Flächen konstanter mittlerer Krümmung in asymptotisch hyperbolischen Mannigfaltigkeiten

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard–Karls–Universität Tübingen

vorgelegt von

Ralf Rigger

aus Rottenburg

betreut von

Prof. Dr. G. Huisken

Tübingen, im Dezember 1999

Selbstverlegt von:	Ralf Otto Rigger Frauengasse 8 72108 Rottenburg

Tag der mündlichen Prüfung:	20. Dezember 1999
Dekan:	Prof. Dr. W. Kaup
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. G. Huisken
2. Berichterstatter:	Priv. Doz. Dr. F. Loose

Zusammenfassung

Die Hamiltonsche Formulierung der Einsteinschen Feldgleichungen wird durch die Blätterung der zugrundeliegenden Lorentzmannigfaltigkeit in Zeitrichtung bewirkt. Dabei sind neben der Verwendung von Maximalflächen, welches die bevorzugte Eichung für numerische Untersuchungen darstellt, in asymptotisch flachen Mannigfaltigkeiten auch Blätterungen entlang des Lichtkegels für die Untersuchungen des Bondi-Massebegriffs interessant. Auf diesen asymptotisch hyperbolischen 3-Flächen werden 2-Flächen konsanter mittlerer Krümmung mit Hilfe des volumenerhaltenden mittleren Krümmungsflusses konstruiert. Diese sollen dazu dienen, eine geometrische Radiuskoordinate zu definieren.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung und Grundlagen

1.1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist in den Bereichen Differentialgeometrie, geometrische Evolutionsgleichungen und partiellen Differentialgleichungen angesiedelt. Die Grundidee und Motivation stammt dabei aus der allgemeinen Relativitätstheorie.

Die Naturwissenschaft sucht, unsere Erlebnisse zu ordnen und in ein logisches System zu bringen. Dabei ist die genaue Messung ebenso wichtig, wie die exakte Theorie, um die Dinge zu beschreiben, Vorhersagen zu treffen und deren Charakter zu erfassen. Seit Newton hat man in der Physik eine Theorie, welche es erlaubt, die Bewegung von Gestirnen in mathematisch übersichtlicher Weise zu beschreiben, Begriffe in angemessener Genauigkeit zu definieren und, sofern die hieraus resultierenden Gleichungen integriert werden können, den Zustand des Systems zu einem beliebigen Zeitpunkt zu berechnen. Hierbei sind die Begriffe Raum, Zeit, Masse und potentielle Energie absolute Größen, zu deren Angabe keine weiteren Bezugsinformationen notwendig sind. Oft werden, um Randbedingungen zu vermeiden, isolierte Systeme - wie das n-Körper-Problem - als zentrale Beispielklasse in Betracht gezogen. Da die Masse (Massendichte) immer einem Punkt zugeordnet ist und das Superpositionsprinzip gilt, ist der Begriff des Massezentrums klar definiert. In der Einsteinschen Theorie werden diese Begriffe aufgelöst und zu neuen Größen wie Ereignis oder Energie-Impuls zusammengefasst. Die

Gravitation wird nicht mehr aus Abstand und Masse der beteiligten Körper berechnet, sondern direkt in die Geometrie der Raumzeit eingebaut. Daher ist der Begriff des Massezentrums zunächst nicht mehr vorhanden, der geometrische Ort innerhalb dieser Raumzeit geht im allgemeinen verloren. Eine gebräuchliche Methode, um Begriffe der Newtonschen Physik in dieser Theorie wieder zu finden, ist die Aufspaltung der Weltereignisse in „zeitgleiche" Raumblätter. Im konkreten Fall kann man versuchen, einem Raumblatt eine Gesamtmasse (zu eben diesem Zeitpunkt) zuzuordnen. Zur Beschreibung von isolierten physikalischen Systemen werden oft asymptotisch flache, raumartige Hyperflächen verwendet. Eine weitere Klasse stellen die kosmologischen Raumzeiten dar, welche das gesammte Universum modellieren. Während Gerhardt [Ger83] für solche kosmologischen Raumzeiten, welche die zeitartige Konvergenzbedingung erfüllen, eine Blätterung durch raumartige Hyperflächen mit konstanter mittlerer Krümmung konstruiert, findet sich in [Bar84] das Analogon für asymptotisch flache Raumzeiten. Wir interessieren uns im Folgenden für isolierte Systeme. Ausgehend von Braake [Bra87] über Hamilton ([Ham82],[Ham86]) und Huisken [Hui84] wurden in den letzten Jahren verschiedene Flüsse auch in Lorentzmannigfaltigkeiten untersucht, um spezielle Blätterungen dieser Mannigfaltigkeiten zu finden (vgl. [EH91],[HY95]). Iteriert man diesen Prozess nun auf den einzelnen Blättern und betrachtet die Übergänge zwischen den Blättern, so hofft man hierdurch im Idealfall ein der Raumzeit angepasstes Koordinatensystem zu finden. Eine andere Anwendung von Evolutionsgleichungen für Krümmungsflüsse ist der Beweis der Penrose-Ungleichung durch Huisken und Ilmannen [HI98]. Hier wird der Fluss entlang der inversen mittleren Krümmung verwendet, und die Monotonieeigenschaften dieses Flusses für bestimmte Integralgrößen auszunutzen. In [HY95] definieren Huisken und Yau ein asymptotisch flaches Ende einer raumartigen Hyperfläche wie folgt:

Definition 1.1 *Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit* $(\mathbf{N}^{n+1}, g)$ *heißt asymptotisch flach, falls es eine zu* $\mathbb{R}^n \backslash B_{R_0}(\mathbf{O})$ *diffeomorphe Außenregion* ${\mathbf{N}^{n+1}}_E := \mathbf{N}^{n+1} \backslash B$ *(*B *kompakt) gibt, so dass für die Metrik in diesen Koordinaten mit* $r = \sum x_i^2$ *gilt:*

$$|g_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}| < \frac{c_0}{r}, \qquad |\partial g_{\alpha\beta}| < \frac{c_0}{r^2}$$

Das Hauptergebnis dieser Arbeit lässt sich so zusammenfassen:

Theorem 1.2 *(Huisken-Yau '95): „Wenn* $(\mathbf{N}^{n+1}, g)$ *asymptotisch flach ist und nahe genug bei Schwarzschild, sowie* $m > 0$*, dann existiert eine eindeutige, stabile Blätterung von* $(\mathbf{N}^{n+1}, g)$ *außerhalb der Region* $\mathbb{R}^n \backslash B_{R_0}(O)$ *von Flächen konstanter mittlerer Krümmung.„*

Des Weiteren ergeben sich aus dieser Arbeit neben dem Massezentrum für die ADM-Masse ([ADM61]) auch eine geometrische Radiuskoordinate (die mittlere Krümmung dieser Flächen) im Unendlichen.

Als entfernter Beobachter misst man jedoch die Ereignisse, welche entlang des Lichtkegels ihren Weg in die Messapperatur finden. Damit ist für den Vergleich von Messung und Theorie ein Raumblatt, welches sich an diesen Lichtkegel annähert, von großem Interesse. Flächen mit dieser Eigenschaft lassen sich aus dem Hyperboloid im Minkowski-Raum ableiten. Dahinter steht die Idee, dass das Standardmodell des hyperbolischen Raumes im Minkowski-Raum sich asymptotisch an den Lichtkegel annähert. Solche Flächen stehen also in derselben Beziehung zu „Null Infinity" wie die asymptotisch flachen zu „Spacial Infnity" (vgl.[HE73]). Der Massebegriff (und das zugehörige Massezentrum) ist in diesem Fall die von Bondi [BBM62] eingeführte Bondi-Masse. Diese Gedanken übertragen sich auf die Schwarzschild-Raumzeit wie folgt:

Das Längenelement der Schwarzschild-Metrik ist gegeben durch

$$ds^2 = -(1 - \frac{2m}{r})dt^2 + (1 - \frac{2m}{r})^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

wobei $d\Omega$ das Winkelelement ist, und $\Omega = (\phi, \theta)$ gilt. Die Entsprechung zum Lichtkegel im Minkowski Fall sind die Flächen, welche aus den Nullgeodäten mit Kurvenparameter s entstehen: $\gamma(s) := (s, r_*(s), \phi_0, \theta_0)$, mit $r_*(s) := s + 2m\ \ln(\frac{s}{2m} - 1)$ (vgl. [Wal84] S.152). Analog zum Standardmodell des hyperbolischen Raumes in $R^{1,n+1}$ ergibt sich für die Funktion $f : r \to \sqrt{1 + r_*(r)^2}$ die Metrik

$$ds^2 = \frac{1}{1+r^2}(1 - \frac{2m}{r})^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 = \frac{1}{1+r^2}(1 + \frac{2m}{r} + O(r^{-2}))dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Allgemeiner sind Graphen der Form $f(r) = r + 2mlog(r) + \frac{1-2m^2}{2r} + O(r^{-2})$ interessant. Die innere Geometrie dieser Flächen liegt also für große Radien beliebig nahe am hyperbolischen Raum. Ein weiterer Repräsentant dieser Klasse von Graphen ist die von Schoen und Yau in ihrer Arbeit über die Positivität der Bondimasse [SY82] verwendete Fläche. Sie führen dieses Resultat auf ihre berühmte Arbeit zur Positivität der ADM-Masse ([SY77a], [SY77b]) zurück. Hierzu verwenden sie folgenden Ansatz für das Abfallverhalten ihrer Metrik

$$g = \frac{1}{1+r^2}(1 + \frac{m}{r^3} + O(\frac{1}{r})^4)dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Sie stützen sich auf die Arbeit von Bondi und Sachs ([BBM62], [Sac62]).

In der vorliegenden Arbeit konstruieren wir auf diesem Ansatz basierend eine Blätterung konstanter mittlerer Krümmung einer asymptotisch hyperbolischen Mannigfaltigkeit analog zu [HY95]. Es wird die Bewegung kompakter, zur Sphäre diffeomorpher Hyperflächen unter dem volumenerhaltenden mittleren Krümmungsfluss untersucht.

Nachdem wir in diesem Abschnitt den Begriff asymptotisch hyperbolisch definiert haben, berechnen wir noch grundlegende Krümmungsgrößen, sowie einfache Abschätzungen an den zugelassenen Störterm. Interessante Fragen ergeben sich in diesem Zusammenhang durch die Tatsache, dass die in dieser Arbeit verwendete Metrik zwar wie die asymptotisch flachen Maximalblätter eine im Hauptterm konforme Metrik besitzt, der Ricci-Tensor sich aber nicht einfach als Summe aus dem Ricci-Tensor der hyperbolischen Geometrie und dem der Schwarzschild-Lösung zusammensetzt: $Ric^{HS} \neq Ric^{H} + Ric^{S}$. Es ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung zu lösen, um eine solche Metrik zu finden. Sollte es eine solche Metrik geben, dann wäre des Weiteren interessant zu klären, ob es in der Schwarzschild-Raumzeit ein Raumblatt mit dieser Eigenschaft gibt.

Im zweiten Abschnitt konstruieren wir für Flächen, welche homöomorph zur Sphäre sind, deren Eigenwerte der zweiten Fundamentalform punktweise nahe beieinander liegen und nicht allzu sehr variieren, einen approximativen Mittelpunkt. Wir erhalten damit eine geodätische Sphäre bester Approximation. Die Konstruktion lehnt sich an die Arbeit von Huisken und Yau [HY95] an. Entscheidende Unterschiede finden sich in der Geometrie durch die Tatsache, dass der „Hintergrundraum" in diesem Fall selbst eine Mannigfaltigkeit ist, und man daher alle nötigen Vektorraumstrukturen des $\mathbb{R}^n$ in geeigneter Weise durch Jakobifelder auf den hyperbolischen Raum verallgemeinern muss. Des Weiteren berechnen wir Abschätzungen für die Eigenwerte und damit die mittlere Krümmung dieser sphärischen Flächen.

Kapitel 3 behandelt geometrische Evolutionsgleichungen. Wir zeigen für die in Abschnitt 2 untersuchte Klasse von Flächen die Langzeitexistenz des volumenerhaltenden mittleren Krümmungsflusses

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F(p,t) &= (h - H)(p,t) \cdot \boldsymbol{\nu}(p,t) \qquad\qquad p \in \mathbf{S}^2 \\ F(p,0) &= F_0(p), \end{aligned}$$

mit H und $\boldsymbol{\nu}$ die mittlere Krümmung und äußere Normale und $h = \oint H$ die durchschnittliche mittlere Krümmmung auf $M_t := F(\cdot,t)$. Dieser Fluss verringert die Oberfläche von M_t, während das eingeschlossene Volumen konstant gehalten wird. Als Startfläche verwenden wir die Koordinatensphären des hyperbolischen Raumes. In der Analysis muss man beachten, dass die mittlere Krümmung einer Sphäre mit Radius R für $R \to \infty$ nicht gegen 0 sondern gegen $n-1$ läuft. Ein weiterer wichtiger Punkt ist die Tatsache, dass dadurch, dass Monopol- und Störterm und daher alle Ableitungen in Radialrichtung exponentiell abfallen, man zunächst nicht davon ausgehen kann, dass diese Terme wie im asymptotisch flachen Fall von kleinerer Ordnung sind. In den Evolutionsgleichungen treten jedoch lediglich Tangentialableitungen auf und da die Tangentialrichtungen der Hyperflächen ungefähr in Winkelrichtung der Polarkoordinaten zeigen, können diese beiden Probleme durch strengere Definition der invarianten Menge gelöst werden. Zu all dem benötigen wir, dass der approximative Mittelpunkt um eine Ordnung näher am „Massezentrum" des Raumblattes liegt, als dies im asymptotisch flachen Fall nötig ist. Für die Grenzflächen mit konstanter mittlerer Krümmung ergibt sich in [HY95] dann ebenfalls dieselbe Ordnung für diesen Abstand.

In Kapitel 4 berechnen wir noch den ersten Eigenwert des Jakobi-Operators auf diesen Flächen und zeigen damit die exponentielle Konvergenz zu Flächen konstanter mittlerer Krümmung.

Im Zusammenhang mit diesen theoretischen Arbeiten stehen numerische Untersuchungen im Rahmen des SFB 382 (Verfahren und Algorithmen zur Simulation physikalischer Prozesse auf Höchstleistungsrechnern), siehe [Pas97]. Des Weiteren wäre eine konkrete Berechnung durch numerische Verfahren und ein Vergleich mit dem asymptotisch flachen Fall interessant. Dadurch, dass die strukturellen Unterschiede überwunden werden konnten, gibt es Hoffnung, auch ein Massezentrum für diesen Bondi-Fall zu finden.

1.2 Notation

Die Metrik werden wir mit $g = \{g_{ij}\}$, die zweite Fundamentalform mit $A = \{h_{ij}\}$ bezeichnen. Wir werden stets die Summenkonvention verwenden, d.h. wir summieren über zwei sich wiederholende Indizes. Das Skalarprodukt zweier Tensoren ist die Kontraktion aller sich entsprechender Indizes mit Hilfe der Metrik:

$$< T_{ij}^k, S_{ij}^k >= g^{in} g^{jm} g_{kl} T_{ij}^k S_{nm}^l.$$

Die Norm eines Tensors ist die Wurzel aus dem Skalarprodukt des Tensors mit sich selbst. Wir bezeichnen mit H die mittlere Krümmung, und mit $|A|$ die Norm der zweiten Fundamentalform.

$$\begin{aligned} H &:= h_i^i = h_{ij} g^{ij} \\ |A|^2 &:= h_{ij} h^{ij} = h_{ij} h_{kl} g^{ik} g^{jl} \end{aligned}$$

Der Riemannsche Krümmungstensor ist gegeben durch:

$$R_{kijl}g^{kh}X^l = R^h_{ijl}X^l = \nabla_i\nabla_j X^h - \nabla_j\nabla_i X^h.$$

Die Gauß-Gleichungen haben die Form:

$$R_{ijkl} = \overline{R}_{ijkl} + h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}$$

Der Querstrich deutet immer die umgebende Mannigfaltigkeit an. Der Ricci-Tensor ist die Kontraktion über den zweiten und den vierten Index $R_{ij} = R_{injm}g^{nm}$. Mit Δ stellen wir den Laplace-Beltrami-Operator dar, d.h. die Spur der kovarianten Hessischen: $\Delta = g^{ij}\nabla_i\nabla_j$.

Wir werden das Minkowski-Raum-Modell des hyperbolischen Raumes verwenden. Dies ist der Graph der Funktion $f : r \to \sqrt{-\frac{1}{K} + r^2}$ also die Darstellung als Hyperboloid:

$$H^{n+1} := \{x \in R^{n+2} | |x| = -\frac{1}{K}, x_0 > 0\}, \qquad |x| := -x_0^2 + \Sigma x_i^2.$$

Dabei sind $\{x_i\}$ die kartesischen Koordinaten des Minkowski-Raumes $R^{1,n+1}$ und $K < 0$. Die auf H^{n+1} induzierte Metrik hat dann die Form

$$ds^2 = \frac{1}{1 - Kr^2}dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Dabei ist K die Schnittkrümmung von H^{n+1} und $d\Omega$ das Winkelelement. Ein Kreis mit dem Koordinatenradius r hat in der exakt hyperbolischen Metrik gerade den Umfang $2\pi r$ (das Oberflächenelement ist dasselbe wie in der euklidischen Metrik in Polarkoordinaten). Das heißt, dass in H^{n+1} für eine geodätische Sphäre $\mathbf{S}$ gilt

$$Umfang_H(\mathbf{S}) = 2\pi sinh(\sqrt{-K} Radius_H(\mathbf{S}))/\sqrt{-K},$$

denn

$$l(c) = \int_0^{r_0} \frac{1}{\sqrt{1 - Kr^2}} dr = areasinh(\sqrt{-K} r_0)/\sqrt{-K},$$

wobei c(t):=(t,0,0) ein Koordinatenstrahl in Radialrichtung ist. Ein Punkt der hyperbolischen Entfernung l vom Koordinatenursprung hat also die Radiuskoordinate

$$r = sinh(\sqrt{-K} l)/\sqrt{-K}.$$

Wir werden die Bezeichnung l immer für die geodätische Länge reservieren. Eine Sphäre mit Durchmesser πd, d.h. Radius $sinh^{-1}(d)$, wird immer als $\mathbf{S}_d$ bezeichnet. In der Arbeit werden wir die Radialkoordinate statt mit r mit d benennen, um klar hervorzuheben, dass diese Größe nicht den Radius sondern den Durchmesser einer Koordinatensphäre angibt.

1.3 Definition der Metrik

Definition 1.3 *Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit* $(\mathbf{N}^{n+1}, g)$ *heißt asymptotisch hyperbolisch, falls es eine zu* $\mathbb{R}^n \backslash B_{R_0}(\mathbf{O})$ *diffeomorphe Außenregion* ${\mathbf{N}^{n+1}}_E := \mathbf{N}^{n+1} \backslash B$ *(B kompakt) gibt, so dass für die Metrik in den obigen „Minkowski-Polar-Koordinaten"* (d, ϕ, θ) *gilt:*

$$\overline{g}_{\alpha\beta} = (1 + \frac{m}{r^3})^2 g^H_{\alpha\beta} + {P_\alpha}^\gamma g^H_{\gamma\beta}, \qquad mit \quad |{}^H\nabla^k {P_\alpha}^\beta|_H \leq \frac{C_{k+1}}{r^{5+s}}, \quad k = 1, ...4$$

$$und \quad |P_{\phi\phi} - P_{\theta\theta}|_H \leq \frac{C_6}{r^6},$$

wobei ${}^H\nabla$ *die kovariante Ableitung des hyperbolischen Raumes beschreibt, und s die Anzahl der im* ${}^H\nabla^k$ *enthaltenen Winkelableitungen ist. Für die späteren Abschätzungen definieren wir als* $C_0 := max(1, C_1, ...C_6)$ *eine Konstante, durch die alle Größen der Geometrie von* $(\mathbf{N}^{n+1}, g)$ *abgeschätzt werden können.*

Bemerkung:
Der hierzu verwendete Diffeomorphismus wird mit Φ bezeichnet. Wie im Falle der Definition von asymptotisch flach ist auch die Definition von asymptotisch hyperbolisch aus der Physik motiviert und auf Metriken beschränkt, deren Störterm größter Ordnung (hier: $\frac{m}{r^3}$) ein Monopolterm ist, d.h. rotationssymmetrisch und nicht wie der Störterm $P_{\alpha,\beta}$ tensoriell ist. Ferner fordern wir, dass $m > 0$ gilt. Die in [Min] gegebende Definition beinhaltet durch den Gewichtungsfaktor e^r ebenfalls das exponentielle Abfallverhalten. Die Metrik $\Psi^2 g^H$ bezeichnen wir im Folgenden mit g^{SH}.

Nun zunächst einige Umrechnungsformeln für konforme Metriken:

1.4 Konforme Umrechnungen

Wir stellen kurz bekannte Umrechnungsformeln für konforme Metriken zusammen und bringen diese anschließend in die von uns benötigte Form. Dabei bleiben wir jedoch allgemein und setzen erst am Ende den konformen Faktor ein.

