Krümmungsabschätzungen für degenerierte nichtlineare geometrische Evolutionsgleichungen

Dissertation

der Mathematischen Fakultät der Eberhard-Karls-Universität Tübingen zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von

Sabine Dieter
geb. Schöttle

aus Dusslingen

betreut von

Prof. Dr. Gerhard Huisken

Juni 2002

Tag der mündlichen Qualifikation:	11. Juli 2002
Dekan:	Prof. Dr. Wolfgang Knapp
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. Gerhard Huisken
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. Frank Loose

für Matthias und Tom

Mathematics is the subject in which we
don't know what we are talking about.

Bertrand Russell

Mein Dank gilt meinem Betreuer Prof. Dr. Gerhard Huisken und den Mitgliedern des Arbeitsbereiches Analysis. Insbesondere danke ich Felix Schulze für die vielen hilfreichen Diskussionen während der Entstehung dieser Arbeit.
Außerdem möchte ich meinen Eltern für ihre großartige Unterstützung herzlich danken und meinem Schwiegervater für die zahlreichen Spaziergänge mit Tom. Last but not least gilt mein besonderer Dank meinem Mann Matthias Dieter. Deshalb ist diese Dissertation ihm und unserem Sohn Tom gewidmet.

Zusammenfassung

Wir betrachten in dieser Arbeit n-dimensionale, schwach konvexe Hyperflächen des $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 2)$, auf denen für ein $2 \leq k \leq n$ das $(k-1)$-te elementarsymmetrische Polynom der Hauptkrümmungen positiv ist, und deren Evolution entlang ihrer Normalen mit dem Quotienten des k-ten durch das $(k-1)$-te elementarsymmetrische Polynom als Geschwindigkeit. Diese Quotienten besitzen gute algebraische Eigenschaften und sind insbesondere homogen vom Grad 1.
Obwohl es sich bei diesen Krümmungsflüssen um voll nichtlineare, degeneriert parabolische Gleichungen handelt, zeigen wir mit Hilfe eines neuen strikten Maximumprinzips für die Geschwindigkeit, dass dieses Anfangswertproblem wohlgestellt ist, und man zumindest für kurze Zeiten eine eindeutige glatte Lösung erhält.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist im Bereich der geometrischen Evolutionsgleichungen angesiedelt. Dabei handelt es sich um ein Gebiet der Mathematik, in dem sich Methoden der Differentialgeometrie und der partiellen Differentialgleichungen verbinden und gegenseitig ergänzen. Der Grundgedanke einer geometrischen Evolutionsgleichung besteht darin, die zeitliche Entwicklung einer Fläche durch eine partielle Differentialgleichung zu beschreiben, wohingegen die Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung der Evolution durch geometrische Größen der Fläche zum jeweiligen Zeitpunkt bestimmt sind.
Seit mehr als zwanzig Jahren ist dieser Zweig der Mathematik nun schon Gegenstand intensiver Forschung und es gibt mittlerweile eine Vielzahl von Ergebnissen, die wiederum verschiedenste Anwendungen in der Geometrie aber auch in anderen Gebieten haben. Ein sehr modernes Anwendungsgebiet ist beispielsweise das der Bildanalyse, in welchem man versucht, auftretende Probleme durch den Einsatz geometrischer Flüsse, wie zum Beispiel dem Fluss entlang Potenzen der Gauß-Krümmung, zu lösen. Im Wesentlichen handelt es sich dabei um die Glättung der Niveaulinien in Graustufenbildern, was zu einer Elimination des Rauschens ohne signifikanten Informationsverlust führen soll. Diese Methode wird unter anderem in [AGLM] ausführlich beschrieben.

In vielen Fällen wird eine Evolution von Hyperflächen des $\mathbb{R}^{n+1}$ betrachtet, bei der die Fläche abhängig von einer bestimmten skalaren Krümmungsgröße in Richtung ihrer inneren Normalen bewegt wird. Von besonderem Interesse ist aufgrund seiner Analogie zur klassischen Wärmeleitungsgleichung der sogenannte mittlere Krümmungsfluss, bei dem als Geschwindigkeit die mittlere Krümmung der Fläche eingesetzt wird. Da dieser Fluss bereits von verschiedenen Autoren studiert wurde, ist das Wissen über Regularität, Langzeitexistenz und asymptotisches Verhalten in diesem Fall schon weit fortgeschritten.
G. Huisken hat beispielsweise in [H84] gezeigt, dass in Dimension $n \geq 2$ geschlossene, konvexe Flächen unter diesem Fluss nach geeigneter Reskalierung gegen eine runde Sphäre konvergieren. Entsprechende Resultate im 1-dimensionalen Fall, also für die Evolution konvexer Kurven stammen von M.E. Gage und R. Hamilton und für eingebettete Kurven von M. Grayson (siehe [GH] beziehungsweise [Gra]). Außerdem haben G. Huisken und K. Ecker in [EH1] und [EH2] Ergebnisse über Regularität und Langzeitexistenz beliebiger Flächen erhalten, die als Graph geschrieben werden können. Eine physikalische Bedeutung kommt dem mittleren Krümmungsfluss unter anderem bei der Beschreibung der Evolution von Phasengrenzen in bestimmten Metallschmelzen zu (siehe [AC]).

