für $m \to \infty$:

$$\int\limits_\Omega \phi|Du|^{-\frac{1}{k}}\,dx \leqslant \liminf_{\varepsilon_i\to 0}\int\limits_\Omega \phi\sqrt{\varepsilon_i^2+|Du^{\varepsilon_i}|^2}^{\,-\frac{1}{k}}\,dx\ .$$

□

Bemerkung 3.24 Analog zu Proposition 3.23 kann man nachprüfen, dass

$$\int\limits_K \phi|DU|^{-\frac{1}{k}}\,dx \leqslant \liminf_{\varepsilon_i\to 0}\int\limits_K \phi|DU^{\varepsilon_i}|^{-\frac{1}{k}}\,dx \tag{39}$$

für $K \subset \Omega\times\mathbb{R}$, K kompakt und $\phi \in L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})$, $\phi \geqslant 0$.

Damit können wir zeigen, dass u eine Superlösung des Funktionals J_u ist.

Theorem 3.25 (Existenz) *Die Funktion u ist eine Superlösung des Funktionals J_u auf Ω mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$.*

Beweis: Wir wollen zunächst zeigen, dass die Funktion U die Bedingung (9) auf $\Omega\times\mathbb{R}$ für $V \geqslant U$, $\{U \neq V\} \Subset \Omega\times\mathbb{R}$, $V \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega\times\mathbb{R})$ erfüllt. Sei dafür $K \subset \Omega\times\mathbb{R}$, K kompakt mit $\{U \neq V\} \subset K\}$ und

$$\delta_i := \max_K |U - U^{\varepsilon_i}|\ ,$$

und so konvergiert $\delta_i \to 0$ für $i \to \infty$. Setze

$$V_i := \begin{cases} \max\{U^{\varepsilon_i}, v - 2\delta_i\} & \text{für } x \in K \\ U^{\varepsilon_i} & \text{für } \ x \notin K\ , \end{cases}$$

Es ist $V_i \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega\times\mathbb{R})$, $V_i \geqslant U^{\varepsilon_i}$, $\{V_i \neq U^{\varepsilon_i}\} \subset K$, insbesondere konvergiert $V_i \to V$ lokal gleichmäßig , $V_i = U_i$ auf $\Omega \setminus \{V > U\}$ und

$$\mathcal{H}^{n+1}(\{DV_i \neq DV\} \cap \{V > U\}) \to 0\ . \tag{40}$$

Aus Bemerkung 3.7 und Lemma 3.2 erhalten wir

$$J^K_{U^{\varepsilon_i}}(U^{\varepsilon_i}) \leqslant J^K_{U^{\varepsilon_i}}(V_i) \ ,$$

was sich schreiben lässt als

$$\int\limits_K |DU^{\varepsilon_i}| + (V_i - U^{\varepsilon_i})|DU^{\varepsilon_i}|^{-\frac{1}{k}}\, dx \leqslant \int\limits_K |DV_i|\, dx \ .$$

Da $V_i \to V$ und $U^{\varepsilon_i} \to U$ lokal gleichmäßig konvergieren, sowie wegen (26) und Bemerkung 3.24 ist

$$\int\limits_K (V - U)|DU|^{-\frac{1}{k}}\, dx \leqslant \liminf_{\varepsilon_i \to 0} \int\limits_K (V_i - U^{\varepsilon_i})|DU^{\varepsilon_i}|^{-\frac{1}{k}}\, dx \ .$$

Die Konvergenz von $|DU^{\varepsilon_i}| \rightharpoonup |DU|$ schwach$-*$ in $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ sowie (40) ergeben zusammen mit der gleichmäßigen Lipschitzstetigkeit von V_i, V:

$$\Bigg|\int\limits_K |DV_i| - |DV|\, dx\Bigg| \leqslant \Bigg|\int\limits_{K\setminus\{V>U\}} |DU^{\varepsilon_i}| - |DU|\, dx\Bigg| + C\mathcal{H}^{n+1}(\{DV_i \neq DV\} \cap \{V > U\}) \to 0 \ .$$

Zusammenfassend erhalten wir damit

$$\int\limits_K |DU| + (V - U)|DU|^{-\frac{1}{k}}\, dx \leqslant \int\limits_K |DV|\, dx \ .$$

Dass die Mengen E_t das Funktional J_u auf Ω minimieren folgt nun aus einer ähnlichen Argumentation wie in Proposition 3.18. $\square$

Bemerkung 3.26 (Eindeutigkeit) Da wir im Limes $\varepsilon \to 0$ nicht zeigen können, dass die Funktion u auch eine Sublösung des Funktionals J_u ist, bleibt die Frage der Eindeutigkeit solch einer schwachen Lösung zunächst offen. Für den Fall $k = 1$, das heißt im Fall des mittleren Krümmungsflusses, haben Evans und Spruck jedoch in [ES91] gezeigt, dass u die eindeutige Lösung von $(\star)$ im Viskositätssinne ist. Dies Resultat impliziert aber nicht, dass u auch eine schwache Lösung des Funktionals J_u ist.

3.4 Regularität

Im folgenden Abschnitt soll die Regularität der Niveaumengen $\{u = t\}$ des schwachen Flusses u untersucht werden.

Wie schon im vorhergehenden Abschnitt gezeigt, sind die Mengen $\{u > t\}$ von beschränkter Variation für alle $t \in [0,T]$. Weiter werden wir zeigen können, dass für fast alle t

$$\partial^* E_t = \{u = t\}$$

$\mathcal{H}^n$-fast überall. Mit Hilfe der Eigenschaften des approximierenden Flusses folgt, dass die Hyperflächen $\partial^* E_t$ für fast alle t eine verallgemeinerte, $L^{k+1}(\partial^* E_t)$-integrable mittlere Krümmung besitzen. Für den Fall $k > n-1$ erhalten wir daraus mit dem Regularitätstheorem von Allard $C^{1,\alpha}$-Regularität $\mathcal{H}^n$-fast überall.