Lemma 1.4 *Seien g bzw.* $\overline{g}$ *zwei zueinander konforme Metriken auf* N^{n+1}*,* *wobei $\overline{g} = \Psi^2\, g$ ist. Dann gilt für die folgenden aus g abgeleiteten Größen:*

$$\begin{aligned}
\Psi^2\ {}^{\overline{g}}\nabla f &= {}^{g}\nabla f \\
\Psi^2\ {}^{\overline{g}}\Delta f &= {}^{g}\Delta f + (\frac{n+1}{2} - 1) < \nabla f, \nabla\Psi > \\
{}^{\overline{g}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} &= {}^{g}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \Psi^{-1}((\nabla_{\mathbf{Y}}\Psi)\mathbf{X} + (\nabla_{\mathbf{X}}\Psi)\mathbf{Y} - < \mathbf{X}, \mathbf{Y} > \nabla\Psi) \\
\overline{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} &= R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} \\
&\quad + \Psi^{-1}(< \nabla_{\mathbf{X}}(\nabla\Psi), \mathbf{Z} > \mathbf{Y} + < \mathbf{X}, \mathbf{Z} > \nabla_{\mathbf{Y}}(\nabla\Psi) \\
&\qquad - < \nabla_{\mathbf{Y}}(\nabla\Psi), \mathbf{Z} > \mathbf{X} - < \mathbf{Y}, \mathbf{Z} > \nabla_{\mathbf{X}}(\nabla\Psi)) \\
&\quad + \Psi^{-2}((2(\nabla_{\mathbf{Y}}\Psi)(\nabla_{\mathbf{Z}}\Psi) - < \mathbf{Y}, \mathbf{Z} > |\nabla\Psi|^2)\mathbf{X} \\
&\qquad - (2(\nabla_{\mathbf{X}}\Psi)(\nabla_{\mathbf{Z}}\Psi) - < \mathbf{X}, \mathbf{Z} > |\nabla\Psi|^2)\mathbf{Y} \\
&\qquad + 2((\nabla_{\mathbf{X}}\Psi) < \mathbf{Y}, \mathbf{Z} > - (\nabla_{\mathbf{Y}}\Psi) < \mathbf{X}, \mathbf{Z} >)\nabla\Psi) \\
\overline{Ric}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= Ric(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \\
&\quad - \Psi^{-1}(\Delta\Psi < \mathbf{X}, \mathbf{Y} > + (n-1) < \nabla_{\mathbf{X}}(\nabla\Psi), \mathbf{Y} >) \\
&\quad + \Psi^{-2}(2(n-1)(\nabla_{\mathbf{X}}\Psi)(\nabla_{\mathbf{Y}}\Psi) - (n-2) < \mathbf{X}, \mathbf{Y} > |\nabla\Psi|^2).
\end{aligned}$$

Ferner sei $M^n \subseteq N^{n+1}$ eine Hyperfläche, dann gilt für die Eigenwerte λ_i bzw. $\overline{\lambda}_i$ der zweiten Fundamentalform von M^n in (N^{n+1}, g) bzw. M^n in $(N^{n+1}, \overline{g})$ die folgende Beziehung:

$$\overline{\lambda}_i = \Psi^{-1}\ \lambda_i + \Psi^{-2}\ \nabla_{\boldsymbol{\nu}}\Psi$$

wobei $\boldsymbol{\nu}$ die äußere Einheitsnormale in (N^{n+1}, g) ist.

Beweis: vgl. [GKM75], [HY95] □

Korollar 1.5 *In $H^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1})$ gilt: Ist die Funktion $\Psi = \Psi(r)$ nur vom geodätischen Abstand eines (beliebigen) Punktes abhänig, d.h. $\nabla\Psi = (\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi)\boldsymbol{\nu}$ (mit $\boldsymbol{\nu}$ = Normale an die geodätischen Abstandsphären), so gilt:*

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= Ric(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \\
&\quad - ((n+1)\lambda\frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi} + \frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi} + (n-2)(\frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi})^2) < \mathbf{X}, \mathbf{Y} > \\
&\quad + (n-1)(\lambda\frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi} - \frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi} + 2(\frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi})^2) < \boldsymbol{\nu}, \mathbf{X} >< \boldsymbol{\nu}, \mathbf{Y} > \\
\Psi^2\overline{Ric}(\overline{\boldsymbol{\nu}}, \overline{\boldsymbol{\nu}}) &= \overline{Ric}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) = Ric(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu})\ + 2((\frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi})^2 - \lambda\frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi} - \frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi}) \\
\Psi^2|\overline{A}|^2 &= |A|^2 + 2H\frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi} + 2(\frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi})^2
\end{aligned}$$

Für den Stabilitätsoperator folgt somit:

$$\begin{aligned}
L_{\overline{g}}(f) &= -({}^{\overline{g}}\Delta^{M^n} + (|\overline{A}|^2 + \overline{Ric}(\overline{\boldsymbol{\nu}}, \overline{\boldsymbol{\nu}})))f \\
&= \quad -\Psi^{-2}({}^{g}\Delta^{M^n} + (|A|^2 + Ric(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu})))f \\
&\qquad -2\Psi^{-2}(2(\frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi})^2 + \lambda\frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi} - \frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi})f
\end{aligned}$$

Beweis: Zunächst berechnen wir die Hessische und den Laplace von $\Psi(r)$.

Lemma 1.6 *Sei* $\Theta : \mathbb{R}^{n+1} \to N^{n+1}$ *eine lokale Karte,* $f = f(x_{n+1})$, $M^n = \Theta(\{x_{n+1} = const.\})$. *Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
\Delta^{N^{n+1}} f(x_{n+1})|_{M^n} &= (\partial_{\boldsymbol{\nu}}\partial_{\boldsymbol{\nu}} f + H\partial_{\boldsymbol{\nu}} f)|_{M^n} \\
Hess_{N^{n+1}}(f)(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|_{M^n} &= \partial_{\mathbf{X}}\partial_{\mathbf{Y}} f|_{M^n} + A(\mathbf{X}^\top, \mathbf{Y}^\top)\partial_{\boldsymbol{\nu}} f
\end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
Hess_{N^{n+1}}(f)(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|_{M^n} &= < \nabla_{\mathbf{X}}(\nabla f), \mathbf{Y} > = < \nabla_{\mathbf{X}}((\partial_{\boldsymbol{\nu}} f)\boldsymbol{\nu}), \mathbf{Y} > \\
&= \partial_{\mathbf{X}}\partial_{\mathbf{Y}} f < \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu} > + (\partial_{\boldsymbol{\nu}} f) < \nabla_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\nu}, \mathbf{Y} > .
\end{aligned}$$

Man beachte nun, dass $\boldsymbol{\nu}$ normiert ist. □
$A(\mathbf{X}^\top, \mathbf{Y}^\top)$ lässt sich auf geodätischen Sphären berechnen zu:

$$A(\mathbf{X}^\top, \mathbf{Y}^\top) = \lambda < \mathbf{X}, \mathbf{Y} > -\lambda < \boldsymbol{\nu}, \mathbf{X} >< \boldsymbol{\nu}, \mathbf{Y} > .$$

Mit $\nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\Psi = (\partial_{\boldsymbol{\nu}}\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi) < \boldsymbol{\nu}, \mathbf{X} >< \boldsymbol{\nu}, \mathbf{Y} >$ und $\nabla_{\mathbf{X}}\Psi = (\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi) < \boldsymbol{\nu}, \mathbf{X} >$ folgt die erste Gleichung. Die anderen Identitäten ergeben sich aus Lemma 1.4 durch Einsetzen. □

Konkret ergibt sich mit $K = -1$, $\Psi = 1 + \frac{m}{r^3}$ und $\lambda = 1/tanh(l)$,wobei l der geodätische Abstand zum gewählten „Nullpunkt” ist, und

$$\begin{aligned}
\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi &= = \frac{1}{tanh(l)}\frac{-3m}{r^3}, \\
\partial_{\boldsymbol{\nu}}\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi &= = \frac{1}{tanh^2(l)}\frac{9m}{r^3} + \frac{3m}{r^5}
\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}
\frac{3\lambda\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi + \partial_{\boldsymbol{\nu}}\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi^3} &= \frac{3m}{r^5}\frac{1}{\Psi^3} \\
\lambda\frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi^3} - \frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi^3} + 2(\frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi^2})^2 &= -\frac{1}{tanh^2(l)}\frac{12m}{r^3}\frac{1}{\Psi^3} - \frac{3m}{r^5}\frac{1}{\Psi^3} \\
&\quad + \frac{2}{tanh^2(l)}\frac{9m^2}{r^6}\frac{1}{\Psi^4}.
\end{aligned}$$

Und somit gilt für die Ricci-Krümmung in unserem Fall (man beachte den Faktor $\Psi^{-2} = 1 - \frac{2m}{r^3} + O(r^{-6})$, welcher an $\mathrm{Ric}_{ij} = -2g_{ij}$ multipiziert werden muss):

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Ric}}_i{}^j &= \begin{pmatrix} -2+\frac{4m}{r^3} & 0 & 0 \\ 0 & -2+\frac{4m}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & -2+\frac{4m}{r^3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{12m}{r^3}\frac{1}{tanh^2(l)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\qquad + O(r^{-5}) \\
&= \begin{pmatrix} -2-\frac{8m}{r^3} & 0 & 0 \\ 0 & -2+\frac{4m}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & -2+\frac{4m}{r^3} \end{pmatrix} + O(r^{-5}).
\end{aligned}$$

Der Ricci-Tensor hat also die drei Anteile $\overline{R}ic^H = -2g^H$ den hyperbolischen Anteil, $\overline{R}ic^M$ den Term dritter Ordnung in d, welcher spurfrei ist, und $\overline{R}ic^P$, welcher die Ordnung r^{-5} hat. $\overline{R}ic^P$ ist also zunächst nicht der Anteil, welcher von der Störung $\{P\}$ herrührt. Wenn die Störung $\{P\}$ hinzu kommt, werden wir jedoch diese Bezeichnung beibehalten. Dies überträgt sich in drei Dimensionen offenbar auf den vollen Riemann-Tensor $\overline{R}^V$

$$\overline{R}^V_{ijkl} = \overline{R}^H_{ijkl} + \overline{R}^{MP}_{ijkl} = \overline{R}^H_{ijkl} + \overline{R}^M_{ijkl} + \overline{R}^P_{ijkl},$$

denn es gilt die folgende Darstellung für den Riemann-Tensor in diesem Fall:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = (R_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - R_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - R_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta} + R_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma}) - \frac{1}{2}R(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}).$$

Hierbei gilt $|\overline{R}^M_{ijkl}| \leq C_0 r^{-3}$ und $|\overline{R}^P_{ijkl}| \leq C_0 r^{-5}$. Bei konstanter Schnittkrümmung K ergibt sich für den Ricci-Tensor $\mathrm{Ric}_K = -K\,\mathrm{Ric}_{-1}$. Für die Schnittkrümmung in Winkelrichtung folgt $(K < 0)$

$$\begin{aligned}
\overline{R}_{1212} &= \Psi^{-2}(-2\lambda_H \frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi} - (\frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi})^2 + \overline{R}^H_{1212}) \\
&= \frac{3mK}{tanh(\sqrt{-K}l)^2 r^3}\frac{1}{\Psi^4}(2 - \frac{m}{r^3}) + K\Psi^{-2}.
\end{aligned}$$

Lemma 1.7 *Die Eigenwerte des Ricci-Tensors in g^{HS} sind in Radialrichtung $2K(1+\frac{4m}{r^3})$ und in Winkelrichtung $2K(1-\frac{2m}{r^3})$, die Schnittkrümmung in Winkelrichtung berechnet sich zu $K(1-\frac{8m}{r^3})$, jeweils bis auf Terme der Ordnung $O(r^{-5})$.*

□

Lemma 1.8 *Für die beiden Metriken $\overline{g}$ und g^{HS} auf H^3 gelten folgende Abschätzungen (die jeweiligen Indizes beziehen sich auf die zugrunde liegende Metrik):*

$$\begin{aligned}
|\overline{R}_{\alpha\beta} - R^{HS}_{\alpha\beta}| &\leq cC_0 r^{-5} \\
|\overline{\nabla}^k -^{HS} \nabla^k| &\leq cC_0 r^{-5+s} \\
|\nabla^k \overline{R}_{\alpha\beta} - \nabla^k R^{HS}_{\alpha\beta}| &\leq cC_0 r^{-5+s} \\
|\overline{h}_{ij} - h^{HS}_{ij}| &\leq cC_0 r^{-5} \\
|\Delta^{\overline{g}} f - \Delta^{g^{HS}} f| &\leq (|D^2 f| + |Df|) cC_0 r^{-5},
\end{aligned}$$

wobei s die Anzahl der Winkelableitungen in ∇^k ist.

Beweis: Mit $|\overline{\Gamma} - \Gamma^{HS}| \leq |g^{-1}||\partial P| + |P||\partial g| \leq cC_0 r^5$ und $|\Gamma| \leq |g^{-1}||\partial g| \leq cC_0 r^5$ folgen die ersten vier Ungleichungen. Ferner gilt:

$$\begin{aligned}
|\Delta^{\overline{g}} f - \Delta^{g^{HS}} f| &\leq |\overline{\Gamma} \nabla f - \Gamma^{HS} \nabla f| + |\overline{g} - g^{HS}||D^2 f| \\
&\leq |\overline{\Gamma} - \Gamma^{HS}||Df| + |\overline{g} - g^{HS}||D^2 f| \\
&\leq (|Df| + |D^2 f|) cC_0 r^5
\end{aligned}$$

□

Bemerkung:
Der Vergleich mit einem konformen Fehlerterm macht die obigen Ordnungen schnell plausibel. Es gilt auch $|\nabla^H - \nabla^{HS}| \leq c(m) r^{-3}$.

2. Approximative Sphäre

In diesem Abschnitt behandeln wir die geometrischen Eigenschaften von Flächen, welche nahe bei einer Sphäre liegen. Hierbei bedeutet nahe, dass die spurfreie zweite Fundamentalform und deren Ableitung klein sind in folgendem Sinne:

Definition 2.1 *Sei r_0 der Durchmesser einer Hyperfläche M^2 in $(N^3, \overline{g})$. Dann sei* $\mathcal{B}(B_2, B_3) := \{M^2 \cong \mathbf{S}^2 : |^{\overline{g}} \overset{\circ}{A} |^{\overline{g}} \leq B_2 {r_0}^{-4}, |^{\overline{g}}\nabla \overset{\circ}{A} |^{\overline{g}} \leq B_3 {r_0}^{-5}\}.$

Wir wollen dabei das genaue Maß der Abweichung von einer geodätischen Sphäre in H^3 dadurch messen, dass wir eine Sphäre bester Approximation konstruieren, d.h. wir schätzen deren Mittelpunkt, Radius sowie die Neigung der jeweiligen Normalen zueinander ab. Ferner berechnen wir die mittlere Krümmung approximativ und erhalten daraus im nächsten Kapitel, dass Flächen aus $\mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$ (vgl. Definition 2.5) ungefähr konzentrisch um das Massezentrum $\mathbf{O}$ liegen.

2.1 Vorbereitungen

Die mittlere Krümmung einer Sphäre $\mathbf{S}_r$ mit Radius l im hyperbolischen Raum H^3 lässt sich mit Hilfe der Gauß-Gleichungen berechnen. Die Gauß-Krümmung einer Sphäre mit Durchmesser πr ist dabei $1/r^2$. In speziellen

Normalkoordinaten erhalten wir also:

$$\frac{1}{r^2} = R_{1212} = \overline{R}_{1212} + h_{22}h_{11} - h_{12}h_{21} = -K + \lambda_1\lambda_2.$$

Da die beiden Eigenwerte übereinstimmen, gilt: $\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{-K + \frac{1}{r^2}}$. An dieser Stelle bemerken wir, dass diese Darstellung der mittleren Krümmung intrinsisch ist und daher in allen Modellen verwendet werden kann. Mit $r = sinh(\sqrt{-K}l)/\sqrt{-K}$ erhalten wir:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{-K}\sqrt{1 + \frac{1}{sinh(\sqrt{-K}l)^2}} = \frac{\sqrt{-K}}{tanh(\sqrt{-K}l)}.$$

Eine Fläche $M^2 \in \mathcal{B}(B_2, B_3)$ besitzt nun einen Punkt p_0, an welchem ein Eigenwert der zweiten Fundamentalform ebenfalls den Wert

$$\lambda_0 = \lambda_i = \sqrt{-K + \frac{1}{{r_0}^2}} \qquad (r_0 := diam(M)/\pi)$$

hat. Denn sei einerseits angenommen $\lambda_0 < \lambda_i(p)$ für alle $p \in M^2$, so ist wegen $\lambda_0 > 1$ und der Gauß-Gleichungen $R_{ij} > \frac{1}{{r_0}^2}g_{ij}$ auf ganz M^2, und somit wegen Meyers Theorem schließlich:

$$\pi r_0 = diam(M^2) < \pi(\frac{1}{{r_0}^2})^{-\frac{1}{2}} = \pi r_0.$$

Ist andererseits $\lambda_0 > \lambda_i(p)$ für alle $p \in M^2$, dann lässt sich eine Sphäre $\mathbf{S}_{r_0}$ mit Radius $l_0(:= sinh^{-1}(r_0))$ so in das Innere von M^2 legen, dass diese nur in einem Punkt p_T die Fläche M^2 berührt (Maximumprinzip). Verwendet man nun diese Sphäre als ein Hindernis für Kurven in M^2, so ergibt sich für die Entfernung des Punktes p_T von dem bezüglich des Mittelpunktes der Sphäre gegenüberliegenden Punktes $q_T \in M^2$ der Abstand $\pi r_0 + \delta$ mit $\delta > 0$. Dies ist wiederum ein Widerspruch zur Definition von r_0. Wir können also davon ausgehen, dass für die Eigenwerte der zweiten Fundamentalform in allen Punkten $p \in M^2$ gilt

$$\begin{aligned}\lambda_i(p) &= \sqrt{-K + \frac{1}{{r_0}^2}} + O[{r_0}^{-3}] + \pi r_0 O[{r_0}^{-4}] \\ &= \lambda_0 + O[{r_0}^{-3}].\end{aligned}$$

2.2 Zentrum

Wir betrachten eine Mannigfaltigkeit, welche von asymptotisch hyperbolischen Raumblättern einer gestörten Schwarzschild-Raumzeit herrührt. Insbesondere gibt es eine kompakte Region B, in welcher Singularitäten auftreten.

Um für eine Fläche in $\mathcal{B}(B_2, B_3)$ ein Zentrum zu definieren, muss man diese Innenregion umgehen. Wir nehmen hierzu den Hintergrundraum H^3, der vermöge der Abbildung Φ (vgl. Definition 1.3) verwendet werden kann (analog zum asymptotisch flachen Fall mit $\mathbb{R}^{n+1}$ als Hintergrundraum). Der Ansatz, den Euklidischen Raum als Hintergrund zu verwenden, erweisst sich als wenig hilfreich, da die euklidische und hyperbolische Metrik „exponentiell differieren". Unter Φ ergeben sich nun für die Hyperflächen in $\mathcal{B}(B_2, B_3)$:

Lemma 2.2 *Sei $M^2 \in N^3$ eine Hyperfläche in $\mathcal{B}(K_1, K_2)$, so dass*

$$r(y) \geq 1/10 \cdot \; max_M(r) =: r_1$$

ist, dann gibt es eine numerische Konstante c, so dass für diese Fläche in H^3 gilt:

$$|\overset{\circ}{A}| \leq c(C_0 + K_1){r_1}^{-4} \quad und \quad |\nabla \overset{\circ}{A}| \leq c(C_0 + K_2){r_1}^{-5}$$

für $r_1 > c(C_0 + K_1)$

Beweis: : Analog zu [HY95], da in diesem Fall ebenfalls eine konforme Metrik bertachtet wird. Dabei ist zu beachten, dass die algebraische Ungleichung (vgl. Lemma 1.3 [HY95])

$$|\nabla A|^2 \geq (\frac{3}{4} - \eta)|\nabla H|^2 - (\frac{1}{4}\eta^{-1} - 1)|w|^2, \qquad \eta > 0,$$

ebenfalls wie bei [HY95] verwendet werden kann. Denn der Ricci-Tensor in H^3 ist ein Vielfaches der Metrik, d.h. es gilt $\mathrm{Ric}\,(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 2K < \mathbf{X}, \mathbf{Y} >$ für alle $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$, somit also $|w| = 0$. $\square$

Der Übersichtlichkeit wegen wählen wir in diesem Abschnitt wieder $K = -1$. Um den approximativen Mittelpunkt einer Fläche aus $\mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$ zu bestimmen, betrachten wir folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} a_{t_0} : M^2 &\to H^3 \\ p &\to \mathbf{exp}_{F(p)} t_0 \; \nu(p) \end{aligned}$$

Auf einer geodätischen Sphäre ist a_{t_0} für geeignetes t_0 (s.u.) konstant. Um diese Abbildung ableiten zu können, teilen wir sie in $b := (F, t_0\nu)$ und die Exponentialabbildung $\mathbf{exp}$ auf:

$$\begin{aligned} b &= (F, t_0\nu) : M^2 \to TH^3, p \to (F(p), t_0\nu(p)) \\ Db &= (DF, t_0 D\nu) : TM^2 \to TTH^3, \\ &\quad (p, v) \to (DF(p)(v), t_0 D\nu(p)(v)) = ((F(p), DF(p)v), t_0(\nu(p), D\nu(p)v)) \\ &\qquad\qquad \text{bzw.} \qquad = ((F(p), t_0\nu(p)), (DF(p)v), t_0 D\nu(p)v)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{exp}: TH^3 \to H^3, &\quad (p,v) \to \mathbf{exp}_p(v(p)) \\
D\mathbf{exp}: TTH^3 \to TH^3, &\quad ((p,v),(x,y)) \to D\mathbf{exp}_p(v)(x,y) \\
&\quad \text{speziell:} \quad = J^{\gamma(p,tv)}_{(x,y)}(1) = J_{(x,y/t)}(t),
\end{aligned}
$$

wobei $J^{\gamma}_{(x,y)}(t)$ das Jakobi-Feld entlang der Geodäten $\gamma(t) = \exp_p(t\mathbf{v})$ zu den Anfangswerten x und y ist. Für die Abbildung a_{t_0} gilt somit

$$
Da_{t_0}(p,v) \;=\; D\mathbf{exp}_{F(p)}(t_0\nu(p))(v, t_0 A(v)) = J_{(v,A(v))}(t_0)
$$

A beschreibt hier wiederum die Weingartenabbildung.
Um zu sehen, dass es sich tatsächlich um ein Jakobi-Feld mit den gegebenen Anfangsbedingungen handelt, betrachten wir eine Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M^2$ mit $\alpha(0) = p$ und $\frac{\partial}{\partial s}\alpha(0) = v$:

$$
\begin{aligned}
Da_t(v) &= Da_t \circ \frac{\partial}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}(a_t \circ \alpha) \\
&= \frac{\partial}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}(\mathbf{exp}_{\alpha(\varepsilon)}(t\nu(\varepsilon))) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}(\gamma_\varepsilon(t)) = J(t),
\end{aligned}
$$

wobei $\gamma_\varepsilon(t)$ diejenige Geodäte ist, welche in $F(p(\varepsilon))$ startet und in Richtung $\nu(p(\varepsilon))$ läuft. Wir wollen mit Hilfe der Jakobi-Gleichung eine explizite Lösung zu den Angangswerten $J(0) = v$, $\frac{\partial}{\partial t}J(0) = A(v)$ finden. Zunächst gilt für die zweite Fundamentalform $A(v) = \lambda_0 v + O({r_1}^{-4})$ (siehe Vorbemerkung), wobei sich $O({r_1}^{-4})$ durch eine Konstante $c(K_1+K_2+C_0)$ und ${r_1}^{-4}$ abschätzen lässt (2.2). Da wir im hyperbolischen Raum rechnen, und o.B.d.A. die Geodäte γ_ε nach Bogenlänge parametrisiert ist, lautet die Jakobi-Gleichung:

$$
\frac{\nabla^2}{\partial t \partial t} J(t) = J(t).
$$

Mit $J(t) = f(t)v(t)$, wobei $\mathbf{v}(t)$ die Parallelverschiebung von $\mathbf{v}$ entlang γ ist, ergibt sich für $f(t)$: $\frac{\partial^2}{\partial t \partial t} f(t) = f(t)$. Der Lösungsansatz $f(t) = a\ sinh(t) + b\ cosh(t)$ liefert mit den Anfangswerten (wir gehen von $|v|_{H^3} = 1$ aus)

$$
f(t) = (\lambda_0 + O({r_1}^{-4}))sinh(t) + cosh(t)
$$

Wählt man für $t = t_0 := ln(\sqrt{\frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0 + 1}})$, so gilt $f(t_0) = sinh(t_0)\ O({r_1}^{-4})$ für alle Punkte $p \in M^2$. Da $sinh(t_0) = r_1$ ist ($r_1 = diam(M)/\pi$), und mit $|v(t_0)|_H = 1$ gilt also:

$$
|J(t_0)|_H \;=\; O({r_1}^{-3}) \quad \text{bzw.} \quad |J(t_0)|_H \leq c(K_1 + K_2 + C_0){r_1}^{-3}.
$$

Dies gilt für alle Punkte $p \in M^2$. Von nun an sei $a(p) := a_{t_0}(p)$. Ferner sei $\mathbf{a}_0 := a(p_0)$ für den Punkt $p_0 \in M^2$ mit $\lambda(p_0) = \lambda_0$ (vgl. Vorbemerkung).