Ein weiterer Fluss, der bereits ausführlich untersucht wurde, ist der sogenannte Gauß-Fluss. Wie der Name bereits vermuten lässt, wird hierbei die Gauß-Krümmung der Fläche als Geschwindigkeit eingesetzt. Der Gauß-Fluss wurde zuerst 1974 von W.J. Firey in [Fir] als Modell für den Abtragungsprozess von Kieselsteinen an einem Strand eingeführt. Später haben beispielsweise K. Tso und B. Chow (siehe [Tso] beziehungsweise [Cho]) für geschlossene, konvexe Hyperflächen gezeigt, dass diese unter Flüssen entlang gewisser Potenzen der Gauß-Krümmung in endlicher Zeit zu einem Punkt kontrahieren. Eine ausführliche Untersuchung des Gauß-Flusses mit positiven Potenzen unter schwächeren Bedingungen findet man außerdem bei B. Andrews in [A3].

Der mittlere Krümmungsfluss und der Gauß-Fluss sind allerdings nur zwei Beispiele eines breiten Spektrums möglicher Geschwindigkeiten. In [A1] untersuchte B. Andrews auch eine allgemeinere Klasse von Geschwindigkeiten f, die gewisse strukturelle Voraussetzungen erfüllen müssen. All diesen isotropen Krümmungsflüssen ist jedoch die Tatsache gemeinsam, dass die Geschwindigkeit f sinnvoller Weise stets eine homogene, symmetrische Funktion in den Hauptkrümmungen der Fläche sein sollte.
Eine Basis dieser symmetrischen Funktionen bilden die aus der Algebra wohlbekannten elementarsymmetrischen Polynome S_k. Sie treten ganz natürlich als Koeffizienten eines allgemeinen Polynoms n-ten Grades der Form

$$P(X) = (X - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_n) = X^n - S_1\, X^{n-1} + \ldots + (-1)^n\, S_n$$

auf. Jedes S_k ist für $1 \leq k \leq n$ homogen vom Grad k und für $\lambda \in I\!R^n$ definiert als

$$S_k(\lambda) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_k}\,.$$

Wie man sieht, ist die mittlere Krümmung gerade das erste elementarsymmetrische Polynom und der Gauß-Fluss hat als Geschwindigkeit das n-te. Alle anderen dazwischen sind ebenfalls mögliche Kandidaten für entsprechende Krümmungsflüsse. Es stellt sich allerdings heraus, dass sich für Geschwindigkeiten, die homogen vom Grad 1 sind, besonders interessante Eigenschaften ergeben. Das ist ein Grund dafür, dass wir in dieser Arbeit als Geschwindigkeit Quotienten Q_k aufeinanderfolgender elementarsymmetrischer Polynome betrachten, die offensichtlich wieder homogen vom Grad 1 sind.
Ganz konkret suchen wir eine Familie von Hyperflächen

$$F : M^n \times [\,0, T\,) \to I\!R^{n+1}\,,$$

die für ein $1 \leq k \leq n$ das folgende Anfangswertproblem löst:

$$(\star_k) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} F(p,t) &= -\,Q_k(p,t) \cdot \nu(p,t) \qquad \text{für alle } p \in M^n,\, t \geq 0 \\[2ex] F(\,\cdot\,,0) &= F_0\,. \end{cases}$$

Dabei soll M^n eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand, $F_0 : M^n \to I\!R^{n+1}$ eine Einbettung und ν die äußere Normale der Fläche $M_t := F(M^n, t)$ sein. Außerdem ist die Geschwindigkeit definiert als

$$Q_k(\lambda) = \frac{S_k(\lambda)}{S_{k-1}(\lambda)}\,,$$

wobei $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ die Hauptkrümmungen der Fläche M_t sind und wir $S_0 :\equiv 1$ setzen. Für $k = 1$ beschreibt also das Problem $(\star_k)$ genau den mittleren Krümmungsfluss. Das Anfangswertproblem $(\star_n)$ entspricht jedoch nicht dem Gauß-Fluss, sondern dem sogenannten harmonischen mittleren Krümmungsfluss, der unter anderem von B. Andrews in [A1] untersucht wurde.
Obwohl diese Q_k-Flüsse im Gegensatz zum mittleren Krümmungsfluss, der noch quasilinear ist, voll nichtlinear sind, haben sie trotz dieser schwierigeren Ausgangssituation gewisse Vorteile, die von den guten algebraischen Eigenschaften der S_k herrühren. Entscheidend ist vor allem die Tatsache, dass die Q_k unter bestimmten Voraussetzungen konkav in den Hauptkrümmungen sind. Das ist auch der ausschlaggebende Punkt bei G. Huisken und C. Sinestrari in [HS] im Beweis dafür, dass für Startflächen mit positiver mittlerer Krümmung die Reskalierungen einer Singularität unter dem mittleren Krümmungsfluss konvex werden. Außerdem scheint es so, als ob diese Quotienten von elementarsymmetrischen Polynomen das beste algebraische Verhalten aufweisen, wenn man die Evolution konvexer Hyperflächen in allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeiten betrachten will.