Um die Konvergenz der Graphen $N_t^{\varepsilon_i}$ zu den Zylindern N_t genauer studieren zu können, wollen wir die Flächen $N_t^{\varepsilon_i}$ als integer $n+1$-rektifizierbare Varifaltigkeiten auffassen. Dabei verstehen wir unter einer integer l-rektifizierbaren Varifaltigkeit ein Tupel $V(X,\theta)$. Dieses Tupel besteht aus X, einer $\mathcal{H}^l$-messbaren und l-rektifizierbaren Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$, und $\theta \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{H}^l \llcorner X)$ mit $\theta : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ und $X = \{\theta > 0\}$, $\mathcal{H}^l$-fast überall. Das zugeordnete Radonmaß

$$\mu(X,\theta) = \mathcal{H}^l \llcorner \theta$$

auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$ besitzt dann μ-fast überall einen l-dimensionalen Tangentialraum mit positiver, geradzahliger Multiplizität.

Für genauere Definitionen verweisen wir auf das Buch von L.Simon [Sim83]. Eine kürzere, sehr übersichtliche Einführung ist in [Ilm94], Kapitel 1 zu finden.

Wie im vorhergehenden Abschnitt sei $\varepsilon_i \to 0$ eine Folge, für die $u^{\varepsilon_i} \to u$ gleichmäßig auf Ω und $|Du^{\varepsilon_i}| \rightharpoonup |Du|$ schwach$-*$ in $L^\infty(\Omega)$. Die den Flächen $N_t^{\varepsilon_i}$ zugeordneten Radonmaße auf $\Omega \times \mathbb{R}$ definieren wir als

$$\mu_t^{\varepsilon_i} := \mathcal{H}^{n+1} \llcorner N_t^{\varepsilon_i} \ . \tag{41}$$

Die nächste Proposition ist teilweise analog zum Beweis des Kompaktheitssatzes 7.1 für Brakke-Flüsse in [Ilm94].

Proposition 3.27 *Es existiert eine Teilfolge $\{\mu_t^{\varepsilon_i'}\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ und eine Familie $\{\mu_t'\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ von Radonmaßen auf $\Omega \times \mathbb{R}$, sodass gilt:*

i) Für alle $0 \leqslant t \leqslant T$ konvergiert

$$\mu_t^{\varepsilon_i'} \rightharpoonup \mu_t' \ . \tag{42}$$

ii) Für fast alle $t \in [0,T]$ existiert eine Teilfolge $(\varepsilon_j')_{j\geqslant 1} \subset (\varepsilon_i')_{i\geqslant 1}$, abhängig von t, sodass

$$\lim_{j\to\infty} V(\mu_t^{\varepsilon_j'}) = V(\mu_t') \tag{43}$$

im Sinne von Varifaltigkeiten.

iii) Insbesondere ist für alle $t \in B_3 \subset [0,T]$ mit $\mathcal{L}^1([0,T] \setminus B_3) = 0$, μ_t das einer integer $n+1$-rektifizierbaren Varifaltigkeit $V(X_t, \theta_t)$ zugeordnete Radonmaß. Die Varifaltigkeiten $V(X_t, \theta_t)$ besitzen eine verallgemeinerte mittlere Krümmung H'_t, und es gilt:

$$\int_0^T \int_{\Omega \times [0,1]} |H'_t|^{k+1} \, d\mu'_t \leqslant \liminf_{\varepsilon'_i \to 0} \int_0^T \int_{\Omega \times [0,1]} |H_t^{\varepsilon'_i}|^{k+1} \, d\mu_t^{\varepsilon'_i} \leqslant C(|\Omega|, |\partial\Omega|) \; . \tag{44}$$

Der Beweis folgt nach dem nächsten Lemma.

Lemma 3.28 *Sei $\{\mu_t\}_{0 \leqslant t \leqslant T}$ eine Familie von Radonmaßen auf $\Omega \times \mathbb{R}$. Für jedes $\phi \in C^1_c(\Omega \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$ existiere eine stetige Funktion $f_\phi(t)$ auf [0, T], sodass $\mu_t(\phi) - f_\phi(t)$ monoton fallend ist. Dann gilt:*

i) Für jedes t existieren der obere und untere Limes, und es gilt:

$$\lim_{s \nearrow t} \mu_s(\phi) \geqslant \mu_t(\phi) \geqslant \lim_{s \searrow t} \mu_s(\phi) \; .$$

ii) Es existiert eine Menge $B_2 \subset [0,T]$ mit $[0,T] \setminus B_2$ abzählbar, sodass μ_t stetig ist für alle $t \in B_2$.

Beweis: Punkt *i*) folgt direkt aus den Voraussetzungen. Für *ii*) sei Ψ eine abzählbare, dichte Teilmenge von $C^1_c(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$. Wegen *i*) existiert für jedes $\psi_i \in \Psi$ eine Menge $B_\psi \subset [0,T]$ mit $[0,T] \setminus B_\psi$ abzählbar, sodass $\mu_t(\psi)$ stetig ist auf B_ψ. Setze $B_2 := \bigcap_{\psi \in \Psi} B_\psi$, damit ist $\mu_t(\psi)$ stetig auf B_2 für alle $\psi \in \Psi$. Die Aussage folgt dann durch gleichmäßige Approximation. $\square$

Beweis von Prop. 3.27: 1) Sei B_1 eine abzählbare, dichte Teilmenge von $[0,T]$. Aufgrund der Massenschranke, Lemma 3.9, und des Kompaktheitssatzes für Radonmaße können wir eine Teilfolge $(\mu_t^{\varepsilon'_i})_{i \geqslant 1}$ und ein Radonmaß μ'_t auf $\Omega \times \mathbb{R}$ finden, so dass $\mu_t^{\varepsilon'_i} \rightharpoonup \mu'_t$ im Sinne von Radonmaßen. Indem wir sukzessive Teilfolgen auswählen und zu einer Diagonalfolge übergehen, können wir eine einzige Teilfolge, wieder bezeichnet mit $\{\mu_t^{\varepsilon'_i}\}_{i \geqslant 1}$, auswählen, sodass

$$\mu_t^{\varepsilon'_i} \rightharpoonup \mu'_t \;\; \text{für alle } t \in B_1 \; .$$