Dann lässt sich der Abstand $dist(\mathbf{a}_0, a(p))$ aller Bildpunkte unter a zu $\mathbf{a}_0$ berechnen. Sei dazu α wiederum eine Kurve in M^2. Für deren Bild $\gamma = a \circ \alpha$ unter a ergibt sich dann:

$$|\frac{\partial}{\partial s}\gamma(s)|_H = |Da(\frac{\partial}{\partial s}\alpha(s))|_H = |J(t_0)|_H \leq c(K_1 + K_2 + C_0){r_1}^{-3}$$

wobei wir o.B.d.A. α nach Bogenlänge parametriesiert haben. Damit ist:

$$\begin{aligned} dist(\mathbf{a}_0, a(p)) &= inf(\int_{\mathbf{a}_0}^{a(p)} |\frac{\partial}{\partial s}\gamma(s)|_H ds) \leq \int_0^{l(\alpha)} c(K_1 + K_2 + C_0){r_1}^{-3} ds \\ &= c(K_1 + K_2 + C_0)\ l(\alpha){r_1}^{-3} \leq c(K_1 + K_2 + C_0){r_1}^{-2}, \end{aligned}$$

da $\mathrm{diam}(M^2) \leq \pi r_1$.

Lemma 2.3 (Mittelpunkt)
Es existiert ein Punkt $\mathbf{a}_0$ in H^3, so dass $dist(\mathbf{a}_0, a(p)) \leq c(K_1+K_2+C_0){r_1}^{-2}$ für alle $p \in M^2$ gilt.

Für einen beliebigen Punkt p auf M^2 wollen wir die Differenz der Normalen $\boldsymbol{\nu}(p)$ in diesem Punkt und der Verbindungsrichtung $\frac{\partial}{\partial s}\gamma_{\mathbf{a}_0} = \frac{\partial}{\partial s}\gamma_0(0)$ zum approximativen Mittelpunkt $\mathbf{a}_0$ berechnen. Wir betrachten hierzu zwei nach Bogenlänge parametrisierte Geodäten γ_0, γ_l mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \gamma_0(0) = \gamma_l(0) = F(p) &\in H^3 \\ \gamma_0(t_0) = \mathbf{a}_0 = a(p_0) &\in H^3 \\ \gamma_l(t_0) = a(p) &\in H^3 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial}{\partial s}\gamma_l(0) = \nu_{F(M^2)}(F(p)) \end{aligned}$$

und berechnen $|\frac{\partial}{\partial s}\gamma_0(0) - \frac{\partial}{\partial s}\gamma_l(0)|_H$. Dazu sei $\alpha : (0, l) \to M^2$ eine Kurve mit $\alpha(0) = p_0, \alpha(l) = p$, und $\gamma_\varepsilon : (0,1) \times \mathbf{R} \to H^3$ die Geodäte, welche von $F(p)$ nach $a(\alpha(\varepsilon))$ läuft. Für das Jakobi-Feld

$$J_\varepsilon(t) := \frac{\partial}{\partial \varepsilon'}|_{\varepsilon'=\varepsilon}(\gamma_{\varepsilon'}(t))$$

gilt dann $J_\varepsilon(t) = k_\varepsilon sinh(t)\mathbf{w}(t)$, wobei $\mathbf{w}(t)$ die Parallelverschiebung von $DF(\frac{\partial}{\partial s}\alpha(\varepsilon))$ entlang γ_ε ist, und α so parametrisiert ist, dass l für $\beta := a \circ \alpha$ in H^3 der Bogenlängenparameter ist. Dann gilt $k_\varepsilon = 1/sinh(t_0)$ (denn $|J_\varepsilon(t_0)| =$

$|\gamma_\varepsilon(t_0)| = 1)$ und mit $l = l(\beta)$, sowie $\nabla_t J(t)|_{t=0} = k_\varepsilon w(0)$ folgt:

$$
\begin{aligned}
|\frac{\partial}{\partial s}\gamma_0(0) - \frac{\partial}{\partial s}\gamma_l(0)|_H &= |\int_0^l \frac{\partial}{\partial \varepsilon}'|_{\varepsilon'=\varepsilon}(\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\gamma_{\varepsilon'}(t))d\varepsilon|_H \\
&= |\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}(\frac{\partial}{\partial \varepsilon'}|_{\varepsilon'=\varepsilon}(\gamma_{\varepsilon'}(t))d\varepsilon|_H \\
&= |\int_0^l \nabla_t|_{t=0}(J_\varepsilon(t))d\varepsilon|_H \\
&= |\int_0^l k_\varepsilon w(0)d\varepsilon|_H \\
&= lk_\varepsilon|w(0)|_H \leq \frac{c{r_1}^{-2}}{sinh(t_0)} = c(K_1 + K_2 + C_0){r_1}^{-3},
\end{aligned}
$$

wobei wir für die letzte Gleichung wiederum $sinh(t_0) = r_1$ verwendet haben, also dass $l \leq dist(\mathbf{a}_0, a(p)) \leq c(K_1 + K_2 + C_0){r_1}^{-2}$ gilt. Zusammenfassend ergibt sich:

Proposition 2.4 *Sei M^2 eine Hyperfläche in $(N^3, \overline{g})$, $M^2 \in \mathcal{B}(K_1, K_2)$ mit $d_1 := \frac{1}{10}\max_{\mathrm{M}}(dist(\mathbf{O}, \mathbf{P})) \leq dist(\mathbf{O}, \mathbf{P})$ für alle $\mathbf{P}$. Dann gibt es eine Konstante c, so dass*

$$
{}^H|\overset{\circ}{A}{}^H| \leq c(C_0 + K_1){r_1}^{-4}, \qquad {}^H|\nabla^H \overset{\circ}{A}{}^H| \leq c(C_0 + K_2){r_1}^{-5}
$$

gilt, falls $r_1 > c(C_0 + K_2)$ ist. Ferner gibt es $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ und $\mathbf{a}_0 \in H^3$, so dass

$$
\begin{aligned}
|\lambda_i(p) - \lambda_0| &\leq \overline{c}{r_1}^{-4}, \\
|\boldsymbol{\nu}(p) - \dot{\gamma}_{\mathbf{a}_0}(p)|_H &\leq \overline{c}{r_1}^{-3}, \\
d(\mathbf{a}_0, a(p)) := \mathrm{dist_H}(\mathbf{a}_0, a(p)) &\leq \overline{c}{r_1}^{-2} \qquad \textit{für alle } \ p \in M^2, \\
\textit{bzw.} \qquad |M - S_{1/\lambda_0}(\mathbf{a}_0)|_H &\leq \overline{c}{r_1}^{-2}
\end{aligned}
$$

ist, mit $\overline{c} := c(C_0 + K_1 + K_2)$ und $\gamma_{\mathbf{a}_0} = \gamma_l$ die Verbindungsgeodäte zu $\mathbf{a}_0$.

Bemerkung:
Wir haben also für Flächen aus $\mathcal{B}(K_1, K_2)$, wie in 2.4, die approximative Sphäre $\mathbf{S}_{app.} := \mathbf{S}_{r_0}(\mathbf{a}_0)$ mit $\mathbf{a}_0$ aus 2.4 und $r_0 = diam(M^2)/\pi$ gleich dem Durchmesser der jeweiligen Fläche.

Beweis:
Wegen Lemma 2.2 und 2.3 und dem oberen Abschnitt, bleibt nur die letzte Gleichung zu zeigen. Es gilt nach Definition von $a(p)$

$d(a(p),p) = t_0 = sinh^{-1}(r_1)$, und somit $sinh^{-1}(r_1) - \bar{c}{r_1}^{-2} \leq d(\mathbf{a}_0,p) \leq sinh^{-1}(r_1) + \bar{c}{r_1}^{-2}$, d.h.

$$p \in \mathbf{B}_{sinh(t_0+\bar{c}{r_1}^{-2})}(\mathbf{a}_0)\backslash \mathbf{B}_{sinh(t_0-\bar{c}{r_1}^{-2})}(\mathbf{a}_0)$$

und

$$\begin{aligned} |M - S_{r_1}(\mathbf{a}_0)| &= d(M,(S_{r_1}(\mathbf{a}_0)) \\ &\leq d(p,\mathbf{S}_{r_1}(\mathbf{a}_0)) \leq d(\mathbf{S}_{sinh(t_0+\bar{c}{r_1}^{-2})}(\mathbf{a}_0),\mathbf{S}_{sinh(t_0-\bar{c}{r_1}^{-2})}(\mathbf{a}_0)) \\ &\leq 2\bar{c}{r_1}^{-2}. \end{aligned}$$

□

Die in Abschnitt 3 gezeigte Langzeitexistenz wird durch die unter dem Fluss geltende Invarianz einer bestimmten Klasse von Hyperflächen erreicht. Diese Klasse ist wie folgt definiert:

Definition 2.5 *Sei r_0 der Durchmesser einer Hyperfläche M^2. Dann definieren wir*

$$\mathcal{B}(B_1,B_2,B_3) := \{M^2 \in \mathcal{B}(B_2,B_3) : dist(\mathbf{O},\mathbf{a}_0) \leq B_1/r_0\}.$$

Hierbei ist $\mathcal{B}(B_2,B_3)$ in 2.1 definiert.

Bemerkung:
(i) Für eine Sphäre $\mathbf{S}_{r_0}(\mathbf{a}_0)$ zeigt man nun völlig analog zu 2.4, dass für die Verbindungsgeodäte $\gamma_\mathbf{O}$ zu dem als Ursprung gewählten Punkt $\mathbf{O}$ die Abschätzung $|\dot\gamma_\mathbf{O} - \dot\gamma_l| \leq |\mathbf{a}_0|{r_1}^{-1}$ gilt. Für die approximative Sphäre $\mathbf{S}_{app.}$ einer Fläche aus $\mathcal{B}(B_1,B_2,B_3)$ gilt also $|\dot\gamma_\mathbf{O} - \dot\gamma_l| \leq B_1{r_1}^{-2}$.
(ii) Die Abschätzungen über die Differenzen der Tangentialvektoren, können auch als Abschätzungen für die Winkel zwischen eben diesen Vektoren aufgefasst werden, und es gilt

$$\begin{aligned} |<\boldsymbol{\nu},\gamma_{\mathbf{a}_0}> -1| &\leq \bar{c}{r_1}^{-6}, & |<\gamma_\mathbf{O},\gamma_{\mathbf{a}_0}> -1| &\leq B_1{r_1}^{-4}, \\ |<\mathbf{t}_i,\gamma_{\mathbf{a}_0}>| &\leq \bar{c}{r_1}^{-3}, & |<\mathbf{e}_i,\gamma_{\mathbf{a}_0}>| &\leq B_1{r_1}^{-2}, \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{t}_i$ die Tangentialvektoren an die Fläche M^2 und $\mathbf{e}_i$ die Winkelrichtungen in Polarkoordinaten des H^3 sind. Dies gilt, da für zwei normierte Vektoren $|\mathbf{X}-\mathbf{Y}|^2 = 2 - 2 <\mathbf{X},\mathbf{Y}>$ ist, ferner ist ${r_1}^{-8}$ zu vernachlässigen.

2.3 Mittlere Krümmung

Die mittlere Krümmung einer Sphäre $\mathbf{S}_r(\mathbf{O})$ mit Durchmesser πr und geodätischem Radius l im hyperbolischen Raum H^3 ist $(r = sinh(\sqrt{-K}l)/\sqrt{-K})$

$$H = \frac{2\sqrt{-K}}{tanh(\sqrt{-K}l)} = 2\sqrt{-K + \frac{1}{r^2}}.$$

Nehmen wir den Masseterm hinzu, d.h. wir betrachten nun $g^{HS} = \Psi^2 g^H = (1+\frac{m}{r^3})^2 g^H$, so gilt für die mittlere Krümmung einer „Ursprungssphäre", mit $\mathbf{O} \in H^n$ als gewähltem „Ursprung":

$$\begin{aligned} H &= 2(\Psi^{-1}\lambda^H + \Psi^{-2}\partial_{\boldsymbol{\nu}^H}\Psi) = 2\Psi^{-2}(\Psi\lambda^H + \partial_{\boldsymbol{\nu}^H}\Psi) \\ &= 2\sqrt{-K}\Psi^{-2}((1+\frac{m}{r^3})/tanh(\sqrt{-K}l) - \frac{3m}{r^3}/tanh(\sqrt{-K}l)) \\ &= \frac{2\sqrt{-K}}{tanh(\sqrt{-K}l)\Psi^2}(1+\frac{m}{r^3}-\frac{3m}{r^3}) = \frac{2\sqrt{-K}}{tanh(\sqrt{-K}l)\Psi^2}(1-\frac{2m}{r^3}) \\ &= 2\sqrt{-K}(1+\frac{1}{2r^2}-\frac{4m}{r^3}+O(r^{-5})). \end{aligned}$$

Die höheren Entwicklungsterme sind hierbei offenbar durch eine Konstante $c = c(m)$ und der entsprechenden Potenz von r beschränkt. Mit Lemma 1.8 erhalten wir für die mittlere Krümmung in der allgemeinen Metrik

$$\begin{aligned} H &= \frac{2\sqrt{-K}}{tanh(\sqrt{-K}l)\Psi^2}(1-\frac{2m}{r^3}) + O(r^{-5}) \\ &= 2\sqrt{-K}(1+\frac{1}{2r^2}-\frac{4m}{r^3}) + O(r^{-5}). \end{aligned}$$

Um die mittlere Krümmung einer bezüglich des Massemittelpunktes verschobenen Sphäre zu berechnen, verwenden wir die hyperbolischen Isometrien des hyperbolischen Raumes, genau jene, welche von „boosts" im Minkowski-Raum induziert werden.

Lemma 2.6 *Für alle* $\mathbf{a}_0 \in H^3$ *existiert eine Familie hyperbolischer Isometrien* $\Phi_{t\mathbf{a}_0}$, *so dass* $t \to \Phi_{t\mathbf{a}_0}$ *die Bahn der Geodäten von* $\mathbf{O}$ *nach* $\mathbf{a}_0$ *beschreibt.*

Beweis: siehe [Bea83] □

Das dazugehörende Killing-Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial t}\Phi_t^{\mathbf{a}_0}$ sei mit $\mathbf{K}$ bezeichnet. Konkret ergibt sich für das Vektorfeld $\mathbf{K}$ im Minkowski-Raum bezüglich der kanonischen Projektion des Hyperboloids auf den R^3,Pr_{R^3}, und mit der Lorentz-drehung („boost")

$$L(\theta(t)) = \begin{pmatrix} cosh(\theta(t)) & -sinh(\theta(t)) & 0 & 0 \\ sinh(\theta(t)) & cosh(\theta(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

welche die Isometrienfamilie $\Phi_t^{\mathbf{a}_0}$ auf H^3 induziert, also

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(p) &= \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\Phi_t^{\mathbf{a}_0}(p) = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}Pr_{R^3}(L(\theta(t)))(p) \\ &= DPr_{R^3}\circ DL(\frac{\partial}{\partial t}\theta(t))(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{|p|^2+1}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \mathbf{e}_x.\end{aligned}$$

D.h. für solche hyperbolische Isometrien in H^3 ist das Skalarprodukt des Killing-Vektorfeldes mit der Normale der Sphäre $< \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} >$ in den extremalen Punkten (bezüglich des Abstandes) gleich $|\mathbf{K}|$ (bei parabolischen Isometrien ist dem nicht so, in diesem Fall läuft dieser Winkel für große Radien sogar gegen Null). Ferner gilt für die Flächenfamilie ${M^2}_t := \Phi_t^{\mathbf{a}_0}(\mathbf{S}_l(\mathbf{O}))$ folgende Flussgleichung ($M^2 := \mathbf{S}_l(\mathbf{O})$):

$$\begin{aligned}F: &\qquad (0,T)\times M^2 \to H^3 \\ \frac{\partial}{\partial t}F &= \mathbf{K} \ = < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} > \boldsymbol{\nu} + \mathbf{K}^\top.\end{aligned}$$

Für eine Funktion G auf M^2 gilt dann

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}G(t,p(t)) &= \frac{\partial}{\partial t}G(t,p) + \frac{\partial}{\partial p}G(t,p)\frac{\partial}{\partial t}p(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}G(t,p) + < \nabla^M G(t,p), \frac{\partial}{\partial t}\Phi_t(p) > \\ &= \frac{\partial}{\partial t}G(t,p) + < \nabla^M G(t,p), \mathbf{K} > .\end{aligned}$$

Aus [HP98] ergibt sich (mit Flussgeschwindigkeit f) für diesen Fluss folgende Evolution der mittleren Krümmung:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H &= \frac{\partial}{\partial t}H + < \nabla^M H, \mathbf{K} > = -\Delta f - f(|A|^2 + Ric(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})) + < \nabla^M H, \mathbf{K} > \\ &= -\Delta < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} > - < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} > (|A|^2 + Ric(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})) + < \nabla^M H, \mathbf{K} > .\end{aligned}$$

Weiter haben wir

$$\Delta < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} > \ = \ < \Delta\mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} > +2 < \nabla_i^M \mathbf{K}, \nabla_i^M \boldsymbol{\nu} > + < \mathbf{K}, \Delta\boldsymbol{\nu} > .$$

Und da $\mathbf{K}$ ein Killing-Vektorfeld ist, d.h. es gilt
$< \nabla_i^M \mathbf{K}, \mathbf{e}_j > = - < \nabla_j^M \mathbf{K}, \mathbf{e}_i >$, sowie $\nabla_j \nabla_i \mathbf{K}^k = -{\mathbf{R}_i}^k{}_{jd}\mathbf{K}^d$, berechntet

sich dies zu:

$$\begin{aligned}
< \Delta \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} > &= - < \mathbf{R}_i{}^k{}_{id} \mathbf{K}^d, \boldsymbol{\nu} >= -Ric(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{K}) \\
2 < \nabla_i \mathbf{K}, \nabla_i \boldsymbol{\nu} > &= 2 < \nabla_i \mathbf{K}, h_{ij} \mathbf{e}_j > \\
&= h_{ij}(< \nabla_i \mathbf{K}, \mathbf{e}_j > + < \nabla_j \mathbf{K}, \mathbf{e}_i >) = 0 \\
< \mathbf{X}, \Delta \boldsymbol{\nu} > &= < \mathbf{X}, \nabla_i (h_{ij} \mathbf{e}_j) > \\
&= - < \mathbf{X}, h_{ij} h_{ij} \boldsymbol{\nu} > + < \mathbf{X}, (\nabla_j (h_{ii}) + Ric(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_j)) \mathbf{e}_j > \\
&= -|A|^2 < \mathbf{X}, \boldsymbol{\nu} > + < \mathbf{X}, \nabla H > + Ric(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_j) < \mathbf{X}, \mathbf{e}_j > \\
&= -|A|^2 < \mathbf{X}, \boldsymbol{\nu} > + < \mathbf{X}, \nabla H > + Ric(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{X}^\top)
\end{aligned}$$

für alle Koordinatenvektorfelder $\mathbf{X}$, wobei wir die Codazzi-Gleichung verwendet haben. Zusammen also

$$\begin{aligned}
-\Delta < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} > &= Ric(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{K}) - Ric(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{K}^\top) + |A|^2 < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} > - < \mathbf{K}, \nabla H > \\
&= Ric(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{K}^\perp) + |A|^2 < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} > - < \mathbf{K}, \nabla H >
\end{aligned}$$

Somit gilt wie zu erwarten $\frac{d}{dt} H = 0$, da $Ric(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{K}^\perp) = Ric(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) < \boldsymbol{\nu}, \mathbf{K} >$.