Es stellt sich nun natürlich die Frage, unter welchen Bedingungen man glatte Lösungen des Problems $(\star_k)$ erwarten kann. Offenbar muss man, um wenigstens für kurze Zeiten eine Lösung zu erhalten, zuerst sicherstellen, dass der Quotient Q_k überhaupt definiert ist. Dazu muss auf jeden Fall $S_{k-1} \neq 0$ auf der Startfläche gelten. Es wird sich jedoch zeigen, dass die Quotienten nur dann die gewünschte Konkavität besitzen, wenn man $\lambda \in \Gamma_{k-1}$ für die Hauptkrümmungen der Fläche $M_0 = F_0(M^n)$ fordert. Dabei sind die Mengen Γ_l wie folgt definiert:

$$\Gamma_l := \{\lambda \in I\!R^n \,|\, S_1(\lambda) > 0,\ S_2(\lambda) > 0, \ldots, S_l(\lambda) > 0\}\,.$$

Fordert man zusätzlich, dass $S_k \geq 0$ auf M_0 gilt, ist das Problem $(\star_k)$ zumindest schwach parabolisch, das heißt es gilt

$$(*) \qquad \frac{\partial Q_k}{\partial \lambda_i}(p) \geq 0 \quad \text{für alle } \ 1 \leq i \leq n,\ p \in M^n\,.$$

Dass man allerdings für schwach parabolische Gleichungen nicht notwendigerweise glatte Lösungen erwarten kann, zeigt das Beispiel des Gauß-Flusses. Denn während der mittlere Krümmungsfluss wie bereits erwähnt eine starke Analogie zur Wärmeleitungsgleichung aufweist, kann man den Gauß-Fluss als geometrisches Äquivalent zur Gleichung für poröse Medien

$$\dot{u} = \Delta \left(|u|^{m-1} u \right)$$

interpretieren, deren Lösungen wie man weiß nicht glatt sein müssen. Für den Gauß-Fluss hat R. Hamilton zuerst gezeigt (siehe [Ha2]), dass zu schwach konvexen Anfangsdaten Lösungen existieren, die schwach konvex bleiben und nicht C^∞ sind. Seither haben P. Daskalopoulos und R. Hamilton in mehreren Arbeiten (zum Beispiel [DH]) genau untersucht, wie sich flache Seiten der Startfläche unter der Evolution verhalten. Dabei betrachten sie stets den Fluss als Problem mit freien Randbedingungen für die Kurve, die das flache Teilstück berandet, und können unter geeigneten Voraussetzungen zeigen, dass diese Kurve unter der Evolution glatt bleibt, und es insbesondere eine positive Zeit dauert, bis die Flächen strikt konvex werden können. Es gilt also hier kein striktes Maximumprinzip für die Geschwindigkeit.

Nun aber zurück zu unseren Q_k-Flüssen. Wenn man auf der Startfläche M_0 sogar $\lambda \in \Gamma_k$ für alle Hauptkrümmungen fordert, verschwindet die Degeneriertheit des Problems, wie sie in $(*)$ auftritt. In diesem Fall gilt dann, dass Q_k monoton in den Hauptkrümmungen ist, das heißt dass

$$\frac{\partial Q_k}{\partial \lambda_i}(p) > 0 \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n,\ p \in M^n$$

gilt, und mit [HP], Theorem 3.1 erhält man sofort eine glatte Lösung zumindest für kurze Zeiten. Uns interessiert aber gerade der Fall, in dem wir nur die abgeschwächte Voraussetzung $\lambda \in \Gamma_{k-1}$ und $S_{k-1}(\lambda) \geq 0$ auf M_0 fordern, und somit das Problem $(\star_k)$ für $k \geq 2$ nur degeneriert elliptisch ist. Der Großteil der folgenden Arbeit wird sich deshalb damit beschäftigen, unter der zusätzlichen Annahme, dass M_0 schwach konvex ist, die Kurzzeitexistenz des Problems $(\star_k)$ zu sichern. Die Hauptschwierigkeit liegt dabei darin, a priori zu zeigen, dass die Geschwindigkeit Q_k sofort, das heißt für alle $t > 0$, strikt positiv werden muss. Wenn man dieses strikte Maximumprinzip dann gezeigt hat, ist die Gleichung wie oben erwähnt für $t > 0$ gleichmäßig parabolisch. Die schwache Konvexität der Startfläche müssen wir fordern, da der Beweis dieser a priori Schranke auf einer zylindersymmetrischen Barrierenkonstruktion beruht, die sich sonst nicht durchführen läßt.
Bevor wir die einzelnen Schritte dieser Arbeit gleich nochmal genauer auflisten, sei noch bemerkt, dass die Q_k-Flüsse aufgrund ihrer algebraischen Eigenschaften vielversprechende Kandidaten für die oben beschriebene Anwendung in der Bildanalyse sind.

Nachdem wir im ersten Kapitel die Notation und allgemeinen Grundlagen bereitgestellt haben, wollen wir im zweiten Kapitel die wichtigsten algebraischen

Eigenschaften der elementarsymmetrischen Polynome und deren Quotienten aufführen. Im dritten Kapitel werden wir dann zunächst noch für beliebige Geschwindigkeiten f die Evolutionsgleichungen der wichtigsten geometrischen Größen berechnen. Wir werden anschließend zeigen, dass für alle f, die sich als Kehrwert einer konkaven Funktion in den Hauptradien schreiben lassen, strikt konvexe Flächen unter der Evolution strikt konvex bleiben.
Im Anschluss daran werden wir im vierten Kapitel erste a priori Abschätzungen für die Q_k-Flüsse beweisen. Insbesondere werden wir eine obere Schranke an die totale Krümmung erhalten, die uns im weiteren Verlauf der Arbeit zusammen mit einer von den Anfangsdaten unabhängigen unteren Schranke an Q_k die Möglichkeit liefert, die Regularitätsergebnisse von N.V. Krylov anzuwenden, um die Existenz einer Lösung zumindest für kurze Zeiten zu erhalten.
Im fünften Kapitel wollen wir für glatte Lösungen ein striktes Maximumprinzip für die Geschwindigkeit beweisen. Dieses beruht im Wesentlichen auf einem strikten Maximumprinzip für degeneriert elliptische Operatoren, wie es in der Stochastik bei der Konstruktion von Markov Prozessen benutzt wird. Dort liefert die aus der Funktionalanalysis stammende Hille-Yosida Theorie für Halbgruppen den Zusammenhang zwischen der Konstruktion von Markov Prozessen und der Lösbarkeit von Randwertproblemen degeneriert elliptischer Differentialoperatoren zweiter Ordnung.