Da die Flächen $N_t^{\varepsilon'_i}$ auf $\Omega \times \mathbb{R}$ den H^k-Fluss glatt lösen, erhalten wir aus den Evolutionsgleichungen, Korollar 2.4 für $\phi \in C^1_c(\Omega \times \mathbb{R})$, $\phi \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\big(\mu_t^{\varepsilon'_i}(\phi)\big) &= -\int \langle \nabla\phi, \nu \rangle H^k \, d\mu_t^{\varepsilon'_i} - \int \phi H^{k+1} \, d\mu_t^{\varepsilon'_i} \\ &\leqslant C(|\nabla\phi|) \int_{\{\phi > 0\}} H^k \, d\mu_t^{\varepsilon'_i} \; . \end{aligned}$$

Wir setzen

$$f_\phi^{\varepsilon'_i}(t) := C(|\nabla\phi|) \int_0^t \int_{\{\phi>0\}} H^k \, d\mu_\tau^{\varepsilon'_i} \, d\tau \ .$$

Dann ist $\mu_t^{\varepsilon'_i}(\phi) - f_\phi^{\varepsilon'_i}(t)$ monoton fallend mit $f_\phi^{\varepsilon'_i}(0) = 0$. Nach (28) sind die $f_\phi^{\varepsilon'_i}(t)$ gleichmäßig in $C^{0,\frac{1}{k+1}}([0,T])$ beschränkt für alle i. Damit können wir eine Teilfolge auswählen, so dass

$$f_\phi^{\varepsilon'_i} \to f_\phi$$

gleichmäßig auf $[0,T]$. Insbesondere ist $\mu'_t(\phi) - f_\phi(t)$ monoton fallend für alle $t \in B_1$.

2) Für $t \in [0,T] \setminus B_1$ sei $(\mu_t^{\varepsilon'_j})_{j\geqslant 0}$ eine konvergente Teilfolge von $(\mu_t^{\varepsilon'_i})_{i\geqslant 0}$, abhängig von t. Wir definieren das Radonmaß μ'_t durch

$$\mu'_t := \lim_{j\to\infty} \mu_t^{\varepsilon'_j} \ .$$

Damit ist μ'_t definiert für alle $t \in [0,T]$. Indem wir für $t \in [0,T] \setminus B_1$ Schritt 1) auf $B_1 \cup \{t\}$ anwenden, erhalten wir, dass

$$\mu'_t(\phi) - f_\phi(t)$$

monoton fallend ist auf $[0,T]$ für alle $\phi \in C_c^1(\Omega\times\mathbb{R};\mathbb{R}^+)$. Wegen Lemma 3.28 existiert damit eine Teilmenge $B_2 \subset [0,T]$, $[0,T] \setminus B_2$ abzählbar, so dass μ'_t stetig ist für $t \in B_2$. Für diese t ist μ'_t eindeutig bestimmt, unabhängig von der Teilfolge (ε'_j), die für dieses t ausgewählt wurde. Folglich konvergiert die gesamte Folge

$$\mu_t^{\varepsilon'_i} \rightharpoonup \mu'_t \quad \text{für } t \in B_2.$$

Da $[0,T] \setminus B_2$ abzählbar ist, können wir weitere Teilfolgen auswählen und diagonalisieren, um eine einzige Teilfolge zu erhalten, wieder bezeichnet mit $(\varepsilon'_i)_{i\geqslant 1}$, so dass $\lim_{i\to\infty} \mu_t^{\varepsilon'_i}$ für alle $t \in [0,T]$ existiert. Indem wir für $t \in [0,T] \setminus B_2$ die alten Maße μ'_t durch diese neuen ersetzen, folgt:

$$\mu_t^{\varepsilon'_i} \rightharpoonup \mu'_t \ \text{ für alle } t \in [0,T] \ ,$$

$$\mu'_t(\phi) - f_\phi(t) \ \text{ ist monoton fallend auf } [0,T]$$

für $\phi \in C_c^1(\Omega\times\mathbb{R};\mathbb{R}^+)$.

3) Nach Lemma 3.10 ist für $K' = \Omega \times [0,1]$

$$\int_0^T \int_{K'} |H_t^{\varepsilon'_i}|^{k+1} \, d\mu_t^{\varepsilon'_i} \, dt \leqslant C(|\Omega|, |\partial\Omega|) \ . \tag{45}$$

Und so ist nach dem Lemma von Fatou

$$\liminf_{\varepsilon_i' \to 0} \int_{K'} |H_t^{\varepsilon_i'}|^{k+1} \, d\mu_t^{\varepsilon_i'} < \infty \tag{46}$$

für alle $t \in B_3 \subset [0,T]$, $\mathcal{L}^1([0,T] \setminus B_3) = 0$. Indem wir die Flächen $N_t^{\varepsilon_i'}$ als Varifaltigkeiten $V_t^i := V(N_t^{\varepsilon_i'}, 1)$ auffassen, erhalten wir aus (46) mit Hilfe der Hölder-Ungleichung und der Massenschranke, dass für jedes $t \in B_3$ eine Teilfolge $(V_t^j)_{j \geqslant 1}$, abhängig von t existiert, so dass die totale Variation auf dieser Teilfolge gleichmäßig beschränkt bleibt:

$$\sup_{j \geqslant 0} |\delta V_t^j| < \infty \; .$$

Zusammen mit der Massenschranke folgt dann aus dem Kompaktheitssatz von Allard für integer $n+1$-rektifizierbare Varifaltigkeiten, vergleiche [Ilm94], die Existenz einer Teilfolge $(V_t^{j'})$ mit

$$V_t^{j'} \to V_t' \tag{47}$$

im Sinne von Varifaltigkeiten auf K'. Ferner ist V_t' wieder integer $n+1$-rektifizierbar. Zusätzlich konvergieren nach diesem Satz auch die den Varifaltigkeiten zugeordneten Radonmaße auf K', und so ist $\mu_{V_t'} = \mu_t'$. Wegen (47) und der Unterhalbstetigkeit der totalen ersten Variation ist

$$|\delta V_t'| \ll \mu_t' \; ,$$

und so besitzt V_t' nach dem Differentiationssatz für Radonmaße eine verallgemeinerte mittlere Krümmung H_t'. Da aber (47) auch aussagt , dass

$$\int \langle \varphi, H_t^{\varepsilon_j'} \rangle \, d\mu_t^{\varepsilon_j'} \to \int \langle \varphi, H_t' \rangle \, d\mu_t'$$

für $\varphi \in C^0(K'; \mathbb{R}^{n+2})$, folgt mit [Hut86] aus der Konvexität von $|x|^{k+1}$:

$$\int_{K'} |H_t'|^{k+1} \, d\mu_t' \leqslant \liminf_{\varepsilon_i' \to 0} \int_{K'} |H_t^{\varepsilon_i'}|^{k+1} \, d\mu_t^{\varepsilon_i'} \; .$$