Betrachten wir eben dieses Killing-Vektorfeld (des H^3) in der obigen Flussgleichung nun bezüglich der Metrik g^{SH}, so erhalten wir (vgl. Korollar 1.5):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} H &= -({}^{\overline{g}}\Delta^M + (|\overline{A}|^2 + \overline{Ric}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}))) < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} >_H + < \nabla^M H, \mathbf{K} >_M \\
&= \Psi^{-2}(-{}^g\Delta^M - (|A|^2 + Ric(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu})) < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} >_H + < \nabla^M H, \mathbf{K} >_H) \\
&\quad -2\Psi^{-2}(2(\frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}} \Psi}{\Psi})^2 + \lambda^H \frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}} \Psi}{\Psi} - \frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}} \partial_{\boldsymbol{\nu}} \Psi}{\Psi}) < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} >_H \\
&= -2\Psi^{-2}(2(\frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}} \Psi}{\Psi})^2 + \lambda^H \frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}} \Psi}{\Psi} - \frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}} \partial_{\boldsymbol{\nu}} \Psi}{\Psi}) < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} >_H,
\end{aligned}$$

wobei wir das obige Ergebnis anwenden und ausnutzen, dass sich die Metrik auf einer Sphäre $\mathbf{S}_r(0)$ um den dort konstanten Faktor Ψ^2 ändert, d.h. für den Laplace-Beltrami-Operator: $\Delta^M = \Psi^2 \Delta$ (Lemma 1.4).

Lemma 2.7 *Für eine geodätische Sphäre $\mathbf{S}_{r_0}(\mathbf{a}_0) \in H^3$ mit Radius $l_0 = sinh^{-1}(r_0), B_1/r_0 \geq |\mathbf{a}_0|$ gilt, dass die mittlere Krümmung bezüglich der konform gestörten Metrik $\overline{g} = \Psi^2 g^H$ sich berechnet zu:*

$$|H - \frac{2}{tanh(l_0)}(1 - \frac{4m}{{r_0}^3}) - \frac{24m < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} >}{{r_0}^3}| \leq c(m) {r_0}^{-4}$$

für alle $r_0 \geq cB_1^2$.

Beweis: Wir integrieren den obigen Fluss, wobei das Killing-Vektorfeld so gewählt ist, dass der zugehörige Fluss Φ_t den Ursprung in den Punkt $\mathbf{a}_0 = \Phi_t(0)$ überführt, und $|\hat{\mathbf{K}}(0)| = 1$, also $|\mathbf{a}_0|\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}$ gilt. Wir haben mit $\Psi = (1 + \frac{m}{{r_0}^3})$ also

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}H &= -2\Psi^{-2}(2(\frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi})^2 + \lambda\frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi} - \frac{\partial_{\boldsymbol{\nu}}\partial_{\boldsymbol{\nu}}\Psi}{\Psi}) < \hat{\mathbf{K}}, \boldsymbol{\nu} >_H \\ &= \frac{24m < \hat{\mathbf{K}}, \boldsymbol{\nu} >}{{r_0}^3} + O({r_0}^{-5}),\end{aligned}$$

wobei sich die Störung $O({r_0}^{-5})$ durch $c(m){r_0}^{-5}$ abschätzen lässt. Für die mittlere Krümmung ergibt sich dann

$$\begin{aligned}H(S_l(\mathbf{a}_0)) &= H(S_l(0)) + \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}H|\mathbf{a}_0| + O({r_0}^{-3})|\mathbf{a}_0|^2 \\ &= \frac{2}{tanh(l_0)}(1 - \frac{4m}{{r_0}^3}) + \frac{24m < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} >}{{r_0}^3} + O({r_0}^{-3})|\mathbf{a}_0|^2.\end{aligned}$$

Mit $B_1/r_0 \geq |\mathbf{a}_0|$ folgt also die Behauptung, da alle höheren Ableitungen (auch in Punkten, die bereits auf einer verschobenen Sphäre liegen) ebenfalls Ordnung 3 haben, allerdings jeweils eine weitere Potenz von $|\mathbf{a}_0|$ erhalten. $\square$

Ein alternativer geometrischer Beweis, der die Beziehung von r und r_0 genau darstellt ist folgender

Beweis: Wir haben aus Lemma 1.4:

$$h^{HS}_{ij} = \frac{1}{\Psi}(h^H_{ij} + < \mathbf{t}^H_i\, \nabla^H_{\boldsymbol{\nu}^H} log\Psi, \mathbf{t}^H_j >_H) = \frac{1}{\Psi}h^H_{ij} + \frac{1}{\Psi^2}g^H_{ij}\nabla^H_{\boldsymbol{\nu}^H}\Psi.$$

Da $\boldsymbol{\nu}$ normiert ist, und $< \boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_r >= 1 + O({r_0}^{-4})$ gilt, berechnet sich dies zu

$$\nabla^H_{\boldsymbol{\nu}^H}\Psi = < \boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_r > \nabla^H_{\mathbf{e}_r}\Psi = \nabla^H_l(1 + \frac{m}{r^3}) + O({r_0}^{-7}) = -\frac{3m}{r^3} + O({r_0}^{-7}).$$

Der Cosinus-Satz im hyperbolischen Raum hat die Form ([Bea83] S.148)

$$cosh(a) = cosh(b)cosh(c) - sinh(b)sinh(c)cos(\alpha),$$

wobei α der von den Seiten b und c eingeschlossene Winkel ist. Mit $a = r_k = dist(\mathbf{P}, \mathbf{O}), b = r_b = dist(\mathbf{P}, \mathbf{a}_0), c = |\mathbf{a}_0| = dist(\mathbf{a}_0, \mathbf{O})$ ist also

$$cosh(r_k) = cosh(r_b)cosh(|\mathbf{a}_0|) - sinh(r_b)sinh(|\mathbf{a}_0|)cos(\alpha).$$

Zunächst ist $cosh(r_k) = \frac{r}{tanh(r_k)} = r(1 + \frac{1}{2{r_0}^2} + O({r_0}^{-3}))$, denn mit $|r - r_0| \leq B_1/r_0$ gilt auch $|\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}| \leq \frac{cB_1}{{r_0}^3}$. Und mit den Reihendarstellungen der hyperbolischen Winkelfunktionen $sinh(x) = x + O(x^3)$ und $cosh(x) = 1 + x^2/2 + O(x^3)$, sowie der Tatsache, dass $|\mathbf{a}_0| = B_1/r_0 = O({r_0}^{-1})$ gilt, folgt:

$$\begin{aligned} r &= r_0(cosh(|\mathbf{a}_0|) - sinh(|\mathbf{a}_0|) < \boldsymbol{\nu}, -\hat{\mathbf{K}} > + O({r_0}^{-2})) \\ &= r_0(1 + |\mathbf{a}_0| < \boldsymbol{\nu}, \hat{\mathbf{K}} > + O({r_0}^{-2})) \\ &= r_0(1 + < \boldsymbol{\nu}, \mathbf{K} > + O({r_0}^{-2})), \end{aligned}$$

wobei zubachten ist, dass $O({r_0}^{-2})$ nun von B_1 abhängt: $|O({r_0}^{-2})| \leq cB_1^2{r_0}^{-2}$. Dabei ist $cos(\alpha) =< \boldsymbol{\nu}, -\hat{\mathbf{K}} >$ für das Killing-Vektorfeld $\mathbf{K}$, welches $\mathbf{O}$ in $\mathbf{a}_0$ verschiebt. Dies gilt, da $\boldsymbol{\nu}$ die Tangente an die Verbindungsgeodäte von $\mathbf{a}_0$ nach $\mathbf{P}$ ist, und man beachten muss, dass mit $\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{a}_0)$ gemeint ist. Somit erhalten wir

$$|\frac{1}{r^3} - \frac{1}{{r_0}^3}(1 - 3 < \boldsymbol{\nu}, \mathbf{K} >)| \leq cB_1^2{r_0}^{-5}.$$

Es gilt also schließlich (die Konstante c hängt nun auch von m ab)

$$\begin{aligned} \nabla^H_{\boldsymbol{\nu}^H}\Psi &= -\frac{3m}{r^3} + O({r_0}^{-5}) = -\frac{3m}{{r_0}^3}(1 - 3 < \boldsymbol{\nu}, \mathbf{K} >) + O({r_0}^{-5}), \\ \frac{1}{\Psi} &= 1 - \frac{m}{r^3} = 1 - \frac{m}{{r_0}^3}(1 - 3 < \boldsymbol{\nu}, \mathbf{K} >) + O({r_0}^{-5}). \end{aligned}$$

Und dies liefert

$$\begin{aligned} \lambda_i^{HS} &= \frac{1}{\Psi}\lambda_i^{HS} + \frac{1}{\Psi^2}\nabla^H_{\boldsymbol{\nu}^H}\Psi = \frac{1}{tanh(l)}(1 - \frac{m}{{r_0}^3}(1 - 3 < \boldsymbol{\nu}, \mathbf{K} >)) \\ &\qquad -\frac{3m}{{r_0}^3}(1 - 3 < \boldsymbol{\nu}, \mathbf{K} >) + O({r_0}^{-5}) \\ &= \frac{1}{tanh(l)} - \frac{4m}{{r_0}^3}(1 - 3 < \boldsymbol{\nu}, \mathbf{K} >) + O({r_0}^{-5}) \\ &= 1 + \frac{1}{2{r_0}^2} - \frac{4m}{{r_0}^3} + \frac{12m}{{r_0}^3} < \boldsymbol{\nu}, \mathbf{K} > + \frac{1}{8{r_0}^4} + O({r_0}^{-5}). \end{aligned}$$

Da $|O({r_0}^{-5})| \leq c(m)B_1^2{r_0}^{-5}$ ist, müssen wir $r_0 > c(m)B_1^2$ wählen, um die Behauptung zu zeigen. □

Proposition 2.8 *Sei $M^2 \in \mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$, $r_0 > c(m, C_0 + B_1^2 + B_2)$, so dass die Vorraussetzungen für Proposition 2.4 erfüllt sind. Dann gibt es ein Killing-Vektorfeld* $\mathbf{K}$ *von H^3, so dass bezüglich der Metrik $\overline{g}$ gilt:*

$$|H - \frac{2}{tanh(l)}(1 - \frac{4m}{{r_0}^3}) - \frac{24m < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} >}{{r_0}^3}| \leq c(m, C_0^2 + B_2 + B_3){r_0}^{-4}$$

Beweis: Wegen Lemma 2.7 kennen wir zunächst die mittlere Krümmung für die approximative Sphäre $\mathbf{S}_{app.} := \mathbf{S}_{r_0}(\mathbf{a}_0)$. Lemma 1.8 zeigt, dass der Fehlerterm sich nicht ändert, wenn man die Metrik $\overline{g}$ verwendet. Die Behauptung der Proposition folgt nun für $M^2 \in \mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$ aus

$$|H^{\mathbf{S}_{app.}}(p) - H^{M^2}(q)| \leq c(m, C_0 + B_2 + B_3){r_0}^{-4},$$

da $|\overset{\circ}{A}| \leq B_2 {r_0}^{-4}$ und $|\nabla \overset{\circ}{A}| \leq B_3 {r_0}^{-5}$ gilt. $\square$

3. Langzeitexistenz

3.1 Der volumenerhaltende mittlere Krümmungsfluss

Wie in [HY95] wollen wir zu jeder Koordinatensphäre $\mathbf{S}^2_r(\mathbf{O})$ eine Fläche konstanter mittlerer Krümmung finden. Hierzu verwenden wir den von Huisken in [Hui87] untersuchten volumenerhaltenden mittleren Krümmungsfluss, d.h. den Fluss in Normalenrichtung mit der Geschwindigkeit $(H - h)$, wobei

$$h(t) := \oint_{M_t} H d\mu := \int_{M_t} H d\mu \;/ \int_{M_t} d\mu$$

definiert ist. Mathematisch präziser suchen wir als Lösung des folgenden Systems partieller Differentialgleichungen eine Einparameterfamilie M_t von Flächen der Form: $F_t : S^2 \to N$ mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F(p,t) &= (h - H)v(p,t) \quad t \geq 0, p \in S^2 \\ F(p,0) &= \mathbf{S}^2_r(\mathbf{O}). \end{aligned} \tag{r}$$

$H(t), \boldsymbol{\nu}(t)$ sind hier die mittlere Krümmung bzw. das äußere Normalenvektorfeld an die Flächen F_t. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial t} Vol(M_t) = \int_{M_t} (H - h) d\mu = \int_{M_t} H d\mu - h \int_{M_t} d\mu = 0$$

ändert sich unter diesem Fluss das eingeschlossene Volumen nicht. Die Flussgeschwindigkeit ist genau dann gleich Null, wenn die Fläche M_t konstante mittlere Krümmung hat. Ferner gilt für das Volumen der Hyperfläche selbst

$$\frac{\partial}{\partial t}|M_t| = -\int H(H-h)d\mu = -\int (H-h)^2 d\mu \leq 0$$

[Hui87], das heißt dieses nimmt bei konstantem eingeschlossenen Volumen stetig ab, solange M_t nicht konstante mittlere Krümmung hat. (r) ist ein quasilineares System parabolischer Differentialgleichungen, so dass die Kurzzeitexistenz aus der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichugen bekannt ist.

Lemma 3.1 *Ist die Startfläche $F(0) = \mathbf{S}_r(\mathbf{O})$ glatt, so hat (r) für ein $\varepsilon > 0$ eine eindeutige glatte Lösung auf dem Zeitintervall $0 \leq t \leq \varepsilon$.*

Die Langzeitexistenz dagegen ist im allgemeinen nicht gesichert, da Singularitäten auftreten können (vgl. [Hui90],[Ang89]). Um diese Langzeitexistenz zu erhalten, zeigen wir nun, dass die Menge $\mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$ unter (r) invariant ist.

Theorem 3.2 *Es existieren Konstanten r_{min}, B_1, B_2, B_3, welche nur von (N, g), d.h. von m, und C_0 abhängen, so dass für alle $r \geq r_{min}$ die Lösung M_t von (r) für alle Zeiten in $\mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$ liegt.*

Wir wählen r_{min}, B_1, B_2 und B_3 so, dass $M_0 = \mathbf{S}_r(\mathbf{O})$ strikt in $\mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$ liegt, und bestimmen ebenfalls wie in [HY95] zunächst die grobe Position der Fläche M_t, d.h. wir zeigen mit Hilfe der approximativen Sphäre aus 2.4, dass die Position von M_t unabhängig von B_1 nicht allzu weit „off center” driften kann. Zur Zeit $t = 0$ gilt für die Startfläche $M_0 = \mathbf{S}_{r_0}(\mathbf{O})$. Um das Verhalten von $r_0(t)$ unter dem volumenerhaltenden mittleren Krümmungsfluss zu verstehen, sei zunächst erwähnt, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} r_0(t) \quad = \quad \frac{1}{8\pi r_0(t)} \frac{\partial}{\partial t}|M_t| = -\frac{1}{8\pi r_0(t)} \int (H-h)^2 d\mu$$

gilt mit $|M_t| := \int_{M_t} d\mu$. Dies bedeutet, dass $r_0(t)$ mit der Zeit abnimmt. Wegen des eingeschlossenen Volumens kann $r_0(t)$ nicht allzu sehr abfallen.

Proposition 3.3 *Sei $M^2 \in \mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$ (für alle $t \in [0, T]$) eine Lösung von (r). Dann existiert eine numerische Konstante c, so dass*

$$|r_0(0) - r_0(\overline{t})| \leq c(m, C_0 + B_2 + B_3)/r_0(0)$$

gilt für alle $t \in [0, T]$, falls $r_0(0) > c(m, C_0 + B_2 + B_3)$ ist.

Beweis:
Wir wollen ausnutzen, dass das Volumen zwischen M_t und einer festen Referenzfläche (zum Beispiel M_0) unter dem volumenerhaltenden mittleren Krümmungsfluss invariant ist. Wir bezeichnen das Volumen zwischen einer Hyperfläche M und der Referenzfläche M_0 mit $Vol(M)$. Dann gilt

$$Vol(\mathbf{S}_{r_0}(\mathbf{O})) = Vol(M_t).$$

Um die Differenz zwischen $Vol(M_t)$ und $Vol(\mathbf{S}_{app.})$ zu berechnen, beachten wir, dass wegen Lemma 2.4 $dist(\mathbf{S}_{app.}, M_t) \leq \overline{c}{r_0}^{-2}$ gilt, wobei $\overline{c} = c(C_0 + B_2 + B_3)$ ist, und das Ballvolumen im hyperbolischen Raum sich zu

$$\begin{aligned} Vol^H(B_{sinh(l)}(\mathbf{a})) &= 2\pi \int \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} d\mu(r) = \frac{\pi}{2}(sinh(2l) - 2l) \qquad (3.1) \\ &= \pi(r^2\sqrt{1+\frac{1}{r^2}} - l) \end{aligned}$$

berechnet. Hierbei bezeichnet l die geodätische Länge und es ist $r = sinh(l)$. Mit $l' \in (l_0, l_0 + \overline{c}/{r_0}^2)$ für den Radius l_0 von M_0 gilt

$$\begin{aligned} sinh(l_0 + \overline{c}/{r_0}^2) &= sinh(l_0) + \overline{c}\, cosh(l_0)/{r_0}^2 + \overline{c}^2 sinh(l')/2{r_0}^4 \\ &\geq r_0 + \overline{c}/r_0(1 + \frac{1}{2{r_0}^2} + O({r_0}^{-4})) + \overline{c}^2 sinh(l_0)/2{r_0}^4 \\ &\geq r_0 + \frac{\overline{c}}{r_0} + \frac{\overline{c}(1+\overline{c})}{2{r_0}^3} + O({r_0}^{-5}) \geq r_0 + \frac{\overline{c}}{r_0} \end{aligned}$$

und analog mit $\varepsilon_1 \geq \overline{c}{r_0}^{-2}$, also $\varepsilon_1 \simeq \overline{c}{r_0}^{-2}$, gilt

$$sinh(r_0 - \overline{c}/{r_0}^2) \leq r_0 - (1-\varepsilon_1)\overline{c}/r_0.$$

Und es folgt für die approximative Sphäre $\mathbf{S}_{r_0(t)}(\mathbf{a}_0)$:

$$\begin{aligned} &|Vol^H(\mathbf{S}_{r_0(t)}(\mathbf{a}_0)) - Vol^H(M_t)| \\ &= |Vol^H(\mathbf{S}_{r_0+\overline{c}/{r_0}^2}(\mathbf{O})) - Vol^H(\mathbf{S}_{r_0-\overline{c}/{r_0}^2}(\mathbf{O}))| \\ &\leq |(r_0+\overline{c}/r_0)^2\sqrt{1+\frac{1}{(r_0+\overline{c}/r_0)^2}} - (l_0 + \overline{c}/{r_0}^2) \\ &\quad -(r_0-(1-\varepsilon_1)\overline{c}/r_0)^2\sqrt{1+\frac{1}{(r_0-(1-\varepsilon_1)\overline{c}/r_0)^2}} + (l_0 - \overline{c}/{r_0}^2)| \\ &= |{r_0}^2 + \frac{1}{2} + 2\overline{c} + O({r_0}^{-2}) - ({r_0}^2 + \frac{1}{2} + 2\overline{c}(1-\varepsilon_1) + O({r_0}^{-2})| \\ &= \overline{c} + O({r_0}^{-2}) \leq \overline{c}. \end{aligned}$$

Mit $\int \frac{1}{r+r^3} dr = \frac{1}{2} ln(1+1/r^2)$ ist

$$\begin{aligned}
|Vol^N(\mathbf{S}_{r_0}(\mathbf{O})) - Vol^H(\mathbf{S}_{r_0}(\mathbf{a}_0))| &= |Vol^N(\mathbf{S}_{r_0}(\mathbf{O})) - Vol^H(\mathbf{S}_{r_0}(\mathbf{O}))| \\
&\leq \int_{S_{r_0}(\mathbf{O})} c(m){r_0}^{-3} \\
&\leq 4\pi c(m)\ ln(tanh(l_0)) = c(m).
\end{aligned}$$

Analog ist auch $|Vol^N(M_t) - Vol^H(M_t)| \leq c(m)$, und somit schließlich

$$\begin{aligned}
&|Vol^H(\mathbf{S}_{r_0(t)}(\mathbf{O})) - Vol^H(\mathbf{S}_{r_0(0)}(\mathbf{O}))| \leq \\
&\quad |Vol^H(\mathbf{S}_{r_0(t)}(\mathbf{O})) - Vol^H M_t^2| + |Vol^H M_t^2 - Vol^N M_t^2| \\
&\quad |Vol^N M_t^2 - Vol^N \mathbf{S}_{r_0(0)}(\mathbf{O}))| + |Vol^N \mathbf{S}_{r_0(0)}(\mathbf{O})) - Vol^H \mathbf{S}_{r_0(0)}(\mathbf{O}))| \\
&\quad \leq 2c(m) + \overline{c}.
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass, solange $kr_0(t) \geq r_0(0)$ für ein festes $k > 1$ ist, die Abschätzung der Proposition gilt. Und da wir mit $r_0(0)$ starten, haben wir die Propositon für genügend großes $r_0 > c(m, C_0 + B_2 + B_3)$ bewiesen. Es ist

$$\begin{aligned}
&|arcsinh(r_0(0)) - arcsinh(r_0(t))| \\
&\qquad \leq ln((2r_0 + 1/2r_0 + O({r_0}^{-3}))(k/2r_0 + O({r_0}^{-3}))) \\
&\qquad = ln(k + O({r_0}^{-2})) = ln(k) + O({r_0}^{-2}),
\end{aligned}$$

da $1/r_0(0) \geq k/r_0(t)$ gilt. Hieraus erhalten wir mit (3.1)

$$\begin{aligned}
(1+1/k)|r_0(0) - r_0(t)|r_0(0) &\leq |{r_0}^2(0) - {r_0}^2(t)| \\
&\leq ln(k) + O({r_0}^{-2}) + |Vol^H(\mathbf{S}_{r_0(t)}(\mathbf{O})) - Vol^H(\mathbf{S}_{r_0(0)}(\mathbf{O}))| \\
&\leq ln(k) + O({r_0}^{-2}) + 2c(m) + \overline{c} = c(k, m, \overline{c}).
\end{aligned}$$

D.h. $|r_0(0) - r_0(t)| \leq c(m, C_0 + B_2 + B_3)/r_0(0)$, falls wir zunächst $k = 2$ und dann $r_0 > c(m, k, C_0 + B_2 + B_3)$ wählen. □

Proposition 3.4 *Sei $M^2 \in \mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$ (für alle $t \in [0, T]$) eine Lösung von (r). Dann existiert eine numerische Konstante c, so dass für alle $t \in [0, T]$*

$$max_t[dist(\mathbf{O}, \mathbf{a}_0)] \leq \frac{c(m^{-1}+1)}{r_0}(C_0^2 + B_2 + B_3)$$

gilt, falls $r_0 \geq c(C_0 + B_1^2 + B_2 + B_3)$.