Im sechsten Kapitel wollen wir schwach konvexe $C^{2,\alpha}$-Hyperflächen des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $\lambda \in \Gamma_k$ für alle Hauptkrümmungen durch die Eigenschaft charakterisieren, dass es einen Radius $R > 0$ gibt, so dass man die Fläche in jedem Punkt von außen durch einen Zylinder der Form $S_R^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ berühren kann. Mit Hilfe dieser Zylinder werden wir daraufhin im siebten Kapitel äußere zylindersymmetrische Barrieren konstruieren, die uns zusammen mit einer Harnack-Ungleichung von B. Andrews [A2] und einem Approximationsargument eine von den Anfangsdaten unabhängige untere Schranke an Q_k liefern. Damit erhalten wir für positive Zeiten die gewünschte strikte Parabolizität.
Durch glatte Approximation einer schwach konvexen Startfläche durch eine Familie strikt konvexer Hyperflächen erhalten wir dann daraus und aus der $|A|^2$-Schranke des vierten Kapitels im achten Kapitel zumindest für kurze Zeiten eine eindeutige glatte Lösung des Problems $(\star_k)$. Im abschließenden neunten Kapitel zeigen wir, dass analog zum mittleren Krümmungsfluss und zum Gauß-Fluss, der Q_k-Fluss für strikt konvexe Anfangsflächen auf einem endlichen Zeitintervall $[0, T)$ existiert und für $t \to T$ zu einem Punkt des $\mathbb{R}^{n+1}$ kontrahiert.

1 Notation und Grundlagen

Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit ohne Rand und $F : M^n \to I\!R^{n+1}$ eine glatte Immersion. Die induzierte Metrik bezeichnen wir mit $g = \{g_{ij}\}$, und in lokalen Koordinaten $\{x^i\}_{1\leq i\leq n}$ bedeutet dies

$$g_{ij}(p) = \langle \frac{\partial F}{\partial x^i}(p), \frac{\partial F}{\partial x^j}(p)\rangle \ , p \in M^n,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das gewöhnliche Skalarprodukt des $I\!R^{n+1}$ ist. Mit ∇ beziehungsweise $\{\Gamma^{ij}_k\}$ sei der zugeordnete Levi-Civita Zusammenhang und mit $\{R_{ijkl}\}$ der Riemannsche Krümmungstensor bezeichnet. Falls $\nu(p)$ die Wahl eines lokalen Normalenvektorfeldes bezeichnet, ist die zweite Fundamentalform $A = \{h_{ij}\}$ gegeben durch

$$h_{ij}(p) = \langle \frac{\partial \nu}{\partial x^i}(p), \frac{\partial F}{\partial x^j}(p)\rangle = -\langle \nu(p), \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(p)\rangle \ , p \in M^n \, .$$

Für den Fall, dass $F(M^n)$ eine kompakte, orientierbare Hyperfläche beschreibt, wollen wir im Folgenden immer davon ausgehen, dass $\nu(p)$ die äußere Einheitsnormale ist. Somit ergibt sich A als symmetrische Bilinearform

$$A(p) : T_pM^n \times T_pM^n \to I\!R \, ,$$

und die selbstadjungierte Weingartenabbildung

$$W(p) : T_pM^n \to T_pM^n$$

ist dann gegeben durch $h^i_j = g^{ik}h_{kj}$. Die Eigenwerte von $W(p) = \{h^i_j(p)\}$, also die Hauptkrümmungen von M^n im Punkt p, seien mit $\lambda_1(p), ..., \lambda_n(p)$ bezeichnet.

Im Folgenden wird M^n meistens eine kompakte, schwach konvexe Fläche ohne Rand sein. Dabei bedeutet schwach konvex, dass $\lambda_i \geq 0$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$ gilt, wohingegen strikt konvex bedeuten würde, dass $\lambda_i > 0$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$ ist.
Die klassischen skalaren Invarianten der zweiten Fundamentalform sind homogene Polynome in den Hauptkrümmungen:

Die mittlere Krümmung ist

$$H := tr(W) = g^{ij}h_{ij} = \lambda_1 + ... + \lambda_n \, ,$$

die Gauß-Krümmung

$$G := det(W) = det\{h^i_j\} = \frac{det\{h_{ij}\}}{det\{g_{ij}\}} = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n \, ,$$

die totale Krümmung

$$|A|^2 := tr(W^tW) = h^i_jh^j_i = h^{ij}h_{ij} = g^{ik}g^{jl}h_{ij}h_{kl} = \lambda_1^2 + ... + \lambda_n^2 \, ,$$

und die skalare Krümmung

$$R := H^2 - |A|^2 .$$

Dabei ist stets die Norm eines beliebigen Tensors $T = \{ T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} \}$ definiert durch

$$|T|^2 = g_{i_1k_1}\cdots g_{i_rk_r}\, g^{j_1l_1}\cdots g^{j_sl_s}\, T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\, T^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s} .$$

Allgemein sind die gemischten mittleren Krümmungen S_k für $1 \leq k \leq n$ durch die elementarsymmetrischen Polynome der λ_i gegeben:

$$S_k(\lambda) := \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_{i_k} ,$$

so dass $S_1 = H$, $S_2 = \frac{1}{2}R$ und $S_n = G$ ist.