Wieder mit dem Lemma von Fatou sieht man mit Hilfe von (45):

$$\int_0^T \int_{\Omega \times [0,1]} |H_t'|^{k+1} \, d\mu_t' dt \leqslant \liminf_{\varepsilon_i' \to 0} \int_0^T \int_{\Omega \times [0,1]} |H_t^{\varepsilon_i'}|^{k+1} \, d\mu_t^{\varepsilon_i'} dt \leqslant C(|\Omega|, |\partial\Omega|) \; .$$

□

Wir wollen nun eine Verbindung herstellen zwischen der Familie von Radonmaßen $\{\mu_t'\}_{0 \leqslant t \leqslant T}$ und der Familie von Reduzierten Rändern $\{\partial^* E_t'\}_{0 \leqslant t \leqslant T}$. Dazu bilden die folgenden beiden Lemmata den ersten Schritt.

Lemma 3.29 *Sei $(\mu'_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ die in Proposition 3.27 konstruierte Familie von Radonmaßen. Es ist*

$$supp(\mu'_t) \subset \{U = t\}$$

für alle $t \in [0, T]$.

Beweis: Sei $t \in [0,T]$ und $x \notin \{U = t\}$. O.B.d.A sei $U(x) > t$. Dann existiert $\delta > 0$, sodass $B_\delta(x) \Subset \{U > t\}$. Inbesondere existiert $\eta > 0$ mit $U\big|_{B_\delta(x)} \geqslant t + \eta$. Da $U^{\varepsilon_i} \to U$ lokal gleichmäßig konvergiert, existiert $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $U^{\varepsilon_i}\big|_{B_\delta(x)} \geqslant t + \frac{\eta}{2}$ für alle $i \geqslant N_0$. Es ist $N_t^{\varepsilon_i} \cap B_\delta(x) = \emptyset$ für alle $i \geqslant N_0$ und damit

$$\mu_t^{\varepsilon_i}\big(B_\delta(x)\big) = 0 \ .$$

Daraus folgt direkt, dass $x \notin \mathrm{supp}(\mu'_t)$. □

Lemma 3.30 *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, U offen und beschränkt, $f \in C^{0,1}(\overline{U})$. Für $F_t := \{f > t\}$ und $F_t^+ := \{f(x) = t\}$ ist dann $\partial^* F_t \subset F_t^+$ und für fast alle t auch*

$$\mathcal{H}^n(F_t^+ \setminus \partial^* F_t) = 0 \ .$$

Beweis: Sei $\|f\|_\infty \leqslant T$. Da $C^{0,1}(\overline{U}) \subset BV(U)$ erhalten wir aus der Koflächenformel für BV-Funktionen, vergleiche [EG92]:

$$\|Df\|(U) = \int_{-T}^{T} \mathcal{H}^n(\partial^* F_t)\, dt \ . \tag{48}$$

Da $f \in C^{0,1}(\overline{U}) \subset H^{1,\infty}(U)$ ist, gilt

$$\|Df\|(U) = \int_U |Df|\, dx < \infty \ .$$

Die Koflächenformel für Lipschitzfunktionen sagt aber andererseits, dass

$$\int_U |Df|\, dx = \int_{-T}^{T} \mathcal{H}^n(F_t^+)\, dt \ . \tag{49}$$

Da allgemein für Caccioppoli-Mengen gilt, dass $\partial^* F_t \subset \partial F_t$, ist auch $\partial^* F_t \subset F_t^+$. Damit ergibt (48) und (49):

$$\int_{-T}^{T} \mathcal{H}^n(F_t^+ \setminus \partial^* F_t)\, dt = 0 \ ,$$

womit die Behauptung bewiesen wäre. □

Nun ist es möglich zu zeigen:

Lemma 3.31 *Für alle $t \in B_4 \subset B_3$, mit $\mathcal{L}^1([0,T] \setminus B_4) = 0$ können wir die Varifaltigkeiten V'_t schreiben als*

$$V'_t = V(\partial^* E'_t, \theta_t) = V(\{U = t\}, \theta_t) \ ,$$

wobei $\theta_t \geqslant 1$ $\mathcal{H}^{n+1}$-fast überall auf $\{U = t\}$.

Beweis: Nach Lemma 3.30 ist für fast alle $t \in B_3$

$$\mathcal{H}^{n+1}(\{U = t\} \setminus \partial^* E'_t) = 0 \ .$$

Wir wählen solch ein t. Wegen Lemma 3.12 und Theorem 3.13 konvergiert $E_t^{\varepsilon_i} \to E'_t$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R})$. Aufgrund der Unterhalbstetigkeit des BV-Maßes unter L^1_{loc}-Konvergenz folgt im Limes

$$\mathcal{H}^{n+1} \llcorner \partial^* E'_t \leqslant \mu'_t \ , \tag{50}$$

im Sinne von Radonmaßen. Folglich ist $\text{supp}(\mathcal{H}^{n+1} \llcorner \partial^* E'_t) \subset \text{supp}(\mu'_t)$. Nach Lemma 3.29 ist $\text{supp}\mu'_t \subset \{U = t\}$. Allgemein ist für Caccioppoli-Mengen $\partial^* F \subset \text{supp}(\mathcal{H}^{n+1} \llcorner \partial^* F)$. Da aber $\mathcal{H}^{n+1}(\{U = t\} \setminus \partial^* E'_t) = 0$, ist somit

$$\text{supp}(\mu'_t) = \{U = t\} \quad \mathcal{H}^{n+1} - \text{fast überall} \ .$$

Nach (50) ist

$$\frac{|\partial^* E'_t \cap B_\rho(x)|}{\omega_{n+1}\rho^{n+1}} \leqslant \frac{\mu'_t(B_\rho(x))}{\omega_{n+1}\rho^{n+1}}$$

für alle $B_\rho(x) \subset \Omega \times \mathbb{R}$, $\omega_{n+1} = \text{Vol}(B_1^{n+1}(0))$. Da die $n+1$-dimensionale Dichte $\Theta^{n+1}_{\partial^* E'_t}(x) = 1$ ist für alle $x \in \partial^* E'_t$, ist damit auch

$$\Theta^{n+1}_{\mu'_t}(x) \geqslant 1$$

für alle $x \in \partial^* E'_t$, soweit die Dichte existiert. Da $\Theta^{n+1}_{\mu'_t}(x) = \theta_t(x)$ μ'_t-fast überall, ist das Lemma bewiesen. □

Die Eigenschaft, dass die Mengen E_t^ε minimierend von außen sind, liefert nun eine obere Dichteschranke für die Maße μ_t.