Beweis: Analog zu [HY95]. Sei r_0 zunächst so groß, dass die Voraussetzungen für Proposition 2.4 erfüllt sind. Sei $\mathbf{S}_{app.}$ die approximative Sphäre aus Proposition 2.4. Sei $D \geq 0$ und $(q_0, p_0), t > 0$ so, dass $max_{M_t}[dist(\mathbf{O}, \mathbf{P})] < \frac{D}{r_0} + r_0$ zum ersten Male verletzt wird. An diesem Punkt nimmt $r = dist(\mathbf{O}, \mathbf{P})$ sein Maximum an, und es gilt $< \dot{\gamma}_{\mathbf{O}}, \boldsymbol{\nu} >= 1$ ($\gamma_{\mathbf{O}}$ Geodäte durch $\mathbf{O}$; man benötigt die hyperbolische Richtung , da $dist$ die Abstandsfunktion in H^3 ist). Ferner wird in t_0 zum ersten Male dieser maximale Abstand erreicht, d.h. für die Geschwindigkeit in diesem Punkte gilt $(h - H) < \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}_H >_H \geq 0$. Der Winkel, der beiden Normalen an die Fläche M^2 bezüglich der hyperbolischen und der gestörten hyperbolischen Metrik ist von kleiner Ordnung, denn es gilt ($\mathbf{t}_i$ Tanagentialvektoren an M^2):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nu} &= \sum < \mathbf{t}_i, \boldsymbol{\nu} >_{\overline{g}} t_i + < \boldsymbol{\nu}_H, \boldsymbol{\nu} >_{\overline{g}} \boldsymbol{\nu}_H \\
&= \sum < \mathbf{t}_i, \boldsymbol{\nu} >_H t_i + O({r_0}^{-3}) + < \boldsymbol{\nu}_H, \boldsymbol{\nu} >_H \boldsymbol{\nu}_H \\
&= O({r_0}^{-3}) + < \boldsymbol{\nu}_H, \boldsymbol{\nu} >_H \boldsymbol{\nu}_H.
\end{aligned}$$

Andereseits ist $|\boldsymbol{\nu}| = 1 + O({r_0}^{-3})$, woraus sich $< \boldsymbol{\nu}_H, \boldsymbol{\nu} >_H = 1 + O({r_0}^{-3})$ ergibt. Es sei bemerkt, dass hierbei die Ordnung ${r_0}^{-3}$ nicht relevant ist, da wir lediglich benötigen, dass $< \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}_H >> 0$. Da das Killing-Vektorfeld $\mathbf{K}$ von einer hyperbolischen Isometrie herrührt, gilt im Punkte q_0
$< \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} >_H \geq \frac{1}{2}|\mathbf{K}|_H$ für $r_0 \geq c(C_0 + B_2 + B_3)$, d.h. $H \leq h$ in (q_0, t_0). Verwenden wir andererseits Proposition 2.4, dann erhalten wir für h:

$$\begin{aligned}
h &= \frac{1}{tanh(l)}(1 + \frac{4m}{{r_0}^3}) + \int \frac{24m}{{r_0}^3} < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} >_H d\mu + c(C_0^2 + B_2 + B_3){r_0}^{-4} \\
&= \frac{1}{tanh(l)}(1 + \frac{4m}{{r_0}^3}) + \int \frac{24m}{{r_0}^3} < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} >_H (1 + 3m{r_0}^{-3} + O({r_0}^{-4}))d\mu_H \\
&\qquad + c(C_0^2 + B_2 + B_3){r_0}^{-4} \\
&= \frac{1}{tanh(l)}(1 + \frac{4m}{{r_0}^3}) + c(m+1)(C_0^2 + B_2 + B_3){r_0}^{-3},
\end{aligned}$$

wegen des Divergenz-Theorems, und da M^2 keinen Rand besitzt. Für $H - h$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
H - h &\leq \frac{24m}{{r_0}^3} < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} >_H - c(m+1)(C_0^2 + B_2 + B_3){r_0}^{-4} \\
&\leq (12m|\mathbf{K}|_H - \frac{c(m+1)}{r_0}(C_0^2 + B_2 + B_3)){r_0}^{-3}.
\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir $|\mathbf{K}| < \frac{c(m^{-1}+1)}{r_0}(C_0^2 + B_2 + B_3)$. $\square$

3.2 Evolutionsgleichungen

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die für Flächen aus $\mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$ geltenden Ungleichungen für $|\overset{\circ}{A}|$ und $|\nabla \overset{\circ}{A}|$ unter dem volumenerhaltenden mittleren Krümmungsfluss ihre Gültigkeit behalten. Die umgebende Mannigfaltigkeit ist dabei asymptotisch hyperbolisch. Um die Evolution der spurfreien zweiten Fundamentalform und deren Ableitung in übersichtlicher Weise darstellen zu können, verwenden wir auch „spezielle" Normalkoordinaten, d.h. solche Koordinaten, für die (in einem Punkte) $g_{ij} = \delta_{ij}$ und $h_{ij} = diag(\lambda_i)$ gilt. Wir rechnen immer solange die Lösung existiert, und alle Abschätzungen sind unabhängig vom Zeitintervall. Es lassen sich aus der Evolutionsgleichung (r) die Evolutionen der induzierten Metrik, des Volumenelemente und der zweiten Fundamentalform herleiten.

Proposition 3.5 *Wir haben die Evolutionsgleichungen:*

$$
\begin{array}{rll}
(i) & \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} & = 2(h-H)h_{ij} \\
(ii) & \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\nu} & = \nabla H \\
(iii) & \frac{\partial}{\partial t} d\mu & = H(h-H)d\mu \\
(iv) & \frac{\partial}{\partial t} h_{ij} & = \nabla_i \nabla_j H + (h-H)h_{il}h_{lj} - (h-H)\overline{R}_{3i3j},
\end{array}
$$

wobei $d\mu$ das Maß auf M_t ist.

Beweis: [HY95] □

Lemma 3.6 *Für eine Hyperfläche der Dimension 2 $M^2 \in N^3$ gelten in speziellen Normalkoordinaten (in einem Punkt), bezüglich der die zweite Fundamentalform Diagonalgestalt hat, folgende Identitäten (vgl [HY95] 3.8):*

$$
\begin{aligned}
\overset{\circ}{h}_{ij} \overline{R}_{3i3j} &= \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)(\overline{R}_{11} - \overline{R}_{22}) \\
h_{ij}h_{jl}\overline{R}_{lmim} - h_{ij}h_{lm}\overline{R}_{limj} &= (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \overline{R}_{1212} = 2|\overset{\circ}{A}|\overline{\sigma}_T \\
h_{ij}(\overline{\nabla}_j \overline{R}_{3lil} - \overline{\nabla}_l \overline{R}_{3ijl}) &= \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)(\overline{\nabla}_1 \overline{R}_{31} - \overline{\nabla}_2 \overline{R}_{32}) \\
-\overset{\circ}{h}_{jl} \overline{R}_{lmim} - \overset{\circ}{h}_{il} \overline{R}_{lmjm} + 2\overset{\circ}{h}_{lm} \overline{R}_{limj} &= -4\overset{\circ}{h}_{ij} \overline{R}_{1212}.
\end{aligned}
$$

Dabei stehen 1 und 2 für die Tangentialrichtungen und 3 für die Normalenrichtung. $\overline{\sigma}_T$ ist die Schnittkrümmung in Tangentialrichtung an die Hyperfläche. Die letzte Gleichung gilt auch allgemein in Räumen konstanter Krümmung (insbesondere in H^{n+1}):

$$
-\overset{\circ}{h}_{jl} \overline{R}_{lmim} - \overset{\circ}{h}_{il} \overline{R}_{lmjm} + 2\overset{\circ}{h}_{lm} \overline{R}_{limj} = -2nK\overset{\circ}{h}_{ij} = -2n\overset{\circ}{h}_{ij} \overline{R}_{1212}.
$$

Beweis: Wir rechnen exemplarisch die letzte Gleichung nach:

$$\begin{aligned}
-\overset{\circ}{h}_{jl}\,\overline{R}_{lmim} &= -(\delta_{jl}\,\overset{\circ}{\lambda}_j)\overline{R}_{lmim} = -\,\overset{\circ}{\lambda}_j\,\overline{R}_{jmim} = \overset{\circ}{\lambda}_j\,\delta_{ij}(\overline{R}_{2121}\delta_{i2} + \overline{R}_{1212}\delta_{i1}) \\
&= \overset{\circ}{\lambda}_j\,\delta_{ij}\overline{R}_{1212} = -\,\overset{\circ}{h}_{ij}\,\overline{R}_{1212}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\,\overset{\circ}{h}_{lm}\,\overline{R}_{limj} &= 2\,\overset{\circ}{\lambda}_m\,\overline{R}_{mimj} = 2(\overset{\circ}{\lambda}_1\,\overline{R}_{1i1j} + \overset{\circ}{\lambda}_2\,\overline{R}_{2i2j}) = -2(\overset{\circ}{\lambda}_2\,\overline{R}_{1i1j} + \overset{\circ}{\lambda}_1\,\overline{R}_{2i2j}) \\
&= -2\overline{R}_{1212}\delta_{ij}(\overset{\circ}{\lambda}_2\,\delta_{i2} + \overset{\circ}{\lambda}_1\,\delta_{i1}) = -2\,\overset{\circ}{\lambda}_j\,\delta_{ij}\overline{R}_{1212} = -2\,\overset{\circ}{h}_{ij}\,\overline{R}_{1212}.
\end{aligned}$$

Da der Riemann-Tensor in Räumen konstanter Krümmung die Gestalt $\overline{R}_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$ hat (u.a. also $\overline{R}_{1212} = K$), gilt mit

$$\begin{aligned}
-\,\overset{\circ}{h}_{jl}\,R_{lmim} &= -\,\overset{\circ}{h}_{jl}\,K(g_{li}g_{mm} - g_{ml}g_{mi}) = -(n-1)K\,\overset{\circ}{h}_{ij} \text{ und} \\
2\,\overset{\circ}{h}_{lm}\,R_{limj} &= 2\,\overset{\circ}{h}_{lm}\,K(g_{lm}g_{ij} - g_{lj}g_{im}) = -2K\,\overset{\circ}{h}_{ij},
\end{aligned}$$

dass

$$-\,\overset{\circ}{h}_{jl}\,R_{lmim} - \overset{\circ}{h}_{il}\,R_{lmjm} + 2\,\overset{\circ}{h}_{lm}\,R_{limj} = -2nK|\nabla\,\overset{\circ}{A}\,|^2$$

ist. □

Weiter betrachten wir die Evolution der spurfreien zweiten Fundamentalform.

Lemma 3.7 *Für eine Fläche aus $\mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$ gilt folgende Evolutionsgleichung:*

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)|\,\overset{\circ}{A}\,|^2 &= -2|\nabla\,\overset{\circ}{A}\,|^2 + 2|\,\overset{\circ}{A}\,|^2(|A|^2 + \overline{R}ic(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}) - 4\overline{\sigma}_T - \frac{2}{n}hH) \\
&\quad -2h\,\overset{\circ}{h}_{ij}\,\overline{R}_{3i3j} - 2h_{ij}(\overline{\nabla}_i\overline{R}_{3lil} - \overline{\nabla}_l\overline{R}_{3ijl}).
\end{aligned}$$

Dabei ist $\overline{\sigma}_T$ die Schnittkrümmung in Tangentialrichtung an die Hyperfläche.

Beweis: Wie in [HY95] berechnet, gilt:

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)|A|^2 &= -2|\nabla A|^2 + 2|A|^4 - 2htr(A^3) - 2hh_{ij}\overline{R}_{3i3j} + 2|A|^2\overline{R}ic(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}) \\
&\quad -4(h_{ij}h_{jl}\overline{R}_{lmim} - h_{ij}h_{lm}\overline{R}_{limj}) - 2h_{ij}(\overline{\nabla}_i\overline{R}_{3lil} - \overline{\nabla}_l\overline{R}_{3ijl}) \\
(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)H &= -(h-H)(|A|^2 + \overline{R}ic(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})) \\
(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)H^2 &= -2|\nabla H|^2 - 2H(h-H)(|A|^2 + \overline{R}ic(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})).
\end{aligned}$$

Zusammen also

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta)|\mathring{A}|^2 &= -2|\nabla\mathring{A}|^2+2|\mathring{A}|^2(|A|^2+\overline{Ric}(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}))\\
&\quad+\frac{2}{n}h(H|A|^2-ntr(A^3))-2h\,\mathring{h}_{ij}\,\overline{R}_{3i3j}\\
&\quad-4(h_{ij}h_{jl}\overline{R}_{lmim}-h_{ij}h_{lm}\overline{R}_{limj})-2h_{ij}(\overline{\nabla}_i\overline{R}_{3lil}-\overline{\nabla}_l\overline{R}_{3ijl})\\
&= -2|\nabla\mathring{A}|^2+2|\mathring{A}|^2(|A|^2+\overline{Ric}(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})-4\overline{R}_{1212}-\frac{2}{n}hH)\\
&\quad-2h\,\mathring{h}_{ij}\,\overline{R}_{3i3j}-2h_{ij}(\overline{\nabla}_i\overline{R}_{3lil}-\overline{\nabla}_l\overline{R}_{3ijl})
\end{aligned}
$$

wegen Lemma 3.6, und da (für $n=2$)

$$H|A|^2-2tr(A^3)=(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1^2+\lambda_2^2)-2(\lambda_1^3+\lambda_2^3)=-2|\mathring{A}|^2H$$

gilt. $\square$

Bemerkung:
(i) In speziellen Normalkoordinaten gilt:

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta)|\mathring{A}|^2 &= -2|\nabla\mathring{A}|^2+2|\mathring{A}|^2(|A|^2+\overline{Ric}(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})-4\overline{R}_{1212}-\frac{2}{n}hH)\\
&\quad-(\lambda_1-\lambda_2)(h(\overline{R}_{11}-\overline{R}_{22})+(\overline{\nabla}_1\overline{R}_{31}-\overline{\nabla}_2\overline{R}_{32})).
\end{aligned}
$$

(ii) Im hyperbolischen Raum H^{n+1} gilt für die Krümmungsterme:

$$
\begin{aligned}
\overline{Ric}(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}) &= 2K \quad \text{und} \quad \overline{R}_{1212}=K\\
\overline{R}_{11}-\overline{R}_{22} &= \overline{\nabla}_1\overline{R}_{31}-\overline{\nabla}_2\overline{R}_{32}=0
\end{aligned}
$$

also

$$(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta)|\mathring{A}|^2 = -2|\nabla\mathring{A}|^2+2|\mathring{A}|^2(|A|^2-nK-hH).$$

Lemma 3.8 *Sei M_t eine glatte Lösung von (r) welche für alle $t\in[0,T]$ in $\mathcal{B}(B_1,B_2,B_3)$ liegt. Dann existiert eine numerische Konstante c, so dass für $r_0\geq c(m,C_0+B_1^2+B_2+B_3)$ gilt:*

$$
\begin{aligned}
(i) &\qquad |2h\,\mathring{h}_{ij}\,\overline{R}_{3i3j}|\leq cC_0|\mathring{A}|{r_0}^{-6}\\
(ii) &\qquad |h_{ij}(\nabla_i\overline{R}_{3lil}-\nabla_l\overline{R}_{3ijl})|\leq cC_0|\mathring{A}|{r_0}^{-6}
\end{aligned}
$$

Beweis: Zu (i): Mit $\mathring{h}_{ij}\,\overline{R}_{3i3j}=\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2)(\overline{R}_{11}-\overline{R}_{22})$ in speziellen Normalkoordinaten (Lemma 3.6) gilt

$$|\mathring{h}_{ij}\,\overline{R}_{3i3j}| = \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathring{A}||\overline{R}_{11}-\overline{R}_{22}|=\frac{1}{\sqrt{2}}|\mathring{A}||\overline{R}_{11}^{MP}-\overline{R}_{22}^{MP}|,$$

da sich der hyperbolische Anteil weghebt. Nun ist (i=1,2)

$$\begin{aligned}
\overline{R}_{ii}^{MP} &= \overline{R}_{\phi\phi}^{M}(<\mathbf{e}_{t_i},\mathbf{e}_\phi>^2+<\mathbf{e}_{t_i},\mathbf{e}_\psi>^2)+<\mathbf{e}_{t_i},\mathbf{e}_r>^2\overline{R}_{rr}^{M}+O({r_0}^{-6})\\
&= \frac{4m}{{r_0}^3}(1+<\mathbf{e}_{t_i},\mathbf{e}_r>^2)+\frac{3m}{{r_0}^5}(1-2<\mathbf{e}_{t_i},\mathbf{e}_r>^2)+O({r_0}^{-6})
\end{aligned}$$

mit $|O({r_0}^{-6})|\leq cC_0{r_0}^{-6}$. Da $|<\mathbf{e}_{t_i},\mathbf{e}_r>|^2\leq B_1{r_0}^{-4}$ schließlich:

$$|2h\,\mathring{h}_{ij}\,\overline{R}_{3i3j}|\leq c(C_0+B_1)|\mathring{A}|{r_0}^{-7}\leq cC_0|\mathring{A}|{r_0}^{-6}.$$

Zu (ii): Hier verwenden wir die Gleichung (spezielle Normalkoordinten s.o.)

$$\begin{aligned}
|h_{ij}(\overline{\nabla}_i\overline{R}_{3lil}-\overline{\nabla}_l\overline{R}_{3ijl})| &= |\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2)(\overline{\nabla}_1\overline{R}_{31}-\overline{\nabla}_2\overline{R}_{32})|\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathring{A}||(\overline{\nabla}_1\overline{R}_{31}-\overline{\nabla}_2\overline{R}_{32})|.
\end{aligned}$$

Wir betrachten lediglich $|h_{ij}(\overline{\nabla}_i\overline{R}_{3lil}^M-\overline{\nabla}_l\overline{R}_{3ijl}^M)|$ (vgl. Bemerkung). Für $\alpha=\phi,\theta,r$ sind in skalierten Polarkoordinaten (vgl Lemma 3.10) die Vektoren $\mathbf{e}_\alpha$ alle von der Länge eins und es ist

$$\begin{aligned}
\nabla_1 R_{13}^M &= (\nabla_{\mathbf{t}_1}R^M)(\boldsymbol{\nu},\mathbf{t}_1)+R^M(\nabla_{\mathbf{t}_1}\boldsymbol{\nu},\mathbf{t}_1)+R^M(\boldsymbol{\nu},\nabla_{\mathbf{t}_1}\mathbf{t}_1)\\
&= (\nabla_{\mathbf{t}_1}R_{\alpha\alpha}^M)<\boldsymbol{\nu},\mathbf{e}_\alpha><\mathbf{t}_1,\mathbf{e}_\alpha>+R^M(\lambda_{ij}\mathbf{t}_i,\mathbf{t}_1)+R^M(\boldsymbol{\nu},\lambda_{\mathbf{t}_1}\boldsymbol{\nu})\\
&= (\nabla_{\mathbf{t}_1}R_{\alpha\alpha}^M)<\boldsymbol{\nu},\mathbf{e}_\alpha><\mathbf{t}_1,\mathbf{e}_\alpha>\\
&\qquad +\lambda_1R^M(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_1)+\lambda_2R^M(\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_1)+\lambda_1R^M(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}),
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
|\nabla_1R_{13}^M-\nabla_2R_{23}^M| &= |(\nabla_{\mathbf{t}_1}(R_{\alpha\alpha}^M)<\mathbf{t}_1,\mathbf{e}_\alpha><\boldsymbol{\nu},\mathbf{e}_\alpha>\\
&\quad -\nabla_{\mathbf{t}_2}(R_{\alpha\alpha}^M)<\mathbf{t}_2,\mathbf{e}_\alpha><\boldsymbol{\nu},\mathbf{e}_\alpha>)\\
&\quad +\lambda_1R^M(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_1)-\lambda_2R^M(\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_2)\\
&\quad +(\lambda_2-\lambda_1)R^M(\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_1)+(\lambda_1-\lambda_2)R^M(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})|\\
&\leq |\mathring{A}|(|R^M(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_1)|+|R^M(\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_1)|+|R^M(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})|)\\
&\qquad\qquad +cC_0{r_0}^{-6},\\
\text{da}\quad |\nabla_iR_{\alpha\alpha}^M| &= |<\mathbf{t}_i,\mathbf{e}_r>\nabla_{\mathbf{e}_r}R_{\alpha\alpha}^M+<\mathbf{t}_i,\mathbf{e}_\Omega>\frac{1}{r}\nabla_{\mathbf{e}_\Omega}R_{\alpha\alpha}^M|\\
&= |<\mathbf{t}_i,\mathbf{e}_r>\nabla_{\mathbf{e}_r}R_{\alpha\alpha}^M|\leq c(m,B_1){r_0}^{-5}
\end{aligned}$$

und nach (i) bereits $|R_{11}^M-R_{22}^M|\leq cC_0r^{-6}$ gilt. Mit $|R_{\alpha\alpha}^M|\leq c(m){r_0}^{-3}$ und da die Ableitungen in Tangentialrichtung $\mathbf{t}_i$ für den Term R^P eine Ordnung mehr ergeben (unabhängig von B_1), folgt schließlich die Behauptung. $\square$

Bemerkung:

Wir zeigen exemplarisch, dass wir den hyperbolischen Anteil bei solchen Ableitungen nicht betrachten müssen, da sich dieser weghebt. Es gilt für zwei konforme Metriken $\overline{g}$, g

$$\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Psi^{-1}(\delta^{\alpha}_{\beta}\partial_{\gamma}\Psi + \delta^{\alpha}_{\gamma}\partial_{\beta}\Psi + \overline{g}_{\beta\gamma}\overline{g}^{\alpha\rho}\partial_{\rho}\Psi),$$

$$\begin{aligned}
\nabla_1 R^H_{31} &= \partial_1 R^H_{31} + \overline{\Gamma}^l_{13} R^H_{l1} + \overline{\Gamma}^l_{11} R^H_{3l} \\
&= \partial_1 R^H_{31} + \Gamma^l_{13} R^H_{l1} + \Gamma^l_{11} R^H_{3l} + \Psi^{-1}(R_{11}\partial_3\Psi + R_{13}\partial_1\Psi - \overline{g}_{13}\partial_\rho\Psi \\
&\qquad +R_{31}\partial_1\Psi + R_{31}\partial_1\Psi - \overline{g}_{11}\partial_\rho\Psi R_{\rho 3}) \\
&= \Psi^{-1}(R_{11}\partial_3\Psi + R_{13}\partial_1\Psi - \overline{g}_{13}\partial_\rho\Psi \\
&\qquad +R_{31}\partial_1\Psi + R_{31}\partial_1\Psi - \overline{g}_{11}\partial_\rho\Psi R_{\rho 3}).
\end{aligned}$$

Wegen $\overline{g}_{ij} = 0$, $R^H_{ij} = 0$ für $i \neq j$, $g_{11} = g_{22}$ und $R^H_{11} = R^H_{22}$ ist nun $\nabla_1 R^H_{31} - \nabla_2 R^H_{32} = 0$.