Von besonderem Interesse werden im Folgenden die Quotienten

$$Q_k := \frac{S_k}{S_{k-1}} , \quad 1 \leq k \leq n ,$$

dieser Größen sein. Dabei setzen wir $S_0 :\equiv 1$. Insbesondere ist $Q_1 = H$ die mittlere Krümmung und $Q_n = (\frac{1}{\lambda_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n})^{-1}$ die harmonische mittlere Krümmung.

Aus den Gaußgleichungen erhält man einen Zusammenhang zwischen der zweiten Fundamentalform und dem Riemannschen Krümmugstensor, nämlich

$$R_{ijkl} = h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk} .$$

Somit gilt für das Vertauschen zweiter kovarianter Ableitungen auf Vektorfeldern beziehungsweise Eins-Formen:

$$\nabla_i\nabla_j X^k - \nabla_j\nabla_i X^k = R_{ijlm}g^{kl}X^m = (h_{il}h_{jm} - h_{im}h_{jl})g^{kl}X^m$$

$$\nabla_i\nabla_j \omega_k - \nabla_j\nabla_i \omega_k = R_{ijkl}g^{lm}\omega_m = (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk})g^{lm}\omega_m$$

Mit den Codazzi-Gleichungen $\nabla_i h_{kl} = \nabla_k h_{il} = \nabla_l h_{ik}$ ergeben sich daraus für die zweiten kovarianten Ableitungen von A folgende Vertauschungsrelationen:

Lemma 1.1 *Für die zweiten kovarianten Ableitungen der zweiten Fundamentalform A gelten folgende Identitäten:*

$$\nabla_k\nabla_l h_{ij} = \nabla_i\nabla_j h_{kl} + h_{kl}h_{im}h^m_j - h_{km}h_{il}h^m_j + h_{kj}h_{im}h^m_l - h_{km}h_{ij}h^m_l .$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \nabla_k\nabla_l h_{ij} &= \nabla_k(\nabla_i h_{lj}) = \nabla_i\nabla_k h_{lj} + R_{kilm}h^m_j + R_{kijm}h^m_l \\ &= \nabla_i\nabla_j h_{kl} + (h_{kl}h_{im} - h_{km}h_{il})h^m_j + (h_{kj}h_{im} - h_{km}h_{ij})h^m_l . \end{aligned}$$

□

2 Eigenschaften der elementarsymmetrischen Polynome

Wir wollen in diesem Kapitel alle algebraischen Eigenschaften der elementarsymmetrischen Polynome und deren Quotienten aufstellen, die im Verlauf der restlichen Arbeit für uns von Bedeutung sein werden.
Für jedes $k \in \{1,...,n\}$ seien die elementarsymmetrischen Polynome S_k und deren Quotienten Q_k wie in Kapitel 1 definiert als

$$S_k(\lambda) = \sum_{1\leq i_1<...<i_k\leq n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdot \ldots \cdot \lambda_{i_k} \qquad \text{für} \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in I\!R^n$$

und

$$Q_k(\lambda) = \frac{S_k(\lambda)}{S_{k-1}(\lambda)} \qquad \text{für} \quad \lambda \in \Gamma_{k-1}$$

mit $S_0 \equiv 1$ und $S_k \equiv 0$ für $k > n$. Dabei definieren wir

$$\Gamma_k := \{\lambda \in I\!R^n \,|\, S_1(\lambda) > 0,\ S_2(\lambda) > 0, \ldots, S_k(\lambda) > 0\}\,.$$

Die Mengen Γ_k sind also offene Kegel und erfüllen für alle $k \in \{1,...,n-1\}$ die Relation $\Gamma_{k+1} \subset \Gamma_k$. Außerdem stimmt Γ_n mit dem positiven Kegel überein.

Weiter wollen wir mit $S_{k;i}(\lambda)$ die Summe aller Terme von $S_k(\lambda)$ bezeichnen, die den Faktor λ_i nicht enthalten. Damit ergeben sich dann folgende Identitäten (vergleiche [HS], Proposition 2.2).

Lemma 2.1 *Für alle $k \in \{0,...,n\}$, $i \in \{1,...,n\}$ und $\lambda \in I\!R^n$ gilt*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_{k+1}}{\partial \lambda_i}(\lambda) &= S_{k;i}(\lambda)\,, & (1)\\
S_{k+1}(\lambda) &= S_{k+1;i}(\lambda) + \lambda_i S_{k;i}(\lambda)\,, & (2)\\
\sum_{i=1}^{n} S_{k;i}(\lambda) &= (n-k)S_k(\lambda)\,, & (3)\\
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_{k;i}(\lambda) &= (k+1)S_{k+1}(\lambda)\,, & (4)\\
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 S_{k;i}(\lambda) &= S_1(\lambda)S_{k+1}(\lambda) - (k+2)S_{k+2}(\lambda)\,. & (5)
\end{aligned}$$

Beweis: Die Aussagen (1) und (2) folgen direkt aus der Definition. Eigenschaft (4) folgt dann aus (1) und der Tatsache, dass die Polynome S_k homogen vom Grad k sind. Summiert man Eigenschaft (2) über $i = 1,...,n$, so erhält man mit (4) auch Eigenschaft (3). Außerdem gilt für alle $\lambda \in I\!R^n$ mit (2), dass

$$S_{k+2}(\lambda) - S_{k+2;i}(\lambda) = \lambda_i S_{k+1;i}(\lambda) = \lambda_i S_{k+1}(\lambda) - \lambda_i^2 S_{k;i}(\lambda)\,,$$

und daraus folgt wieder durch Summation über $i = 1, ..., n$ und mit (3), dass

$$(k+2)S_{k+2}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\lambda_i S_{k+1}(\lambda) - \lambda_i^2 S_{k;i}(\lambda)\Big)\,,$$

womit auch (5) bewiesen ist. □

Eine weitere wichtige Eigenschaft dieser Polynome ist die sogenannte Newton-Ungleichung (siehe zum Beispiel [HLP], Theorem 51).