Lemma 3.32 (Dichteschranke) *Sei $B_\rho(x) \Subset \Omega \times \mathbb{R}$. Dann ist*

$$\frac{\mu'_t\big(\overline{B}_\rho(x)\big)}{\omega_{n+1}\rho^{n+1}} \leqslant (n+2)\frac{\omega_{n+2}}{\omega_{n+1}}$$

für alle $t \in [0,T]$.

Beweis: Sei $t \in [0,T]$ und $\mu_t^{\varepsilon'_i} \rightharpoonup \mu'_t$. Dann ist

$$\mu'_t(B_\rho(x)) \leqslant \liminf_{i\to\infty} \mu_t^{\varepsilon'_i}(B_\rho(x)) \ . \tag{51}$$

Da $\mu_t^{\varepsilon'_i}(B_\rho(x)) = |\partial^* E_t^{\varepsilon_i} \cap B_\rho(x)|$ und die $E_t^{\varepsilon_i}$ nach Lemma 3.8 minimierend von außen sind, folgt durch Vergleich mit $E_t^{\varepsilon_i} \cup B_\rho(x)$:

$$\mu_t^{\varepsilon'_i}(B_\rho(x)) \leqslant (n+2)\omega_{n+2}\rho^{n+1} \ .$$

Aus (51) folgt damit für $\rho' = \rho + \varepsilon$:

$$\mu'_t(\overline{B}_\rho(x)) \leqslant \mu'_t(B_{\rho'}(x)) \leqslant (n+2)\omega_{n+2}(\rho')^{n+1}$$

und im Limes $\varepsilon \to 0$ die Behauptung. $\square$

Da die Eigenschaft

$$|DU^{\varepsilon_i}| \rightharpoonup |DU|$$

heuristisch garantiert, dass sich für fast alle t im Limes die Flächen $N_t^{\varepsilon_i} \to N_t$ nicht "übereinanderlegen"oder "übereinanderfalten", können wir zeigen, dass

$$\theta_t = 1 \ \ \mathcal{H}^{n+1} - \text{fast überall auf } \partial^* E'_t$$

für fast alle t.

Lemma 3.33 *Für fast alle $t \in B_4$ ist $\theta_t = 1$, $\mathcal{H}^n$-fast überall auf $\{U = t\}$, beziehungsweise $\partial^* E'_t$.*

Beweis: Sei $K' = \Omega \times [0,1]$ und für $U^{\varepsilon_i} \to U$:

$$T_j^+ := \sup_{K'} U^{\varepsilon_i} \ , \quad T_j^- := \inf_{K'} U^{\varepsilon_i} \ .$$

Nach (36) gilt für $\phi \in C_c^0(K')$:

$$\int \phi |DU^{\varepsilon_i}| \, dx \to \int \phi |DU| \, dx \ . \tag{52}$$

Mit Proposition 3.27 sieht man aber auch, dass

$$\lim_{i\to\infty} \int \phi |DU^{\varepsilon'_i}| \, dx = \lim_{i\to\infty} \int_{T_i^-}^{T_i^+} \mu_t^{\varepsilon'_i}(\phi) \, dt = \int_0^T \mu'_t(\phi) \, dt \ . \tag{53}$$

Aus (52) und (53) folgt dann mit $\phi_i \nearrow \chi_{K'}$:

$$\int_0^T \mu'_t(K') \, dt = \int_{K'} |DU| \, dx = \int_0^T |\partial^* E'_t \cap K'| \, dt \ .$$

Da jedoch $\mu'_t(K') \geqslant |\partial^* E'_t \cap K'|$ für alle $t \in [0,T]$, ist $\mu'_t(K') = |\partial^* E'_t \cap K'|$ für fast alle $t \in [0,T]$. Damit ist nach Lemma 3.31 $\theta_t = 1$ $\mathcal{H}^{n+1}$-fast überall auf $\partial^* E'_t$ für solche t. $\square$

Bemerkung 3.34 Indem man ausnützt, dass die Mengen $E_t^{\varepsilon_i}$ minimierend von außen sind, ist es mit einem Vergleichsargument möglich, auch ohne (36) zu zeigen, dass $\theta_t = 1$ $\mathcal{H}^{n+1}$-fast überall auf $\{U = t\}$ für fast alle $t \in B_4$. Da dies impliziert, dass

$$\mu_t'(\phi) = \int_{\partial^* E_t'} \phi \, d\mathcal{H}^{n+1}$$

für alle $\phi \in C_c^0(\Omega\times\mathbb{R})$ und fast alle $t \in [0,T]$, können wir mit Hilfe der Konvergenz von $\{\mu_t^{\varepsilon_i'}\}_{0\leqslant t\leqslant T} \rightharpoonup \{\mu_t'\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ folgern, dass

$$|DU^{\varepsilon_i}| \rightharpoonup |DU|$$

im Sinne von Radonmaßen auf $\Omega\times\mathbb{R}$. Da $|DU^{\varepsilon_i}|, |DU| \leqslant C$ für alle i, sieht man mit der Kompaktheit in schwach$-*$ $L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})$, dass

$$|DU^{\varepsilon_i}| \rightharpoonup |DU| \ \text{ schwach} - * \text{ in } L^\infty(\Omega\times\mathbb{R}),$$

womit auch die Ergebnisse von Lemma 3.22, Proposition 3.23 und Theorem 3.25 folgen würden.