Wir können jetzt die Abschätzung für $|\overset{\circ}{A}|$ zeigen.

Proposition 3.9 *Sei M_t eine glatte Lösung von (r), welche für alle $t \in [0,T]$ in $\mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$ liegt. Dann existiert eine numerische Konstante c, so dass für $r_0 \geq c(C_0^2 + B_1^2 + B_2 + B_3)$ die folgende Abschätzung gilt:*

$$|\overset{\circ}{A}| \leq cC_0{r_0}^{-4} \qquad \textit{für alle} \quad t \in [0,T].$$

Beweis: Sei $M_t \in \mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$, dann gilt auf ganz M_t

$$|\lambda_i - \lambda_0| = |\lambda_i - 1 - \frac{1}{2{r_0}^2}| \leq \; c(C_0 + B_2 + B_3){r_0}^{-4}$$

für $r_0 \geq c(C_0 + B_2 + B_3)$. Aus $|\nabla H| \leq c(n)|\nabla \overset{\circ}{A}| \leq c(n)B_3{r_0}^{-5}$ folgt für die mittlere Krümmung

$$\begin{aligned}
|H_{min} - H_{max}| &\leq c(n)B_3{r_0}^{-5} diam(M_t) = c(n)B_3{r_0}^{-4} \\
\text{bzw.} \quad |h - H| &\leq c(n)B_3{r_0}^{-4}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
|H^2 - 4\lambda_0| &\leq c(C_0 + B_2 + B_3){r_0}^{-4} \\
||A|^2 - 2\lambda_0| &\leq c(C_0 + B_2 + B_3){r_0}^{-4} \\
|hH - H^2| &= |H||h - H| \leq cB_3{r_0}^{-4}.
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich dann schließlich

$$\begin{aligned} ||A|^2 + 2 - hH - 2(1-\lambda_0)| &\leq c(C_0 + B_2 + B_3){r_0}^{-4} \\ |A|^2 + 2 - hH &\leq -\frac{1}{2}{r_0}^{-2} + c(C_0 + B_2 + B_3){r_0}^{-4} < 0, \end{aligned}$$

falls $r_0 \geq c(C_0 + B_2 + B_3)$. Mit den Abschätzungen aus Lemma 3.8

$$\begin{aligned} |h_{ij}(\overline{\nabla}_i \overline{R}_{3lil} - \overline{\nabla}_l \overline{R}_{3ijl})| &\leq cC_0 | \mathring{A} | {r_0}^{-6} \\ |h \mathring{h}_{ij} \overline{R}_{3i3j}| &\leq cC_0 | \mathring{A} | {r_0}^{-6} \end{aligned}$$

erhält man insgesamt für die Evolution von $| \mathring{A} |^2$

$$\begin{aligned} (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta) | \mathring{A} |^2 &= -|\nabla \mathring{A} |^2 + 2 | \mathring{A} |^2 (|A|^2 + 2 - hH) + cC_0 | \mathring{A} | {r_1}^{-6} \\ &\leq -c | \mathring{A} |^2 {r_0}^{-2} + cC_0 | \mathring{A} | {r_0}^{-6}. \end{aligned}$$

Wir argumentieren nun wie in [HY95], d.h. das Abfallverhalten an $| \mathring{A} |^2$ bleibt unter dem volumenerhaltenden MKF invariant. □

Lemma 3.10 *Seien* $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, *die Tangentialvektoren auf* M^2 *und* $\mathbf{e}_r$ *der Radialvektor mit Länge eins in Polarkoordinaten des* H^3, *dann gilt*

$$|\nabla_{\mathbf{t}_i} < \mathbf{e}_{r_0}, \mathbf{t}_j > | \leq c(B_1, m){r_0}^3,$$

falls $r_0 > c(C_0 + B_1^2 + B_2 + B_3)$ *ist.*

Beweis: Wir müssen hier die beiden Fälle $i = j$ und $i \neq j$ unterscheiden. Zuerst $i = j$, es gilt

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{t}_k} < \mathbf{e}_r, \mathbf{t}_i > &= < \nabla_{\mathbf{t}_k} \mathbf{e}_r, \mathbf{t}_i > + < \mathbf{e}_r, \nabla_{\mathbf{t}_k} \mathbf{t}_i > \\ &= < \nabla_{\mathbf{t}_k} \mathbf{e}_r, \mathbf{t}_i > + h_{ki} + O({r_0}^{-4}), \qquad |O({r_0}^{-4})| \leq B_1^2 {r_0}^{-4}. \end{aligned}$$

Seien $p(\mathbf{t}_i)$ die Projektionen der Tangentialvektoren $\mathbf{t}_i$ auf die Koordinatensphären in H^3. Dann gilt wegen $< \boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_r >= 1 + O({r_0}^{-4})$, dass

$$< p(\mathbf{t}_1), \mathbf{t}_1 >=< p(\mathbf{t}_2), \mathbf{t}_2 >= 1 + O({r_0}^{-4})$$

ist. Wir wählen die Winkelrichtungen in den äußeren Polarkoordinaten nun so, dass $\mathbf{e}_\phi = p(\mathbf{t}_1)$ und $< \mathbf{t}_2, \mathbf{e}_\theta >= 1 + O({r_0}^{-4})$ (dies entspricht $\mathbf{e}_\theta \simeq p(\mathbf{t}_2)$, da $< p(\mathbf{t}_2), \mathbf{e}_\phi >= O({r_0}^{-2})$) in einem Punkte p_0 gilt. o.B.d.A. seien $\mathbf{e}_\phi$ und $\mathbf{e}_\theta$ exakt normiert, d.h. wir skalieren die kanonischen Polarkoordinaten des

H^3 in Winkelrichtung mit dem konstanten Faktor $d = sinh(dist(\mathbf{P},\mathbf{O}))$, so dass $\mathbf{e}_\phi$ und $\mathbf{e}_\theta$ auf $\mathbf{S}_r$ die Länge eins haben, ferner sei $|\mathbf{e}_d| = 1$, d.h. $ds^2 = dl^2 + \frac{sinh(l^2)}{d^2} d\Omega^2$. Dann ist

$$1 = 1 + O({r_0}^{-4}) =< p(\mathbf{t}_1), \mathbf{t}_2 >^2 + < p(\mathbf{t}_1), \boldsymbol{\nu} >^2,$$

also

$$\begin{aligned} < \mathbf{e}_\phi, \mathbf{t}_2 > &= < p(\mathbf{t}_1), \mathbf{t}_2 >= O({r_0}^{-2}) \\ < \mathbf{e}_\theta, \mathbf{t}_1 > &= < p(\mathbf{t}_2), \mathbf{t}_1 >= O({r_0}^{-2}). \end{aligned}$$

Wichtig hierbei ist die Tatsache, dass in $O({r_0}^{-2})$ aus Proposition 2.4 immer die Konstante B_1 enthalten ist. Sei o.B.d.A. $i = 1$, dann ist

$$\begin{aligned} < \mathbf{t}_1, \nabla^H_{\mathbf{t}_1} \mathbf{e}_r > &= < \mathbf{e}_\phi, \nabla^H_{\mathbf{e}_\phi} \mathbf{e}_r > + < \mathbf{e}_\phi, \nabla^H_{\mathbf{e}_\theta} \mathbf{e}_r >< \mathbf{e}_\theta, \mathbf{t}_1 > \\ &\quad + < \mathbf{e}_\phi, \nabla^H_{\mathbf{e}_r} \mathbf{e}_r >< \mathbf{e}_r, \mathbf{t}_1 > + < \mathbf{e}_\theta, \nabla^H_{\mathbf{e}_\phi} \mathbf{e}_r >< \mathbf{e}_\theta, \mathbf{t}_1 > \\ &\quad + < \mathbf{e}_r, \nabla^H_{\mathbf{e}_\phi} \mathbf{e}_r >< \mathbf{e}_r, \mathbf{t}_1 > + O({r_0}^{-4}) \\ &= < \mathbf{e}_\phi, \nabla^H_{\mathbf{e}_\phi} \mathbf{e}_r > \\ &\quad + (< \mathbf{e}_\phi, \nabla^H_{\mathbf{e}_r} \mathbf{e}_\theta > + < \mathbf{e}_\theta, \nabla^H_{\mathbf{e}_r} \mathbf{e}_\phi >) < \mathbf{e}_\theta, \mathbf{t}_1 > \\ &\quad + (< \mathbf{e}_r, \nabla^H_{\mathbf{e}_r} \mathbf{e}_\phi > + < \mathbf{e}_\phi, \nabla^H_{\mathbf{e}_r} \mathbf{e}_r >) < \mathbf{e}_r, \mathbf{t}_1 > + O({r_0}^{-4}) \\ &= < \mathbf{e}_\phi, \nabla^H_{\mathbf{e}_\phi} \mathbf{e}_r > + \nabla^H_{\mathbf{e}_r} (< \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\theta >) < \mathbf{e}_\theta, \mathbf{t}_1 > \\ &\qquad\qquad + \nabla^H_{\mathbf{e}_r} (< \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi >) < \mathbf{e}_r, \mathbf{t}_1 > + O({r_0}^{-4}) \\ &= < \mathbf{e}_\phi, \nabla^H_{\mathbf{e}_\phi} \mathbf{e}_r > + O({r_0}^{-4}) = \frac{1}{tanh(l)} + O({r_0}^{-4}), \end{aligned}$$

da $\frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{e}_r} |\mathbf{e}_\phi|^2 = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{e}_r} |sinh(l)/r_0|^2 = \frac{1}{tanh(l)} = \frac{1}{tanh(l_0)} + O({r_0}^{-3})$und $\frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{e}_r} |\mathbf{e}_r|^2 = 0$ gilt. Und wir erhalten mit $|\nabla^{HS} - \nabla^H| \leq c(m, B_1) {r_0}^{-3}$,

$$|\nabla_{\mathbf{t}_i} < \mathbf{e}_{r_0}, \mathbf{t}_j > -(h_{ij} - \frac{1}{tanh(l_0)} g_{ij})| \leq c(m, B_1^2) {r_0}^{-3}.$$

Mit $|h_{ij} - \frac{1}{tanh(l_0)} g_{ij}| \leq c(m) {r_0}^{-3}$ also die Behauptung für $i = j$. Ist $i \neq j$, so haben wir (o.B.d.A. $i = 1$ und $j = 2$)

$$\begin{aligned} < \nabla_{\mathbf{t}_1} \mathbf{e}_r, \mathbf{t}_2 > &= < \nabla_{\mathbf{e}_\phi} \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta > \\ &\quad + < \nabla_{\mathbf{e}_\phi} \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi >< \mathbf{e}_\phi, \mathbf{t}_1 >< \mathbf{e}_\phi, \mathbf{t}_2 > \\ &\quad + < \nabla_{\mathbf{e}_\phi} \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_r >< \mathbf{e}_\phi, \mathbf{t}_1 >< \mathbf{e}_r, \mathbf{t}_2 > \\ &\quad + < \nabla_{\mathbf{e}_\theta} \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta >< \mathbf{e}_\theta, \mathbf{t}_1 >< \mathbf{e}_\theta, \mathbf{t}_2 > \\ &\quad + < \nabla_{\mathbf{e}_r} \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta >< \mathbf{e}_r, \mathbf{t}_1 >< \mathbf{e}_\theta, \mathbf{t}_2 > + O({r_0}^{-4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \; <\nabla_{\mathbf{e}_\phi}\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta> \\
&\quad + <\nabla_{\mathbf{e}_\phi}\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi>< \mathbf{e}_\phi, \mathbf{t}_1 >< \mathbf{e}_\phi, \mathbf{t}_2> \\
&\quad + <\nabla_{\mathbf{e}_\theta}\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta>< \mathbf{e}_\theta, \mathbf{t}_1 >< \mathbf{e}_\theta, \mathbf{t}_2> + O({r_0}^{-4}) \\
&= \; <\nabla_{\mathbf{e}_\phi}\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta> + O({r_0}^{-4}) \\
&\quad + <\nabla_{\mathbf{e}_\theta}\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta> (< \mathbf{e}_\phi, \mathbf{t}_1 >< \mathbf{e}_\phi, \mathbf{t}_2> + < \mathbf{e}_\theta, \mathbf{t}_1 >< \mathbf{e}_\theta, \mathbf{t}_2>) \\
&= \; <\nabla_{\mathbf{e}_\phi}\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta> + O({r_0}^{-4}) = O({r_0}^{-4}).
\end{aligned}$$

Da $< \mathbf{e}_r, \nabla_{\mathbf{e}_r}\mathbf{e}_\theta >= \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{e}_\theta} < \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_r >= 0$, ${}^{H^3}\Gamma^r_{\phi\theta} = 0$ und der Feststellung, dass

$$\begin{aligned}
0 =< \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 > \; &= \; < \mathbf{t}_1, \mathbf{e}_\phi >< \mathbf{t}_2, \mathbf{e}_\phi > + < \mathbf{t}_1, \mathbf{e}_\theta >< \mathbf{t}_2, \mathbf{e}_\theta > \\
&\qquad + < \mathbf{t}_1, \mathbf{e}_r >< \mathbf{t}_2, \mathbf{e}_r > \\
&= \; < \mathbf{t}_1, \mathbf{e}_\phi >< \mathbf{t}_2, \mathbf{e}_\phi > + < \mathbf{t}_1, \mathbf{e}_\theta >< \mathbf{t}_2, \mathbf{e}_\theta > + O({r_0}^{-4})
\end{aligned}$$

gilt, folgt mit $h_{ij} = 0$ für $i \neq j$ die Behauptung für diesen Fall. □

Wir berechnen nun die Abschätzung für die Evolution der Ableitung der zweiten Fundamentalform. Zunächst die folgenden technischen Lemmata.

Lemma 3.11 *Es gelten folgende Abschätzungen:*

$$\begin{aligned}
(\overline{R}ic(\nu,\nu) - 2n\overline{R}_{1212} - \frac{1}{n}H^2)|\nabla \overset{\circ}{A}|^2 \; &\leq \; -|\nabla \overset{\circ}{A}|^2 {r_0}^{-2} \\
|\overset{\circ}{h}_{ij} \nabla_k(\overline{R}ic(\nu,\nu) - 2n\overline{R}_{1212})\nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij}| \; &\leq \; cC_0|\nabla \overset{\circ}{A}|{r_0}^{-7} \\
|h\nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} \nabla_k(\overline{R}_{3i3j} - \frac{1}{n}\overline{R}ic(\nu,\nu)g_{ij})| \; &\leq \; cC_0|\nabla \overset{\circ}{A}|{r_0}^{-7} \\
|\nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} \nabla_k[\overline{\nabla}_j\overline{R}_{3lil} + \overline{\nabla}_l\overline{R}_{3ijl}]| \; &\leq \; cC_0|\nabla \overset{\circ}{A}|{r_0}^{-7}
\end{aligned}$$

für $r_0 > c(m, C_0^2 + B_1^2 + B_2 + B_3)$.

Beweis: Für die erste Ungleichung beachten wir, dass für den hyperbolischen Anteil $\overline{R}^H$: $\overline{R}ic^H(\nu,\nu) = n\overline{R}^H_{1212} = nK$ gilt, d.h. die Klammer vereinfacht sich zu

$$(-nK - \frac{1}{n}H^2).$$

Mit $H^2 > n^2(-K + {r_0}^{-2}/2)$ für alle $r_0 > c(B_1 + B_2)$ hat dieser Term ein negatives Vorzeichen: $-\frac{n}{2{r_0}^2}$. Für den Restanteil der Krümmung in N^3 gilt $|\overline{R}ic^{MP}| \leq cC_0{r_0}^{-3}$. Mit $r_0 > c(C_0 + B_2 + B_3)$ folgt also diese Abschätzung. Für die zweite Abschätung haben wir

$$\begin{aligned}
|\overline{R}ic(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_i)| \; &\leq \; c(m)B_1{r_0}^{-5}, \text{und} \\
|\nabla_{\mathbf{e}_r}(\overline{R}ic(\nu,\nu)| \; &= \; |2\overline{R}ic(\nabla_{\mathbf{e}_r}\nu, \nu)| = |2h_{ik}\overline{R}ic(\mathbf{e}_i,\nu)| \leq c(m)B_1{r_0}^{-5},
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}|(\nabla_k \overline{R}ic)(\nu,\nu)| &= |<\mathbf{e}_{t_i},\mathbf{e}_r> \nabla_{\mathbf{e}_r}\overline{R}ic(\nu,\nu) + <\mathbf{e}_{t_i},\mathbf{e}_\Omega> \frac{1}{r}\nabla_\Omega \overline{R}ic(\nu,\nu)| \\ &\leq c(m)B_1 {r_0}^{-5}.\end{aligned}$$

Analog ergibt sich $|\overline{R}_{1212}| \leq c(m){r_0}^{-5}$, also mit $|\overset{\circ}{A}| \leq B_2 {r_0}^{-4}$:

$$\begin{aligned}&| \overset{\circ}{h}_{ij} \nabla_k(\overline{R}ic(\nu,\nu) - 2n\overline{R}_{1212})\nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} | \\ &\qquad \leq |\overset{\circ}{A}||\nabla_k(\overline{R}ic^M(\nu,\nu) - 2n\overline{R}^M_{1212})||\nabla \overset{\circ}{A}| \\ &\qquad \leq c(m, B_1 B_2)|\nabla \overset{\circ}{A}|{r_0}^{-9}.\end{aligned}$$

Die dritte Abschätzung enthält $\overline{R}_{3i3j}$ (den hyperbolischen Anteil brauchen wir nicht zu betrachten, da $\nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij}$ spurfrei ist), d.h.

$$\begin{aligned}\overline{R}^M_{3i3j} &= (\overline{R}^M_{33} g_{ij} - \overline{R}^M_{3j} g_{i3} - \overline{R}^M_{i3} g_{3j} + \overline{R}^M_{ij} g_{33}) - \frac{1}{2}\overline{R}^M(g_{33}g_{ij} - g_{3i}g_{3j}) \\ &= \overline{R}^M_{ij}, \quad \text{mit} \\ \nabla_k \overline{R}^M_{ij} &= \nabla_k(\overline{R}^M_{\phi\phi}(g_{ij} - 3<\mathbf{e}_r,\mathbf{t}_i><\mathbf{e}_r,\mathbf{t}_j>)) \\ &= (\nabla_k \overline{R}^M_{\phi\phi})(g_{ij} - 3<\mathbf{e}_r,\mathbf{t}_i><\mathbf{e}_r,\mathbf{t}_j>) \\ &\quad +3\overline{R}^M_{\phi\phi}(\nabla_k(<\mathbf{e}_r,\mathbf{t}_i>)<\mathbf{e}_r,\mathbf{t}_j> - \nabla_k(<\mathbf{e}_r,\mathbf{t}_j>)<\mathbf{e}_r,\mathbf{t}_i>)\end{aligned}$$

und $|\nabla_k <\mathbf{e}_r,\mathbf{t}_i>| \leq c(m,B_1){r_0}^{-3}$ nach Lemma 3.10, sowie $|R_{\phi\phi}| \leq c(m,C_0){r_0}^{-3}$ also:

$$|\nabla_k \overline{R}^M_{ij} - (\nabla_k \overline{R}^M_{\phi\phi})g_{ij}| \leq c(m, C_0 + B_1^2){r_0}^{-8},$$

was schließlich, da $\nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij}$ spurfrei ist, auf

$$|\nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} \nabla_k \overline{R}^M_{ij}| \leq |\nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij}| c(m, C_0 + B_1^2){r_0}^{-8}$$

führt. Dies ist die dritte Abschätzung. Die letzte Ungleichung ergibt sich analog zu Lemma 3.8 (ii). □

Wir bezeichnen mit

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{A} &= \overset{\circ}{h}_{ij} := h_{ij} - \frac{H}{n}g_{ij} \\ \tilde{A} &= \tilde{h}_{ij} := h_{ij} - \sqrt{-K}g_{ij}\end{aligned}$$

die spurfreie und „reduzierte" zweite Fundamentalform. Dabei gilt $\overset{\circ}{\tilde{h}}_{ij} = \overset{\circ}{h}_{ij}$. Da für diese Flächen die Eigenwerte der zweiten Fundamentalform die Gestalt $\sqrt{-K + \frac{1}{{r_0}^2}}$ haben (Proposition **??**), ist $\tilde{A}$ von der Ordnung $O(\frac{1}{{r_0}^2})$.