Lemma 2.2 (Newton-Ungleichung) *Für alle $k \in \{1, ..., n-1\}$ und $\lambda \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$(k+1)(n-k+1)S_{k-1}(\lambda)S_{k+1}(\lambda) \le k(n-k)S_k^2(\lambda)\,.$$

Wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn alle λ_i identisch sind.

Beweis: Dividiert man die Polynome S_k durch die Anzahl ihrer Summanden, so erhält man Polynome P_k. Das bedeutet also

$$S_k = \binom{n}{k} \cdot P_k\,.$$

Die Aussage des Theorems ist dann äquivalent zu

$$P_{k-1}P_{k+1} \le P_k^2\,.$$

Diese Aussage beweist man mittels Induktion über n:
Für $n = 2$ ist die Aussage klar. Nehmen wir also an, die Aussage sei für $(n-1)$ Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$ bereits bewiesen, das heißt es gilt als Induktionsvoraussetzung

$$P_{k-1;n}\, P_{k+1;n} \le P_{k;n}^2 \quad \text{für } \lambda_1, ..., \lambda_{n-1} \text{ und } k \in \{1, ..., n-2\}\,.$$

Nach Lemma 2.1 gilt $S_k = S_{k;n} + \lambda_n S_{k-1;n}$, was äquivalent ist zu

$$P_k = \frac{n-k}{n} P_{k;n} + \lambda_n \frac{k}{n} P_{k-1;n}\,.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} n^2(P_{k-1}P_{k+1} - P_k^2) &= n^2\bigg(\Big(\tfrac{n-k+1}{n} P_{k-1;n} + \lambda_n \tfrac{k-1}{n} P_{k-2;n}\Big)\Big(\tfrac{n-k-1}{n} P_{k+1;n} + \lambda_n \tfrac{k+1}{n} P_{k;n}\Big) \\ &\qquad - \Big(\tfrac{n-k}{n} P_{k;n} + \lambda_n \tfrac{k}{n} P_{k-1;n}\Big)^2\bigg) \\ &= B_1 + B_2\,\lambda_n + B_3\,\lambda_n^2\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{wobei}\quad B_1 : &= ((n-k)^2-1)P_{k-1;n}P_{k+1;n} - (n-k)^2 P_{k;n}^2\,,\\
B_2 : &= (n-k+1)(k+1)P_{k-1;n}P_{k;n} + (n-k-1)(k-1)P_{k-2;n}P_{k+1;n}\\
&\quad -2k(n-k)P_{k;n}P_{k-1;n}\,,\\
B_3 : &= (k^2-1)P_{k-2;n}P_{k;n} - k^2 P_{k-1;n}^2\,.
\end{aligned}$$

Die Induktionsvoraussetzung liefert $B_1 \le -P_{k;n}^2$ und $P_{k-2;n}P_{k+1;n} \le P_{k;n}P_{k-1;n}$. Somit ist $B_2 \le 2P_{k-1;n}P_{k;n}$ und $B_3 \le -P_{k-1;n}^2$. Insgesamt gilt also

$$n^2(P_{k-1}P_{k+1} - P_k^2) \le -(P_{k;n} - \lambda_n\, P_{k-1;n})^2 \le 0\,,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Aus der Newton-Ungleichung ergeben sich einige wichtige Folgerungen, die hier kurz vorgeführt seien.

Lemma 2.3 *Sei $\lambda \in \Gamma_k$ für ein $k \in \{1,...,n\}$. Dann gilt $S_{l;i}(\lambda) > 0$ für alle $l \in \{1,...,k-1\}$ und $i \in \{1,...,n\}$.*

Beweis: Die Aussage soll mittels Induktion über l bewiesen werden (vergleiche [HS], Lemma 2.4).
Der Fall $l = 0$ ist dabei trivial. Für beliebiges $l \in \{1,...,k-1\}$ gilt dann mit (2) aus Lemma 2.1 für alle $i \in \{1,...,n\}$ und $\lambda \in \Gamma_k$

$$\lambda_i\, S_{l;i}(\lambda) + S_{l+1;i}(\lambda) = S_{l+1}(\lambda) > 0 \quad \text{und} \quad \lambda_i\, S_{l-1;i}(\lambda) + S_{l;i}(\lambda) = S_l(\lambda) > 0\,.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist aber $S_{l-1;i}(\lambda) > 0$.
Nehmen wir nun an, dass $S_{l;i}(\lambda) \le 0$ gilt. Dann ist

$$\lambda_i\, S_{l-1;i}(\lambda) = S_l(\lambda) - S_{l;i}(\lambda) > 0\,, \quad \text{also} \quad \lambda_i > 0\,.$$