Zusammen mit dem Regularitätstheorem von Allard erhalten wir als ein abschließendes Resultat dieses Abschnitts:

Theorem 3.35 (Regularität) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega$ glatt und $H(\partial\Omega) > \delta_0 > 0$. Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}^+$, mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$ und $\sup u = T$, die in diesem Kapitel konstruierte Superlösung zu $(\star)$. Es sei $\Gamma_t := \{u = t\}$. Dann existiert eine Menge $B \subset [0,T]$ mit $\mathcal{L}^1([0,T] \setminus B) = 0$, so dass für alle $t \in B$ gilt:*

i)

$$\Gamma_t = \partial^*\{u > t\} \quad \mathcal{H}^n - \textit{fast überall} \ . \tag{54}$$

ii) Die Varifaltigkeiten $V_t := V(\Gamma_t, 1)$ besitzen eine verallgemeinerte mittlere Krümmung

$$H_t \in L^{k+1}_{loc}(\Gamma_t; \mathbb{R}^{n+1}) \tag{55}$$

und es ist

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega |H_t|^{k+1} \, d\mu_t \, dt \leqslant \mathcal{H}^n(\partial\Omega) \ . \tag{56}$$

iii) Für $k > n-1$ sind die Flächen Γ_t bis auf eine abgeschlossene Menge $A_t \subset \Gamma_t$ mit $\mathcal{H}^n(A_t) = 0$ lokal in $C^{1,1-\frac{k+1}{n}}$.

Beweis: (i) Wegen $\Gamma_t \times \mathbb{R} = \{U = t\}$ folgt diese Aussage direkt aus Lemma 3.31.

(ii) Aus (i), Lemma 3.33, Lemma 3.31 und Proposition 3.27 sehen wir, dass die Varifaltigkeit $V'_t := V(\Gamma_t \times \mathbb{R}, 1)$ für fast alle t eine verallgemeinerte mittlere Krümmung H'_t mit

$$\int_{\Omega \times [0,1]} |H'_t|^{k+1} d\mu'_t < \infty$$

besitzt. Aufgrund der Translationssymmetrie ist dann

$$H'_t(x') = H_t(x) \tag{57}$$

mit $x' = (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}$, $\mathcal{H}^{n+1}-$fast überall auf $\Gamma_t \times \mathbb{R}$ und $H_t(x) : \Gamma_t \to \mathbb{R}^{n+1}$. Damit hat die Varifaltigkeit $V_t := V(\Gamma_t, 1)$ die verallgemeinerte mittlere Krümmung $H_t(x)$, und es ist

$$\int_{\Omega \times [0,1]} |H_t|^{k+1} d\mu_t < \infty \ .$$

Dies zeigt (55).
Analog wie in Lemma 3.10 können wir zeigen, dass für $K' := \Omega \times [-l, l]$ mit $T_j^+ := \sup_{K'} U^{\varepsilon_i}$ und $T_j^- := \inf_{K'} U^{\varepsilon_i}$ gilt

$$\int_{T_j^-}^{T_j^+} \int_{\Omega \times [-l,l]} |H_t^{\varepsilon'_i}|^{k+1} \, d\mu_t^{\varepsilon'_i} dt \leqslant 2l \ \mathcal{H}^n(\partial\Omega) + 2\mathcal{H}^{n+1}(\Omega) \ .$$

Damit folgt aus der Unterhalbstetigkeit von $\int |H_t^{\varepsilon'_i}|^{k+1} \, d\mu_t^{\varepsilon'_i}$ im Limes $\varepsilon'_i \to 0$

$$\int_0^T \int_{K'} |H'_t|^{k+1} \, d\mu'_t \, dt \leqslant 2l \ \mathcal{H}^n(\partial\Omega) + 2\mathcal{H}^{n+1}(\Omega) \ .$$

Mit (57) folgt dann (56) aus $l \to \infty$.

(iii) Da wir V_t für fast alle t bis auf $\mathcal{H}^n$-Maß null mit $\partial^* E_t$ identifizieren können, existiert nach dem Struktursatz für Caccioppoli-Mengen, vergleiche [Sim83], für alle $x \in \partial^* E_t$ die Dichte $\Theta^n_{V_t}(x)$ mit

$$\Theta^n_{V_t}(x) = 1 \ . \tag{58}$$

Nach (56) ist für alle $t \in B$

$$\int_{\Omega} |H_t|^{k+1} \, d\mu_t < \infty \ .$$

Damit ist das Regularitätstheorem von Allard, siehe [Sim83], anwendbar, und wir erhalten, dass wir Γ_t in einer Umgebung eines Punktes x, der (58) erfüllt, als Graph einer $C^{1,1-\frac{k+1}{n}}$-Funktion über dem Tangentialraum in x schreiben können. □

Als eine weitere Konsequenz aus dem Variationsprinzip für J_u lässt sich zeigen:

Proposition 3.36 *Für $t_1, t_2 \in [0,T],\ t_1 < t_2$ ist*

$$|\partial^* E_{t_2}| + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |H_t|^{k+1}\, d\mu_t\, dt \leqslant |\partial^* E_{t_1}|\ . \tag{59}$$

Beweis: Seien $t^-, t^+ \in B,\ t^- < t^+$. Dann ist für $l > 0$

$$F_i := E_{t^+}^{\varepsilon_i'} \cup \left(E_{t^-}^{\varepsilon_i'} \cap (\Omega \times [-l,l])\right)$$

eine äußere Vergleichsmenge zu $E_{t^+}^{\varepsilon_i'}$. Da $E_{t^+}^{\varepsilon_i'}$ das Funktional $J_{U^{\varepsilon_i'}}$ von außen minimiert, erhalten wir mit $K := \Omega \times [-l-1, l+1]$:

$$\begin{aligned} |\partial^* F_i \cap K| &\geqslant \int\limits_{(E_{t^-}^{\varepsilon_i'} \setminus E_{t^+}^{\varepsilon_i'}) \cap (\Omega \times [-l,l])} |DU^{\varepsilon_i'}|^{-\frac{1}{k}}\, dx + |\partial^* E_{t^+}^{\varepsilon_i'} \cap K| \\ &= \int_{t^-}^{t^+}\int_{\Omega\times[-l,l]} |H_t^{\varepsilon_i'}|^{k+1} d\mu_t^{\varepsilon_i'}\, dt + |\partial^* E_{t^+}^{\varepsilon_i'} \cap K|\ . \end{aligned}$$