Lemma 3.12 *Für den Riemann-Tensor auf einer Hyperfläche M^2 in H^3 gilt*

$$R_{ijkl} = \tilde{A} * \tilde{A} + \sqrt{-K}(\tilde{h}_{ik} g_{jl} + \tilde{h}_{jl} g_{ik} - \tilde{h}_{il} g_{jk} - \tilde{h}_{jk} g_{il}) + \overline{R}^{MP}_{ijkl}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \overline{R}_{ijkl} + h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk} \\ &= \overline{R}_{ijkl} + (\tilde{h}_{ik} + \sqrt{-K} g_{ik})(\tilde{h}_{jl} + \sqrt{-K} g_{jl}) \\ &\qquad -(\tilde{h}_{il} + \sqrt{-K} g_{il})(\tilde{h}_{jk} + \sqrt{-K} g_{jk}) \\ &= \overline{R}_{ijkl} + K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) + \tilde{h}_{ik}\tilde{h}_{jl} - \tilde{h}_{il}\tilde{h}_{jk} \\ &\quad + \sqrt{-K}(\tilde{h}_{ik} g_{jl} + \tilde{h}_{jl} g_{ik} - \tilde{h}_{il} g_{jk} - \tilde{h}_{jk} g_{il}) \\ &= \tilde{h}_{ik}\tilde{h}_{jl} - \tilde{h}_{il}\tilde{h}_{jk} + \sqrt{-K}(\tilde{h}_{ik} g_{jl} + \tilde{h}_{jl} g_{ik} - \tilde{h}_{il} g_{jk} - \tilde{h}_{jk} g_{il}) + \overline{R}^{MP}_{ijkl} \\ &= \tilde{A} * \tilde{A} + \sqrt{-K}(\tilde{h}_{ik} g_{jl} + \tilde{h}_{jl} g_{ik} - \tilde{h}_{il} g_{jk} - \tilde{h}_{jk} g_{il}) + \overline{R}^{MP}_{ijkl}. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.13 *Für eine Hyperfläche gilt*

$$\nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} \nabla_k \Delta \overset{\circ}{h}_{ij} = \nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} \Delta \nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} + \mathrm{Riem} * \nabla \overset{\circ}{A} * \nabla \overset{\circ}{A} + \nabla \mathrm{Riem} * \overset{\circ}{A} * \nabla \overset{\circ}{A}.$$

Beweis: Die allgemeine Vertauschungsrelation ergibt

$$\begin{aligned} \nabla_k \Delta \overset{\circ}{h}_{ij} &= \Delta \nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} + R_{kmml} \nabla_l \overset{\circ}{h}_{ij} + R_{kmil} \nabla_m \overset{\circ}{h}_{lj} + R_{kmjl} \nabla_m \overset{\circ}{h}_{il} \\ &\qquad + \nabla_m (R_{kmil} \overset{\circ}{h}_{lj} + R_{kmjl} \overset{\circ}{h}_{il}) \\ &= \Delta \nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} + R_{kmml} \nabla_l \overset{\circ}{h}_{ij} + R_{kmil} \nabla_m \overset{\circ}{h}_{lj} + R_{kmjl} \nabla_m \overset{\circ}{h}_{il} \\ &\qquad + \nabla_m R_{kmil} \overset{\circ}{h}_{lj} + \nabla_m R_{kmjl} \overset{\circ}{h}_{il} \\ &\qquad + R_{kmil} \nabla_m \overset{\circ}{h}_{lj} + R_{kmjl} \nabla_m \overset{\circ}{h}_{il}. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.14 *Für eine Hyperfläche $M^2 \in \mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$ gilt*

$$\nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} \nabla_k \Delta \overset{\circ}{h}_{ij} \leq \nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} \Delta \nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} + c|\nabla \overset{\circ}{A}|^2 {r_0}^{-2} + cC_0 |\nabla \overset{\circ}{A}| {r_0}^{-7}.$$

Beweis: Aus Lemma 3.12 und Lemma 3.13 folgt

$$\begin{aligned}\nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} \nabla_k \Delta \overset{\circ}{h}_{ij} &= \nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} \Delta \nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} + (\tilde{A} * \tilde{A} + \sqrt{-K}\tilde{A} + \overline{R}^{MP})|\nabla \overset{\circ}{A}|^2 \\ &\quad + (\nabla \tilde{A} * \tilde{A} + \sqrt{-K} \quad \nabla \tilde{A} + \nabla \overline{R}^{MP})|\overset{\circ}{A}||\nabla \overset{\circ}{A}| \\ &\leq \nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} \Delta \nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} + c|\nabla \overset{\circ}{A}|^2 {r_0}^{-2} + cC_0 |\nabla \overset{\circ}{A}| {r_0}^{-7},\end{aligned}$$

da $\tilde{A}$ von der Ordnung ${r_0}^{-2}$ ist, der Fehler-Term $\overline{R}^{MP}$ die Ordnung $\leq C_0 {r_0}^{-3}$ hat, und wegen

$$|w| = |\overline{R}ic(\boldsymbol{\nu}, \cdot)| \leq cC_0 {r_0}^{-5} \qquad \text{(Lemma 2.4)},$$

d.h. $|\nabla \tilde{A}| \leq c|\nabla \overset{\circ}{A}| + c(C_0 + B_1){r_0}^{-5}$ nach Lemma 2.2 in [Hui86]. □

Lemma 3.15 *Für die zeitliche Entwicklung der spurfreien zweiten Fundamentalform einer Lösung von (r), welche in $\mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$ in N^3 liegt, gilt für alle $d > c(C_0^2 + B_1^2 + B_2)$:*

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)|\nabla \overset{\circ}{A}|^2 = -2|\nabla^2 \overset{\circ}{A}|^2 + c|\nabla \overset{\circ}{A}|^2 r^{-2} + c\ C_0 |\nabla \overset{\circ}{A}| r^{-7}.$$

Bemerkung:
Dies gilt auch für allgemeines n in H^{n+1} $(n \geq 2)$, wie sich aus dem Beweis ergibt.

Beweis: Analog wie in [HY95] berechnet, gilt

$$\begin{aligned}&(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta) \overset{\circ}{h}_{ij} \\ &= (h - 2H) \overset{\circ}{h}_{il} \overset{\circ}{h}_{lj} + |\overset{\circ}{A}|^2 (\overset{\circ}{h}_{ij} + \frac{1}{n} h g_{ij}) - h(\overline{R}_{3i3j} - \frac{1}{n}\overline{R}ic(\nu,\nu) g_{ij}) \\ &\quad + (\overline{R}ic(\nu,\nu) - \frac{1}{n}H^2) \overset{\circ}{h}_{ij} - [\overset{\circ}{h}_{jl} \overline{R}_{lmim} + \overset{\circ}{h}_{il} \overline{R}_{lmjm} - 2 \overset{\circ}{h}_{lm} \overline{R}_{limj}] \\ &\quad - [\overline{\nabla}_j \overline{R}_{3lil} + \overline{\nabla}_l \overline{R}_{3ijl}] \\ &= A * \overset{\circ}{A} * \overset{\circ}{A} + (\overline{R}ic(\nu,\nu) - 2n\overline{R}_{1212} - \frac{1}{n}H^2) \overset{\circ}{h}_{ij} \\ &\quad - h(\overline{R}_{3i3j} - \frac{1}{n}\overline{R}ic(\nu,\nu) g_{ij}) - [\overline{\nabla}_j \overline{R}_{3lil} + \overline{\nabla}_l \overline{R}_{3ijl}].\end{aligned}$$

Für die Ableitung also

$$
\begin{aligned}
\nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} \nabla_k(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta) \overset{\circ}{h}_{ij} &= \nabla A * \overset{\circ}{A} * \overset{\circ}{A} * \nabla \overset{\circ}{A} + A * \overset{\circ}{A} * \nabla \overset{\circ}{A} * \nabla \overset{\circ}{A} \\
&\quad + \nabla_k(\overline{R}ic(\nu,\nu) - 2n\overline{R}_{1212})\nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} \\
&\quad + (\overline{R}ic(\nu,\nu) - 2n\overline{R}_{1212} - \frac{1}{n}H^2)|\nabla \overset{\circ}{A}|^2 \\
&\quad - h\nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} \nabla_k(\overline{R}_{3i3j} - \frac{1}{n}\overline{R}ic(\nu,\nu)g_{ij}) \\
&\quad - \nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} \nabla_k[\overline{\nabla}_j \overline{R}_{3lil} + \overline{\nabla}_l \overline{R}_{3ijl}] \\
&\leq c|\nabla \overset{\circ}{A}|^2 r^{-2} + cC_0|\nabla \overset{\circ}{A}|r^{-7}.
\end{aligned}
$$

Denn es gilt

$$
\begin{aligned}
&|\nabla A * \overset{\circ}{A} * \overset{\circ}{A} * \nabla \overset{\circ}{A}|\,,\ |A * \nabla H * \nabla \overset{\circ}{A} * \nabla \overset{\circ}{A}|, \\
&|A * \overset{\circ}{A} * \nabla \overset{\circ}{A} * \nabla \overset{\circ}{A}| \leq c|\nabla \overset{\circ}{A}|^2 {r_0}^{-4} + c(C_0 + B_1)B_2^2|\nabla \overset{\circ}{A}|{r_0}^{-12}.
\end{aligned}
$$

Ferner gilt nach Lemma 3.11

$$
\begin{aligned}
(\overline{R}ic(\nu,\nu) - 2n\overline{R}_{1212} - \frac{1}{n}H^2)|\nabla \overset{\circ}{A}|^2 &\leq -|\nabla \overset{\circ}{A}|^2 {r_0}^{-2} \\
|\overset{\circ}{h}_{ij} \nabla_k(\overline{R}ic(\nu,\nu) - 2n\overline{R}_{1212})\nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij}| &\leq cC_0|\nabla \overset{\circ}{A}|{r_0}^{-8} \\
|h\nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} \nabla_k(\overline{R}_{3i3j} - \frac{1}{n}\overline{R}ic(\nu,\nu)g_{ij})| &\leq cC_0|\nabla \overset{\circ}{A}|{r_0}^{-7} \\
|\nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} \nabla_k[\overline{\nabla}_j \overline{R}_{3lil} + \overline{\nabla}_l \overline{R}_{3ijl}]| &\leq cC_0|\nabla \overset{\circ}{A}|{r_0}^{-7}.
\end{aligned}
$$

Mit $\frac{\partial}{\partial t}g_{ij} = 2(h-H)h_{ij}$ sowie Lemma 3.14 ergibt sich schließlich

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)|\nabla \overset{\circ}{A}|^2 &= 2\nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)\nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} - 2|\nabla^2 \overset{\circ}{A}|^2 \\
&= 2\nabla_k \overset{\circ}{h}_{ij} \nabla_k(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta) \overset{\circ}{h}_{ij} - 2|\nabla^2 \overset{\circ}{A}|^2 + A * \nabla A * \overset{\circ}{A} * \nabla \overset{\circ}{A} \\
&\qquad + c|\nabla \overset{\circ}{A}|^2 {r_0}^{-2} + cC_0|\nabla \overset{\circ}{A}|{r_0}^{-7} \\
&\leq A * \nabla A * \overset{\circ}{A} * \nabla \overset{\circ}{A} + c|\nabla \overset{\circ}{A}|^2 {r_0}^{-2} + cC_0|\nabla \overset{\circ}{A}|{r_0}^{-7} \\
&\leq c|\nabla \overset{\circ}{A}|^2 {r_0}^{-2} + cC_0|\nabla \overset{\circ}{A}|{r_0}^{-7},
\end{aligned}
$$

da analog wie im Beweis von Lemma 3.14 $|\nabla A| \leq c|\nabla \overset{\circ}{A}| + c(C_0 + B_1){r_0}^{-4}$ gilt. $\square$

Proposition 3.16 *Sei M_t eine glatte Lösung von (r), welche für alle $t \in [0,T]$ in $\mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$ liegt. Dann existiert eine numerische Konstante c, so dass für $r_0 \geq c(C_0^2 + B_1^2 + B_2 + B_3)$ die folgende Abschätzung gilt:*

$$|\nabla \overset{\circ}{A}| \leq cC_0{r_0}^{-5} \qquad \textit{für alle} \quad t \in [0,T].$$

Beweis: Es gilt wegen Lemma 3.13 und 3.15 für die Evolution von $|\nabla \overset{\circ}{A}|^2$:

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)|\nabla \overset{\circ}{A}|^2 \quad \leq \quad c|\nabla \overset{\circ}{A}|^2{r_0}^{-2} + cC_0|\nabla \overset{\circ}{A}|{r_0}^{-7}.$$

Addiert man nun genügend der Evolutionsgleichung von $|\overset{\circ}{A}|^2$ hinzu, so ergibt sich mit dem parabolischen Maximumprinzip auch in diesem Falle der Erhalt des Abfallverhaltens und das Theorem ist bewiesen:

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)(|\nabla \overset{\circ}{A}|^2 + N{r_0}^{-2}|\overset{\circ}{A}|^2) \quad < \quad 0,$$

falls N und r_0 groß genug gewählt werden ($N = N(B_1, m)$) . □

Beweis des Theorems 3.2:
Wie in der Methode von [HY95] beschrieben, nehmen wir nun alle a priori Abschätzungen in den Propositionen 3.4, 3.9 und 3.16 zusammen, und haben somit gezeigt, dass es eine von B_1, B_2, B_3, d_0, m und C_0 unabhängige absolute Konstante c_2 gibt, so dass

$$\begin{aligned} max_t|dist(\mathbf{O}, \mathbf{a}_0)| &\leq c_2(m^{-1}+1)/r_0(m, C_0^2 + B_2 + B_3), \\ max_{M_t}|\overset{\circ}{A}| &\leq c_2c(m, C_0){r_0}^{-4}, \\ max_{M_t}|\nabla \overset{\circ}{A}| &\leq c_2c(m, C_0){r_0}^{-5} \end{aligned}$$

gilt, solange $r_0 \geq c_2(C_0^2 + B_1^2 + B_2 + B_3)$ ist. Wir wählen der Reihe nach $B_2 > c_2C_0$, $B_3 > c_2C_0$, $B_1 > c_2(m^{-1}+1)/r_0(C_0^2 + B_2 + B_3)$, und schließlich $r_{min} \geq c_2(C_0^2 + B_1^2 + B_2 + B_3)$, um sicher zu stellen, dass die Lösung M_t von (r) sich auf dem gesammten Zeitintervall strikt in der Menge $\mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$ befindet, für alle $r_0 > r_{min}$. Dies beweist Theoerm 3.2. □

Bemerkung:
Sobald die Sup-Schranke (Proposition 3.4) und die Gradienten-Schranke (Proposition 3.9) gezeigt sind, kann man wie in [Hui86] und [Hui87] die Abschätzungen an die höheren Ableitungen und die Langzeitexistenz herleiten.

4. Konvergenz

Um den Existenzbeweis für die Flächen konstanter mittlerer Krümmung zu erhalten, müssen wir nun noch die exponentielle Konvergenz der M_t gegen eine Grenzfläche M_∞ zeigen. Wie schon früher erwähnt, berechnen wir hierzu im nächsten Abschnitt den ersten Eigenwert des Laplace-Beltrami-Operators auf M_t.

4.1 Eigenwertbetrachtung

Lemma 4.1 *Sei $\mathbf{S}_{r_0}(\mathbf{a}_0)$ eine Sphäre mit Durchmesser r_0 und Mittelpunkt $\mathbf{a}_0$. Dann gilt für die Ricci- und Schnittkrümmung für diese verschobene Sphäre in $(N, \overline{g})$*

$$|\overline{R}ic(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}) + 2 + \frac{8m}{{r_0}^3} - \frac{24m}{{r_0}^3} < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} > | \leq c(m, C_0) B_1^2 {r_0}^{-5}$$

$$\textit{und} \quad |\overline{R}_{1212} + 1 - \frac{8m}{{r_0}^3} + \frac{24m}{{r_0}^3} < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} > | \leq c(m, C_0) B_1^2 {r_0}^{-5}.$$

Beweis: Aus dem Beweis von Proposition 2.7 wissen wir, dass

$$|\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}(1 - 3 < \boldsymbol{\nu}, \hat{\mathbf{K}} >)| \leq c(m, C_0) B_1^2 {r_0}^{-5}$$

gilt. Ferner ist nach Lemma 1.7

$$\begin{aligned}\overline{R}ic(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}) &= 2K(1+\frac{4m}{r^3}) = -2-\frac{8m}{{r_0}^3}+\frac{24m}{{r_0}^3} < \mathbf{K},\boldsymbol{\nu} > +O({r_0}^{-5})\\ \overline{R}_{1212} &= K(1-\frac{8m}{r^3}) = -1+\frac{8m}{{r_0}^3}-\frac{24m}{{r_0}^3} < \mathbf{K},\boldsymbol{\nu} >> +O({r_0}^{-5}).\end{aligned}$$

□

Lemma 4.2 *Sei M^2 eine Hyperfläche in N^3 aus $\mathcal{B}(B_1,B_2,B_3)$, $|\mathbf{a}_0| < B_1/r_0$ wie in Proposition 2.4, $\mathbf{S}_{r_0}(\mathbf{a}_0)$ die approximative Sphäre zu M. Dann erfüllt der kleinste Eigenwert des negativen Laplace-Operators für Funktionen mit $\int f = 0$ die Ungleichung*

$$\begin{aligned}\mu_{Lap} &\geq \tfrac{2}{{r_0}^2} - c(m,C_0){r_0}^{-4} && \textit{für} \quad \mathbf{S}_{r_0}(\mathbf{a}_0), \quad \textit{und}\\ \mu_{Lap} &\geq \tfrac{2}{{r_0}^2} - c(m,C_0+B_2+B_3){r_0}^{-4} && \textit{für} \quad M^2,\end{aligned}$$

falls $r_0 \geq c(C_0^2+B_1^2+B_2+B_3)$.

Beweis: Für konzentrische Sphären gilt, dass der konforme Faktor Ψ dort konstant ist, da $\Psi = \Psi(r)$. Für die Riemann-Krümmung bedeutet dies

$$G^{HS} = R^{HS}_{1212} = \Psi^{-2}R^{H}_{1212} = \Psi^{-2}\frac{1}{{r_0}^2} = \frac{1}{{r_0}^2} - \frac{2m}{{r_0}^5} + O({r_0}^{-8}).$$

Mit $\mu_{Lap} \geq 2G^{HS}$ für eine 2-dimensionale Fläche folgt die Behauptung für $\mathbf{S}_{r_0}(\mathbf{O})$. Wir berechnen $G^{HS} = \overline{R}^{HS}_{1212} + \lambda_1\lambda_2$ nun für eine verschobene Sphäre. Mit Proposition 2.7 und Lemma 4.2 erhalten wir

$$\begin{aligned}G^{HS} &= -1+\frac{8m}{{r_0}^3}-\frac{24m}{{r_0}^3} < \boldsymbol{\nu},\mathbf{K} > +O({r_0}^{-5})\\ &\quad (\sqrt{1+\frac{1}{{r_0}^2}}(1-\frac{4m}{{r_0}^3}) + \frac{12m}{{r_0}^3} < \boldsymbol{\nu},\mathbf{K} > +O({r_0}^{-5}))^2\\ &= \frac{1}{{r_0}^2} + O({r_0}^{-5}).\end{aligned}$$

Dies zeigt das Ergebnis für $\mathbf{S}_{r_0}(\mathbf{a}_0)$, da $|O({r_0}^{-5})| \leq c(m,C_0)B_1^2{r_0}^{-5}$ ist. Nehmen wir die Metrik $\overline{g}$, so erhalten wir mit Lemma 1.8

$$|G^{\overline{g}}(\mathbf{O}) - G^{HS}(\mathbf{O})|, |G^{\overline{g}}(\mathbf{a}_0) - G^{HS}(\mathbf{a}_0)| \leq c(m,C_0){r_0}^{-5},$$

woraus sich schließlich die Behauptung für $\mathbf{S}_{r_0}(\mathbf{a}_0)$ ergibt. Für die Flächen M^2 aus $\mathcal{B}(B_1,B_2,B_3)$ gilt nun

$$|A^{S_{app.}} - A^M| \;\leq\; c(C_0+B_2+B_3){r_0}^{-4},$$

und da der hyperbolische Anteil R^H sowie R^P bei der Differenz keine Rolle spielen, und für die Skalarkrümmung $R^M = 0$ gilt, folgt für die Differenz auf $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{app.}$ und M^2

$$\begin{aligned}|\overline{R}^S_{1212} - \overline{R}^M_{1212}| &= |\overline{R}ic(\boldsymbol{\nu}^S, \boldsymbol{\nu}^S) - \overline{R}ic(\boldsymbol{\nu}^M, \boldsymbol{\nu}^M)| \\ &= |\overline{R}ic(\boldsymbol{\nu}^S, \boldsymbol{\nu}^S - \boldsymbol{\nu}^M) - \overline{R}ic(\boldsymbol{\nu}^S - \boldsymbol{\nu}^M, \boldsymbol{\nu}^M)| \\ &\leq c(m, C_0 + B_2 + B_3){r_0}^{-5}.\end{aligned}$$

Mit $\mathbf{t}^S$, so dass $\boldsymbol{\nu}^M = \boldsymbol{\nu}^S < \boldsymbol{\nu}^S, \boldsymbol{\nu}^M > + \mathbf{t}^S < \mathbf{t}^S, \boldsymbol{\nu}^M >$ und $\boldsymbol{\nu}^S \perp \mathbf{t}^S$ gilt, und wir die Bemerkung 2.5 verwenden können. Womit wir $|G^{M^2} - G^S| \leq c(m, C_0 + B_1^2){r_0}^{-4}$ und somit die Behauptung für M^2 erhalten. □

Lemma 4.3 *Sei M^2 eine Hyperfläche in N^3 aus $\mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$, $\mathbf{a}_0$ wie in Proposition 2.4. Dann gilt*

$$||A|^2 + Ric(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) - \frac{2}{{r_0}^2} + \frac{24m}{{r_0}^3}(1 - 3 < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} >)| \leq c(m){r_0}^{-4},$$

sofern $r_0 \geq c(C_0^2 + B_1^2 + B_2 + B_3)$ ist.