Daraus folgt

$$S_{l+1;i}(\lambda) > -\lambda_i\, S_{l;i}(\lambda) \ge 0\,, \quad \text{beziehungsweise} \quad \lambda_i\, S_{l-1;i}(\lambda) > -S_{l;i}(\lambda) \ge 0\,,$$

und somit

$$S_{l-1;i}(\lambda)S_{l+1;i}(\lambda) > S_{l;i}^2(\lambda)\,,$$

was der Newton-Ungleichung widerspricht. Also muss doch $S_{l;i}(\lambda) > 0$ gelten. □

Besonders wichtig in vielen Anwendungen ist folgende Tatsache:

Lemma 2.4 *Die Funktion Q_{k+1} ist konkav auf Γ_k für $k \in \{0,...,n-1\}$.*

Beweis: (Vergleiche [Lie], Kapitel XV, 4.) Offensichtlich ist für alle $k \in \{0, ..., n-1\}$ die Funktion Q_{k+1} homogen vom Grad 1. In diesem Fall ist die Aussage, dass Q_k konkav ist, das heißt, dass

$$Q_k(s\,x + (1-s)\,y) \geq s\,Q_k(x) + (1-s)\,Q_k(y)$$

für alle $s \in [\,0, 1\,]$ und $x, y \in \Gamma_{k-1}$ gilt, äquivalent dazu, dass Q_k superadditiv ist, also

$$Q_k(x+y) \geq Q_k(x) + Q_k(y)$$

für alle $x, y \in \Gamma_{k-1}$ gilt. Dies soll mittels Induktion über k bewiesen werden.

Für $k = 0$ ist die Aussage trivial. Sei also $k > 0$ beliebig. Dann gilt mit Lemma 2.1 (2) und (5)

$$(k+1)\,Q_{k+1}(x) = \sum_{i=1}^{n} \Big(x_i - x_i^2\,\frac{S_{k-1;i(x)}}{S_k(x)}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(x_i - \frac{x_i^2}{Q_{k;i}(x) + x_i}\Big)\,.$$

Dabei ist $Q_{k;i}(x) := \frac{S_{k;i}(x)}{S_{k-1;i}(x)}$.

Man beachte, dass wegen Lemma 2.3 $Q_{k;i}(x) + x_i = \frac{S_k(x)}{S_{k-1;i}(x)} > 0$ für alle $x \in \Gamma_k$ gilt. Für $x, y \in \Gamma_k$ ist also

$$\begin{aligned}
&(k+1)\,\Big(Q_{k+1}(x+y) - Q_{k+1}(x) - Q_{k+1}(y)\Big) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{x_i^2}{Q_{k;i}(x) + x_i} + \frac{y_i^2}{Q_{k;i}(y) + y_i} - \frac{(x_i + y_i)^2}{Q_{k;i}(x+y) + x_i + y_i}\Big)\,,
\end{aligned}$$

und mit der Induktionsvoraussetzung, dass $Q_{k;i}$ superadditiv ist, folgt

$$\begin{aligned}
(k+1)\,\Big(Q_{k+1}(x+y) &- Q_{k+1}(x) - Q_{k+1}(y)\Big) \\
\geq\ & \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2(Q_{k;i}(y) + y_i)(Q_{k;i}(x) + Q_{k;i}(y) + x_i + y_i)}{(Q_{k;i}(x) + x_i)(Q_{k;i}(y) + y_i)(Q_{k;i}(x) + Q_{k;i}(y) + x_i + y_i)} \\
& + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2(Q_{k;i}(x) + x_i)(Q_{k;i}(x) + Q_{k;i}(y) + x_i + y_i)}{(Q_{k;i}(x) + x_i)(Q_{k;i}(y) + y_i)(Q_{k;i}(x) + Q_{k;i}(y) + x_i + y_i)} \\
& - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i + y_i)^2(Q_{k;i}(x) + x_i)(Q_{k;i}(y) + y_i)}{(Q_{k;i}(x) + x_i)(Q_{k;i}(y) + y_i)(Q_{k;i}(x) + Q_{k;i}(y) + x_i + y_i)} \\
=\ & \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 Q_{k;i}^2(y) + y_i^2 Q_{k;i}^2(x) - 2x_i y_i Q_{k;i}(x) Q_{k;i}(y)}{(Q_{k;i}(x) + x_i)(Q_{k;i}(y) + y_i)(Q_{k;i}(x) + Q_{k;i}(y) + x_i + y_i)} \\
=\ & \sum_{i=1}^{n} \frac{\Big(x_i Q_{k;i}(y) - y_i Q_{k;i}(x)\Big)^2}{(Q_{k;i}(x) + x_i)(Q_{k;i}(y) + y_i)(Q_{k;i}(x) + Q_{k;i}(y) + x_i + y_i)} \\
\geq\ & 0\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Die Größe $\frac{\partial Q_k}{\partial \lambda_i}$ ist für die Existenz von Lösungen der Krümmungsflüsse mit Geschwindigkeiten Q_k sehr entscheidend. Deshalb wollen wir sie im Folgenden näher untersuchen.

Lemma 2.5 *Auf* Γ_k *gilt* $\frac{\partial Q_k(\lambda)}{\partial \lambda_i} > 0$ *für alle* $i \in \{1, ..., n\}$ *und* $k \in \{1, ..., n\}$.