Da mit $K' := \Omega \times [-l,l]$

$$|\partial^* F_i \cap K| - |\partial^* E_{t^+}^{\varepsilon_i'} \cap K| \leqslant |\partial^* E_{t^-}^{\varepsilon_i'} \cap K'| - |\partial^* E_{t^+}^{\varepsilon_i'} \cap K'| + 2\mathcal{H}^{n+1}(\Omega)$$

gilt, folgt im Limes $\varepsilon_i' \to 0$:

$$\mu'_{t^+}(K') + \int_{t^-}^{t^+}\int_{K'} |H'_t|^{k+1} d\mu'_t\, dt \leqslant \mu'_{t^-}(K') + 2\mathcal{H}^{n+1}(\Omega)\ .$$

Indem wir durch $2l$ teilen, folgt daraus, dass

$$|\partial^* E_{t^+}| + \int_{t^-}^{t^+}\int_\Omega |H_t|^{k+1} d\mu_t\, dt \leqslant |\partial^* E_{t^-}| + \frac{1}{l}\mathcal{H}^{n+1}(\Omega)\ .$$

Aus $l \to \infty$ ergibt sich (59) für t^-, t^+. Für beliebige $t_1, t_2 \in [0,T],\ t_1 < t_2$ wählen wir Folgen $(t_j^+), (t_j^-) \subset B$ mit $t_j^- \searrow t_1$ und $t_j^+ \nearrow t_2$. Da die Mengen E_τ für alle $\tau \in [0,T]$ minimierend von außen sind, ist

$$|\partial^* E_{t_2}| \leqslant |\partial^* E_{t_j^+}| \quad \text{und} \quad |\partial^* E_{t_j^-}| \leqslant |\partial^* E_{t_1}|\ .$$

Die Gleichung (59) folgt dann aus $j \to \infty$. □

Für den glatten H^k-Fluß im ersten Kapitel konnten wir zeigen, dass das Minimum der mittleren Krümmung $H_{\min}(t) := \min_{M_t} H$ monoton steigend ist. Damit ist insbesondere $H_{\min}(t) \geqslant \delta_0 > 0$ für alle t.

Eine entsprechende untere Schranke an die mittlere Krümmung für den schwachen Fluß können wir für den Fall $k > n-1$ zeigen. Dafür ist noch zu klären, was wir hierbei unter einer unteren Schranke an die mittlere Krümmung verstehen, da für Varifaltigkeiten nur der mittlere Krümmungsvektor definiert ist. Nach einem Resultat von Brakke, [Bra78] §5.8, ist für eine integer n-rektifizierbare Varifaltigkeit V mit lokal beschränkter totaler Variation

$$H(x) \| \nu(x) \qquad \mu_V - \text{fast überall.}$$

Damit können wir eine untere Schranke an H definieren als

$$\langle -H(x), \nu(x) \rangle \geqslant \eta_0 > 0 \ ,$$

μ_V-fast überall.

Proposition 3.37 *Sei $k > n-1$. Dann ist für ein $\eta_0 > 0$*

$$\langle -H_t(x), \nu_t(x) \rangle \geqslant \eta_0 > 0 \ ,$$

für alle $t \in B$ $\mathcal{H}^n$-fast überall auf Γ_t.

Beweis: Sei $t \in B$ und $x \in \partial^* E_t$. Dann ist nach Theorem 3.35 Γ_t in einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ von x eine $C^{1,1-\frac{n}{k+1}}$-Hyperfläche. Indem wir, falls notwendig, U etwas verkleinern, können wir das äußere Normalenvektorfeld an $\Gamma_t \cap U$ zu einem stetigen Vektorfeld X auf U fortsetzen mit $X\big|_{\Gamma_t} = \nu_t$. Sei $X_\varepsilon \in C^1(U; \mathbb{R}^{n+1})$ eine differenzierbare Approximation von X mit $|X - X_\varepsilon| \leqslant \varepsilon$ auf U.

Sei $\varphi \in C^1_c(U)$, $\varphi \geqslant 0$. Wir betrachten die Familie von Abbildungen

$$G_\tau : U \to U : x \mapsto x + \tau\varphi X_\varepsilon$$

für $\tau \in [0,\delta]$. Für hinreichend kleines δ sind alle Abbildungen G_τ Diffeomorphismen. Wir definieren die Mengen

$$F_\tau := (E_t \setminus U) \cup (G_\tau(E_t \cap U)) \ .$$

Dann ist für hinreichend kleines ε $E_t \subset F_\tau$, sowie $(F_\tau \setminus E_t) \Subset U$ für alle $\tau \in [0,\delta]$. Wegen $|Du|^{-\frac{1}{k}} \geqslant \eta_0 > 0$ erhalten wir aus Theorem 3.25:

$$\begin{aligned} |\partial^* F_\tau \cap U| &\geqslant \int_{F_\tau \setminus E_t} |Du|^{-\frac{1}{k}}\, dx + |\partial^* E_t \cap U| \\ &\geqslant \eta_0 \operatorname{Vol}(F_\tau \setminus E_t) + |\partial^* E_t \cap U| \ . \end{aligned}$$

Da die Funktionen $|\partial^* F_\tau \cap U|$ und $\operatorname{Vol}(F_\tau \setminus E_t)$ differenzierbar in τ sind, sieht man, dass

$$\frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} |\partial^* F_\tau \cap U| \geqslant \eta_0 \frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} \operatorname{Vol}(F_\tau \setminus E_t) \ .$$

Mit dem Transformationssatz erhalten wir

$$\mathrm{Vol}(F_\tau \cap U) = \int_{U\cap E_t} |\det(DG_\tau)|\, dx \ .$$

Aus $DG_\tau = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}} + \tau D(\varphi X_\varepsilon)$ folgt nun

$$\det(DG_\tau) = 1 + \tau\ \mathrm{tr}\big(D(\varphi X_\varepsilon)\big) + O(\tau^2).$$