Beweis: Mit

$$\begin{aligned}\lambda_i &= (1 - \frac{4m}{{r_0}^3})\frac{1}{tanh(l)} + \frac{12m}{{r_0}^3} < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} > + O({r_0}^{-5}) \\ |A|^2 &= 2(1 - \frac{4m}{{r_0}^3})^2 \frac{1}{tanh(l)^2} + \frac{48m}{{r_0}^3}\frac{1}{tanh(l)} < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} > + O({r_0}^{-5}) \\ &= 2 + \frac{2}{{r_0}^2} - \frac{16m}{{r_0}^3} + \frac{48m}{{r_0}^3} < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} > + O({r_0}^{-4}) \\ \overline{R}ic(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) &= -2 - \frac{8m}{{r_0}^3} + \frac{24m}{{r_0}^3} < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} > + O({r_0}^{-5})\end{aligned}$$

folgt zusammen mit $|O({r_0}^{-4})| \leq c(m){r_0}^{-4}$ und $|O({r_0}^{-5})| \leq c(m, C_0 + B_2 + B_3){r_0}^{-5}$ bzw. $|O({r_0}^{-5})| \leq c(m, C_0)B_1^2{r_0}^{-5}$ für die obigen Größen

$$\begin{aligned}||A|^2 + \overline{R}ic(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) - \frac{2}{{r_0}^2} + \frac{24m}{{r_0}^3}(-1 + 3 < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} >)| &\leq \\ c(m){r_0}^{-4} + c(m, C_0^2 + B_1^2 + B_2 + B_3){r_0}^{-5}.\end{aligned}$$

Für $M \in \mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$ zeigt man die Behauptung wie im Beweis von Lemma 4.2. □

Proposition 4.4 *Sei M^2 eine Hyperfläche in N^3 aus $\mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$, $|\mathbf{a}_0| < B_1/r_0$ wie in Proposition 2.4. Dann erfüllt der kleinste Eigenwert des Jakobi-Operators*

$$J(f) := -\Delta f - f(|A|^2 + \overline{R}ic(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}))$$

für Funktionen mit $\int f = 0$ die Ungleichung

$$\mu_{Jakobi} \geq \tfrac{24m}{{r_0}^3}(1-\varepsilon)$$

für $\varepsilon = \varepsilon(r_0) = O({r_0}^{-1})$ und für $r_0 \geq c(C_0^2 + B_1^2 + B_2 + B_3)$.

Beweis: Aus Lemma 4.2 und 4.3 folgt für f mit $\int f = 0$

$$\begin{aligned}
J(f) &= -(\Delta + (|A|^2 + \overline{R}ic(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu})))f \\
&= (\mu_{Lap} - \frac{2}{{r_0}^2} + \frac{24m}{{r_0}^3}(1 - 3 < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} >))f \\
&\geq \frac{24m}{{r_0}^3}(1 - 3 < \mathbf{K}, \boldsymbol{\nu} > - c(m, C_0 + B_2 + B_3){r_0}^{-1})f \\
&\geq \frac{24m}{{r_0}^3}(1-\varepsilon)f.
\end{aligned}$$

□

4.2 Haupttheorem

Theorem 4.5 *Sei (N, g) asymptotisch hyperbolisch und $m > 0$, dann existiert ein r_{min}, welches nur von C_0 und m abhängt, so dass für alle $r_0 > r_{min}$ das Anfangswertproblem (r) für alle Zeiten $t \geq 0$ eine eindeutige glatte Lösung hat. Für $t \to \infty$ konvergiert die Flächenfamilie M_t exponentiell gegen eine Hyperfläche konstanter mittlerer Krümmung H.*

Beweis: Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t}(H-h)^2 d\mu &= \int_{M_t} 2(H-h)\frac{\partial}{\partial t}(H-h)d\mu - \int_{M_t}(H-h)^3 H d\mu \\
&\leq 2\ \mu_{Jakobi}\int_{M_t}(H-h)^2 d\mu - \int_{M_t}(H-h)^3 H d\mu \\
&\leq -\frac{48m}{{r_0}^3}(1-\varepsilon)\int_{M_t}(H-h)^2 d\mu - \int_{M_t}(H-h)^3 H d\mu
\end{aligned}$$

mit $r_0 > r_{min} \geq cC_0B_1$. Wegen $\int_{M_t} d\mu = -\int_{M_t}(H-h)^2 d\mu$ ist

$$\int_0^\infty \int_{M_t} (H-h)^2 d\mu dt \leq |M_0|$$

gleichmäßig beschränkt. Woraus wir mit Hilfe der Abschätzungen an die höheren Ableitungen der Krümmung herleiten können, dass $max_t|H-h|$ auf Null abfällt, und somit ein Zeitpunkt t_0 existiert mit

$$max|H(H-h)| \leq \varepsilon m {r_0}^{-3}$$

für alle $t > t_0$. Wir erhalten also

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{M_t}(H-h)^2 d\mu \quad = \quad -\frac{48m}{{r_0}^3}(1-2\varepsilon)\int_{M_t}(H-h)^2 d\mu,$$

woraus der exponentielle Abfall des $\mathcal{L}^2$-Integrals folgt. Die exponentielle Konvergenz in den höheren Normen folgt nun wie in [HY95] aus der Standard-Theorie für Interpolationsungleichungen. $\square$

5. Anhang

5.1 Umrechnung der Metrik

In [SY82] zeigen Schoen und Yau die Positivität der Bondi-Masse mit Hilfe einer Fläche, deren induzierte Metrik $ds^2 = \frac{1}{1+r^2}(1 + \frac{m}{r^3} + O(r^{-4}))dr^2 + r^2 d\Omega^2$ ist. Wie im asymptotisch flachen Fall, wo man in isotropen Koordinaten den konformen Faktor $(1 + \frac{m}{2r})^4$ für ein Raumblatt hat (vgl.[Str]), werden wir nun diese Metrik in konforme Koordinaten umrechnen, wieder in derselben (geometrischen) Größe r entwickeln und werden dabei sehen, dass sich der konforme Faktor (bis auf Terme höherer Ordung) nicht vom Vorfaktor $(1 + \frac{m}{r^3})^2$ unterscheidet. Hierzu sei $b := \frac{1}{1+r^2}(1 + \frac{m}{r^3} + O(\frac{1}{r})^4)$, so dass die obige Metrik die Form $bdr^2 + r^2 d\Omega^2$ hat. Bei dieser Umrechnung genügt es, die Radialkoordinate zu transformieren, d.h. wir suchen $\rho = \rho(r)$ und übernehmen die Winkel unverändert. Für die Transformation eines 2-Tensors gilt

$$g_{ij} = g_{kl} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial x_l}{\partial y_j},$$

in diesem Fall also

$$g = \frac{1}{1+r^2}(1 + \frac{m}{r^3} + O(\frac{1}{r})^4)(\frac{\partial r}{\partial \rho})^2 d\rho^2 + r^2 d\Omega \stackrel{!}{=} a^2(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega).$$

D.h. der gesuchte konforme Faktor ist $a = \sqrt{b}\,\frac{\partial r}{\partial \rho} = r/\rho$. Die Lösung dieser Differentialgleichung hat die Form

$$\rho(r) = \mathbf{exp}(\int \frac{\sqrt{b}}{r} dr + konst.).$$

Für $m = 0$ ergibt sich, wenn wir für die Integrationskonstante $ln(2)$ wählen, $\rho(r) = \frac{2r}{1+\sqrt{r^2+1}}$ ($\int \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}r} = -ln(\frac{1+\sqrt{r^2+1}}{r})$), und somit $r^2\rho^2/4 = -r\rho + r^2$. Also erhalten wir das *Poincaré Modell* des hyperbolischen Raumes mit Krümmung $K = -1$:

$$r = \frac{\rho}{1-\rho^2/4}, \qquad a^2 = \frac{r^2}{\rho^2} = \frac{1}{(1-\rho^2/4)^2}, \qquad \rho/2 = -\sqrt{\frac{1}{r^2}} + \sqrt{\frac{1}{r^2}+1},$$

wobei $\rho \in (0, 2)$.

Da wir die Metrik nur bis auf Terme der Ordnung $O(\frac{1}{r})^4$ ansetzen, können wir auch statt des gegebenen Radialterms den folgenden betrachten:

$$\frac{1}{1+r^2}((1+\frac{m}{2\,r^3})^2 + O(\frac{1}{r})^4)dr^2 = \frac{1}{1+r^2}(1+\frac{m}{r^3}+O(\frac{1}{r})^4)dr^2.$$

Dies bedeutet für die Metrik, wenn wir die Terme höherer Ordnung weglassen,

$$g = \frac{(1+\frac{m}{2\,r^3})^2}{1+r^2}dr^2 + r^2 d\Omega.$$

Und somit gilt für b bzw. $\frac{1}{r}\sqrt{b}$

$$b = \frac{(1+\frac{m}{2\,r^3})^2}{1+r^2}, \qquad \frac{1}{r}\sqrt{b} = \frac{1+\frac{m}{2\,r^3}}{r\,\sqrt{1+r^2}}.$$

Das Integral lässt sich bestimmen zu

$$\int \frac{1}{r}\sqrt{b}\; dr \;=\; \frac{m}{3}(\frac{1}{r} - \frac{1}{2\,r^3})\sqrt{1+r^2} + \mathrm{Log}(r) - \mathrm{Log}(1+\sqrt{1+r^2}) + konst.,$$

woraus schließlich mit $f(r) := \frac{m}{3}(\frac{1}{r} - \frac{1}{2\,r^3})\sqrt{1+r^2} - \frac{m}{3}$ und der Integrationskonstante $ln(2) - \frac{m}{3}$

$$\begin{aligned}\rho_m(r) = \mathbf{exp}(\int \frac{1}{r}\sqrt{b}\; dr) \;&=\; \mathbf{exp}(\frac{m}{3}(\frac{1}{r} - \frac{1}{2\,r^3})\sqrt{1+r^2} - \frac{m}{3})\frac{2r}{1+\sqrt{1+r^2}} \\ &=\; \mathbf{exp}(\mathbf{f}(r))\frac{2r}{1+\sqrt{1+r^2}}\end{aligned}$$

folgt. Wir können nun den konformen Faktor $a = \sqrt{b}\frac{\partial r}{\partial \rho_m} = \frac{r}{\rho_m}$ berechnen und erhalten

$$\begin{aligned} a_m^2 &= \frac{r^2}{\rho_m^2} = \mathbf{exp}(-2\mathbf{f}(r))\frac{(1+\sqrt{1+r^2})^2}{4} = \frac{\mathbf{exp}(-2\mathbf{f}(r))}{1-\rho_{m=0}^2/4} \\ &= \frac{\mathbf{exp}(-2\mathbf{f}(r))}{1-\mathbf{exp}(-2\mathbf{f}(r))\rho_m^2/4}. \end{aligned}$$

Für $m = 0$ erhält man also genau den hyperbolischen Raum mit $K = -1$. Es ist leider nicht möglich, $r(\rho_m)$ exakt zu berechnen, so dass wir an dieser Stelle den Faktor a_m in r entwickeln. Da die Metrik nur bis zur Ordnung $O(\frac{1}{r})^4$ gegeben ist, spielt dies jedoch keine Rolle. Mit

$$f(r) = \frac{m}{3} - \frac{m}{8\,r^4} + \frac{m}{24\,r^6} - \frac{3\,m}{128\,r^8} + O(\frac{1}{r})^{10} - \frac{m}{3}$$

folgt für die neue Radialkoordinate und den konformen Faktor a_m

$$\begin{aligned} \rho_m(r) &= 2 - \frac{2}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{-1-m}{4\,r^4} + \frac{m}{4\,r^5} + O(\frac{1}{r})^6 \\ a_m^2(r) &= \frac{r^2}{4} + \frac{r}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\,r} + \frac{m}{16\,r^2} + \frac{-1+2\,m}{16\,r^3} + \frac{5\,m}{48\,r^4} + O(\frac{1}{r})^5. \end{aligned}$$

Wir möchten diesen konformen Faktor in den Anteil der hybolischen Geometrie $\frac{1}{(1-\rho_m^2/4)^2}$ und den Masseanteil trennen:

$$a_m^2 = \frac{1}{(1-\rho_m^2/4)^2}(1 + \frac{m}{4r^3} + O(\frac{1}{r})^4).$$

Unsere konforme Metrik hat also die Gestalt

$$\overline{g}_{ij} = (1 + \frac{m}{4r^3} + O(\frac{1}{r})^4)\, g_{ij}^H.$$

Man beachte nun, dass $r = sinh(dist_H(\mathbf{O},\mathbf{P}))$ (?) eine geometrische Größe ist, d.h. der Faktor $\Psi(r) = (1 + \frac{m}{4r^3})$ hat in allen Koordinatensystemen dieselbe Form. Geht man nun wieder zu den (r, θ, ψ) Koordinaten über, so hat $\Psi^2 g^H$ also die Form

$$g^{HS} = (1 + \frac{m}{4r^3})(\frac{1}{1+r^2}dr^2 + r^2 d\Omega^2),$$

wobei wir in diesem Fall die Vereinfachung gemacht haben, dass die zusätzliche Störung neben dem Monopolterm ebenfalls konform zu g^H ist.

5.2 Erläuterung zur Definition der invarianten Menge

Wir wollen das Zustandekommen der Definition von $\mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$ erläutern. $\mathcal{B}(B_1, B_2, B_3)$ enthält die Koordinatensphären und eignet sich daher für Untersuchungen wie in dieser Arbeit.
Huisken und Yau verwenden eine Menge der Form von $\mathcal{B}_{r_0}(B_1, B_2, B_3)$ (s.u.). Wie man jedoch aus der Stabilitätsbetrachtung in Kapitel 4 Lemma 4.3 sieht, müssen wir im asypmtotisch hyperbolischen Fall das Abfallverhalten um eine Ordnung verschärfen, um die Langzeitexistenz und die Konvergenz zu erhalten. Höhere Potenzen für das Abfallverhalten funktionieren natürlich auch, ergeben jedoch nur ein schwächeres Ergebnis, da der Fehler dann ebenfalls immer kleiner gewählt werden muss.
Hier wollen wir noch zeigen, dass der Durchmesser in der Definition 2.5 sich auf natürliche Weise ergibt, d.h. die Größe r_0 quasi schon von selbst proportional zum Durchmesser von M^2 sein muss.

Definition 5.1 *Sei $r_0 > 0$. Dann definieren wir:*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{r_0}(B_1, B_2, B_3) \;&:=\; \{M^2 \cong \mathbf{S}^2 | dist(\mathbf{O}, \mathbf{a}_0)) \le B_1/r_0, \\ &\qquad | \mathring{A} | \le B_2 {r_0}^{-3}, |\nabla \mathring{A} | \le B_3 {r_0}^{-4}\}.\end{aligned}$$

Lemma 5.2 *Sei $M^2 \in \mathcal{B}_{r_0}(B_1, B_2, B_3)$ in H^3 eingebettet und $r_0 \ge c(B_1, B_2, B_3)$, dann gilt*

$$\mathrm{diam}(M) \le 2\pi r_0.$$

Beweis: Wir betrachten die Gauß-Gleichungen entlang einer Kurve γ mit $\dot\gamma = \tau$, ferner sei o.B.d.A. $\{h_{ij}\}$ in Diagonalgestalt (Koordinatenwahl):

$$\begin{aligned}R_{ij}(x) &= \overline{R}_{ij} - R_{i3j3} + H h_{ij} - h_{il} h^l_j \\ &= -(n-2)\delta_{ij} + (\sum \lambda_l)\lambda_i \delta_{ij} - \lambda_i^2 \delta_{ij} \\ &\ge (n-2)(-1 + \overline{\lambda}(x)^2 - 2| \mathring{A} | \overline{\lambda}(x) - | \mathring{A} |^2)\delta_{ij} \\ &\ge (n-2)(-1 + \lambda_0^2 \\ &\qquad -2(| \mathring{A} | + l(\gamma)|\nabla A|)\lambda_0 - (| \mathring{A} | + l(\gamma)|\nabla A|)^2)\delta_{ij}.\end{aligned}$$

Ansatz: Sei die Länge der Kurve $l(\gamma) = c_0 r_0$, $c_0 > 0$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}\,(\tau,\tau) &\ge (n-2)(-1 + \lambda_0^2 - 2{r_0}^{-3}(B_2 + cB_3)\lambda_0 - (B_2 + cB_3)^2 {r_0}^{-6}) \\ &\ge (n-2)(-1 + \lambda_0^2 - (2\lambda_0 + {r_0}^{-3}) c(c_0, B_2, B_3) {r_0}^{-3}).\end{aligned}$$

Nun ist $|\lambda_0^2 - (1 - 1/{r_0}^2)| \leq B_1 {r_0}^{-3}$ ($\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(r_0 \pm B_1)^2}$ in $\frac{1}{{r_0}^2}$ entwickelt), also

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}\,(\tau,\tau) &\geq (n-2)({r_0}^{-2} - (2 + 2{r_0}^{-2} + {r_0}^{-3})c(c_0, B_1, B_2, B_3){r_0}^{-3}) \\
&\geq (n-2)({r_0}^{-2} - c(c_0, B_1, B_2, B_3){r_0}^{-3}) \qquad \text{mit } r_0 > 1, \text{ d.h.} \\
\mathrm{Ric}\,(\tau,\tau) &\geq K := ((n-2) - \varepsilon){r_0}^{-2} \qquad \text{für alle} \qquad r_0 \geq \frac{c(c_0, B_1, B_2, B_3)}{\varepsilon},
\end{aligned}$$

so dass

$$l(\gamma) = c_0((n-2) - \varepsilon)^{1/2} K^{-1/2} \geq \pi K^{-1/2},$$

falls $c_0((n-2) - \varepsilon)^{1/2} \geq \pi$ bzw. $c_0 = \frac{\pi}{((n-2)-\varepsilon)^{1/2}}$ gilt. Hieraus ergibt sich, dass es einen konjugierten Punkt nach $K^{-1/2}\pi$ geben muss, d.h. $\mathrm{diam}(M) \leq \frac{\pi}{((n-2)-\varepsilon)^{1/2}} r_0$, insbessondere folgt für $n = 3$ und $\varepsilon = 1/2$ das Ergebnis. □

Bemerkung:
(i) Wie der Beweis zeigt, lässt sich das Lemma auf den n-dimensionalen Fall ausdehnen, und man kann beliebig nahe an den Durchmesser der Sphäre kommen, falls r_0 groß gewählt wird.
(ii) Da eine Sphäre mit dem Durchmesser $r_0 - O({r_0}^{-2})$ in das Innere von M^2 gelegt werden kann, gilt auch $r_0 - B_1 \leq \mathrm{diam}(M)$.

Literaturverzeichnis

[ADM61] R. Arnowitt, S. Deser and C. Misner, *Coordinate invariance and energy expressions in general relativity*, Phys. Rev. **1222** (1961), 997-1006.

[Ang89] S. Angenent, Shrinking Doughnuts, Proceedings of the Conference on Elliptic and Parabolic Equations, held at Greynog Wales, August 1989.

[Bea83] A. F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, Springer New York, 1983.

[Bar84] R. Bartnik, *Existence of maximal surfaces in asymptotically flat spacetimes*, Comm. Math. Phys. **94** (1984), 155-175.

[BBM62] H. Bondi, M. G. J. van der Burg, A.W.K. Metzner, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **269**, 21 (1962).

[Bra87] K. A. Brakke, *The Motion of a Surface by its Mean Curvature*, Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1978.

[EH91] K. Ecker and G. Huisken, *Parabolic methods for the construction of spacelike slices of prescribed mean curvature in cosmological spacetimes*, Comm. Math. Phys. **135** (1991), 595-613.

[Ger83] C. Gerhardt, *H surfaces in lorentzian manifolds*, Comm. Math. Phys. **89** (1983), 523-553.

[GKM75] D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer, *Riemannsche Geometrie im Großen*, Springer New York, 1975.

[Ham82] R.S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Diff. Geometry **17** (1982) 255-306.

[Ham86] R.S. Hamilton, *Four-manifolds with positive curvature operator*, J. Diff. Geometry **24** (1986) 153-179.

[HE73] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, 1973.

[HI98] G. Huisken and T. Ilmanen, *The inverse mean curvature flow and the riemannian penrose inequality*, to appear (1998).

[Hui84] G. Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Diff. Geometry **20** (1984) 237-266.

[Hui86] G. Huisken, *Contracting convex hypersurfaces in Riemannian Manifolds by their mean curvature*, Invent. Math. **84** (1986), 463-480.

[Hui87] G. Huisken, *The volume preserving mean curvature flow*, J. reine angew. Math. **382** (1987) 35-48.

[Hui90] G. Huisken, *Asymptotic behaviour for singularities of the mean curvature flow*, J. Diff. Geom. **31** (1990) 285-299.

[HP98] G. Huisken und A. Polden, *Geometric evolution equations for hypersurfaces*, to appear (1998).

[HY95] G. Huisken, S.T. Yau, *Definition of Center of Mass for Isolated Physical Systems and Unique Foliations by Stable Spheres with Constant Mean Curvature*, SFB 382 Report Nr. **26**, Oktober 1995.

[Min] M. Min-Oo, *Scalar curvature rigidity of asymptotically hyperbolic spin manifolds*, preprint Dept. of Mathematics McMaster University Hamilton, Ontario, Canada.

[Pas97] E. Pasch, *The level set method for the mean curvature flow*, SFB 382 Report Nr. **63**, Februar 97.

[Sac62] R.K. Sachs, *Waves in asymptotically flat space-time*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **270** (1962),103-126.

[SY77a] R. Schoen and S.T. Yau, *On the proof of the positive mass conjecture in General Relativity*, Comm. Math. Phys. **65** No.1 (1979), 45-76.

[SY77b] R. Schoen and S.T. Yau, *Proof of the positive mass theorem II*, Comm. Math. Phys. **79** (1981), 231-260.

[SY82] R. Schoen and S.T. Yau, *Proof that the Bondy Mass is positive*, Phys. rev. letters Vol. **48** (1982).

[Str] N. Straumann, *General Relativity and Relativistic Astrophysics*, Springer New York.

[Wal84] R.M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, 1984.

Mein Dank gilt Frau Dipl. Math. Sabine Schöttle, Herrn Dr. Frank Loose, sowie meinem Betreuer Prof. Dr. Huisken und meiner Familie.

Lebenslauf

Geboren am 31. August 1969 in Tübingen.
Einschulung 1976 in die Karl-Josef-Leiprecht Grundschule in Rottenburg.
Ab 1980 Besuch des Eugen-Bolz-Gymnasiums Rottenburg.
Abitur am 26. April 1989.
Immatrikulation am 8.Oktober 1989 an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen für den Studiengang Mathematik/Diplom.
Vordiplom in Mathematik am 14. Januar 1992.
WS 93/94 und SS 94 Aufenthalt an der McMaster Universität in Hamilton, Ontario, Canada. Masterprogramm.
Diplom in Mathematik am 30. April 1996.
Seit 1. Mai 1996 wissenschaftlicher Angestellter am Mathematischen Institut der Universität Tübingen.