Es ergibt sich mit dem Divergenzsatz, dass

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} \mathrm{Vol}(F_\tau \setminus E_t) = \frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} \mathrm{Vol}(F_\tau \cap U) &= \int_{E_t\cap U} \mathrm{tr}\big(D(\varphi X_\varepsilon)\big)\, dx \\ &= \int_{E_t\cap U} \mathrm{div}(\varphi X_\varepsilon)\, dx = \int_{\Gamma_t} \varphi\langle X_\varepsilon, \nu\rangle\, d\mu_t \ ,\end{aligned}$$

da $\varphi = 0$ auf ∂U. Nach der ersten Variationsformel für rektifizierbare Varifaltigkeiten, siehe [Sim83], folgt für den anderen Term:

$$\frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} |\partial^* F_\tau \cap U| = \int_{\Gamma_t} \mathrm{div}_{\Gamma_t}(\varphi X_\varepsilon)\, d\mu_t = -\int_{\Gamma_t} \varphi\langle X_\varepsilon, H_t\rangle\, d\mu_t \ .$$

Insgesamt sehen wir, dass

$$\int_{\Gamma_t} \varphi\langle X_\varepsilon, -H_t\rangle\, d\mu_t \geqslant \eta_0 \int_{\Gamma_t} \varphi\langle X_\varepsilon, \nu\rangle\, d\mu_t \ .$$

Dies liefert im Limes $\varepsilon \to 0$:

$$\int_{\Gamma_t} \varphi\langle -H_t, \nu_t\rangle\, d\mu_t \geqslant \eta_0 \int_{\Gamma_t} \varphi\, d\mu_t \ ,$$

für alle $\varphi \in C^1_c(U),\ \varphi \geqslant 0$, womit die Behauptung bewiesen ist. $\square$

Literatur

[AC79] S.M. Allen and J.W. Cahn. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening. *Acta Metallurgica*, 27:1085–1095, 1979.

[And94] B. Andrews. Contraction of convex hypersurfaces in Euclidian space. *Calc. Var.*, 2:151–171, 1994.

[Bra78] K. Brakke. *The Motion of a Surface by its Mean Curvature.* Princeton Univ. Press, 1978.

[CGG91] Y.G. Chen, Y. Giga, and S. Goto. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. *J. Diff. Geom.*, 33:749–786, 1991.

[Die02] S. Dieter. *Krümmungsabschätzungen für degenerierte, nichtlineare geometrische Evolutionsgleichungen.* PhD thesis, Universität Tübingen, 2002.

[EG92] L.C. Evans and R.F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* CRC Press, 1992.

[EH89] K. Ecker and G. Huisken. Mean curvature evolution of entire graphs. *Ann. Math. (2)*, 130(3):453–471, 1989.

[EH91] K. Ecker and G. Huisken. Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature. *Invent. Math.*, 105(3):547–569, 1991.

[ES91] L.C. Evans and J. Spruck. Motion of level-sets by mean curvature I. *J. Diff. Geom.*, 33:635–681, 1991.

[ES92] L.C. Evans and J. Spruck. Motion of level-sets by mean curvature III. *J. Geom. Anal.*, 2(2):121–150, 1992.

[ES95] L.C. Evans and J. Spruck. Motion of level-sets by mean curvature IV. *J. Geom. Anal.*, 5(1):77–114, 1995.

[GH86] M.E. Gage and R.S. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. *J. Diff. Geom.*, 23:69–96, 1986.

[Giu84] E. Giusti. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation.* Birkhäuser, 1984.

[Gra87] M.A. Grayson. The heat equation shrinks embedded plane curves to points. *J. Diff. Geom.*, 26:285–314, 1987.

[GT83] D. Gilbarg and N. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd ed.* Springer, New York, 1983.

[Ham82] R. S. Hamilton. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Diff. Geom.*, 17:255–306, 1982.

[Ham94] R. S. Hamilton. Worn stones with flat sides, in 'A tribute to Ilya Bakelman'. *Discourses Math. Appl., Texas A& M Univ., College Station, TX*, 3:69–78, 1994.

[Hei01] M. Heidusch. *Zur Regularität des inversen mittleren Krümmungsflusses.* PhD thesis, Universität Tübingen, 2001.

[HI98] G. Huisken and T. Ilmanen. The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality. *Preprint SFB 382 Tübingen, Nr. 93*, 1998. To appear in JDG.

[HP96] G. Huisken and A. Polden. Geometric evolution equations for hypersurfaces. *Calc. of Var. and Geom. Evo. Probl., CIME Lectures of Cetraro, Springer*, 1996.

[HS99a] G. Huisken and C. Sinestrari. Convexity estimates for mean curvature flow and singularities of mean convex surfaces. *Acta Math.*, 183(1):45–70, 1999.

[HS99b] G. Huisken and C. Sinestrari. Mean curvature flow singularities for mean convex surfaces. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 8(1):1–14, 1999.

[Hui84] G. Huisken. Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres. *J. Diff. Geom.*, 20:237–266, 1984.

[Hui90] G. Huisken. Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow. *J. Diff. Geom.*, 31:285–299, 1990.

[Hut86] J.E. Hutchinson. Second fundamental form for varifolds and the existence of surfaces minimising curvature. *Ind. Univ. Math. J.*, 35(1):45–71, 1986.

[Ilm94] T. Ilmanen. Elliptic regularization and partial regularity for motion by mean curvature. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 108(520), 1994.

[Kry78] N. V. Krylov. *Nonlinear Elliptic and Earabolic Equations of Second Order.* D.Reidel, 1978.

[Lie96] G. M. Lieberman. *Second Order Parabolic Differential Equations.* World Scientific, 1996.

[Pas97] E. Pasch. The level set method for mean curvature flow on $(\mathbb{R}^3, g)$. *Preprint SFB 382 Tübingen Nr. 63*, 1997.

[Sim83] L. Simon. *Lectures on Geometric Measure Theory.* Centre for Mathematical Analysis, Australian National Unversity, 1983.

[Whi94] B. White. Partial regularity of mean-convex hypersurfaces flowing by mean curvature. *Intern. Math. Research Not.*, 4:185–192, 1994.

[Whi97] B. White. Stratification of minimal surfaces, mean curvature flows, and harmonic maps. *J. reine angew. Math.*, 488:1–35, 1997.