Auf $\Gamma_{k-1} \cap \{\lambda \in I\!R^n \mid S_k(\lambda) = 0\}$ *gilt hingegen für* $k \in \{2, ..., n\}$

$$\frac{\partial Q_k(\lambda)}{\partial \lambda_i} = 0 \qquad \textit{für alle } i \textit{ mit } \lambda_i > 0$$

$$\textit{und} \quad \frac{\partial Q_k(\lambda)}{\partial \lambda_i} > 0 \qquad \textit{für alle } i \textit{ mit } \lambda_i = 0\,.$$

Beweis: Für $k = 1$ ist $Q_k = Q_1 = H$ und die Behauptung somit klar. Im Fall $k \in \{2, ..., n\}$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_k(\lambda)}{\partial \lambda_i} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\left(\frac{S_k(\lambda)}{S_{k-1}(\lambda)}\right) \\
&= \frac{1}{S_{k-1}^2(\lambda)}\Big(S_{k-1;i}(\lambda)S_{k-1}(\lambda) - S_k(\lambda)S_{k-2;i}(\lambda)\Big) && \text{mit Lemma 2.1 (1)} \\
&= \frac{1}{S_{k-1}^2(\lambda)}\Big(S_{k-1;i}^2(\lambda) - S_{k;i}(\lambda)S_{k-2;i}(\lambda)\Big) && \text{mit Lemma 2.1 (2)} \\
&\geq \frac{n}{k(n-k+1)}\left(\frac{S_{k-1;i}(\lambda)}{S_{k-1}(\lambda)}\right)^2 && \text{mit der Newton-Ungleichung.}
\end{aligned}$$

Also ist $\frac{\partial Q_k(\lambda)}{\partial \lambda_i} \geq 0$ auf Γ_{k-1}, und wegen Lemma 2.3 ist $\frac{\partial Q_k(\lambda)}{\partial \lambda_i} > 0$ auf Γ_k.
Auf $\Gamma_{k-1} \cap \{\lambda \in I\!R^n \mid S_k(\lambda) = 0\}$ gilt offensichtlich außerdem

$$\frac{\partial Q_k(\lambda)}{\partial \lambda_i} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad S_{k-1;i}(\lambda) = 0\,.$$

Also ist $\frac{\partial Q_k(\lambda)}{\partial \lambda_i} = 0$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$ mit $\lambda_i \neq 0$, weil $S_{k-1}(\lambda) > 0$ gelten muss, und umgekehrt ist $\frac{\partial Q_k(\lambda)}{\partial \lambda_i} > 0$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$ mit $\lambda_i = 0$. □

Eine Größe, die im Folgenden häufig auftreten wird, ist $\frac{\partial Q_k}{\partial h^i_j} h^i_l h^l_j$, beziehungsweise in geeigneten Koordinaten $\sum_{i=1}^n \frac{\partial Q_k}{\partial \lambda_i} \lambda_i^2$. Für diesen Ausdruck gilt:

Lemma 2.6 *Für alle* $k \in \{1, ..., n\}$ *und* $\lambda \in I\!R^n$ *gilt*

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial Q_k(\lambda)}{\partial \lambda_i}\,\lambda_i^2 \geq \frac{k}{n-k+1}\,Q_k^2(\lambda)\,.$$

Beweis: Wie in Lemma 2.5 ist

$$\frac{\partial Q_k(\lambda)}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{S_{k-1}^2(\lambda)}\Big(S_{k-1;i}(\lambda)S_{k-1}(\lambda) - S_k(\lambda)S_{k-2;i}(\lambda)\Big)\,.$$

Also gilt mit Lemma 2.1 (5) und der Newton-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \frac{\partial Q_k(\lambda)}{\partial \lambda_i}\,\lambda_i^2 &= \frac{1}{S_{k-1}^2(\lambda)}\Big(k\,S_k^2(\lambda) - (k+1)\,S_{k-1}(\lambda)S_{k+1}(\lambda)\Big) \\
&\geq \frac{1}{S_{k-1}^2(\lambda)}\Big(k\,S_k^2(\lambda) - \tfrac{k\,(n-k)}{n-k+1}\,S_k^2(\lambda)\Big) \\
&= \tfrac{k}{n-k+1}\;Q_k^2(\lambda)\,.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.7 Für $k = 1$, also $Q_1 = H$ bedeutet dies gerade $|A|^2 \geq \frac{1}{n}\,H^2$.

3 Evolutionsgleichungen

In diesem Kapitel wollen wir allgemeine Krümmungsflüsse betrachten, das heißt Evolutionen von Hyperflächen, deren Geschwindigkeit durch eine homogene symmetrische Funktion f der Hauptkrümmungen gegeben ist. Wir werden für diese Flüsse die Evolutionsgleichungen der auftretenden geometrischen Größen berechnen und zeigen, dass nach Wahl geeigneter Voraussetzungen strikt konvexe Startflächen unter der Evolution strikt konvex bleiben.
Es handelt sich bei den Resultaten diesen Kapitels um keine neuen Ergebnisse, da bereits andere Autoren derartige Krümmungsflüsse untersucht haben. Stellvertretend seien an dieser Stelle B. Andrews und C. Gerhardt genannt (siehe zum Beispiel [A1] und [Ger]). Eine gute Zusammenfassung einer Reihe bekannter Ergebnisse findet man außerdem in [HP].

Im Folgenden sei nun M^n immer eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand und

$$F_0 : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$$

eine glatte Immersion. Dabei sei $M_0 = F_0(M^n)$ orientierbar, so dass ein globales Normalenvektorfeld ν wählbar ist. Dieses soll in dieser Arbeit stets das äußere Normalenfeld sein. Desweiteren sei die glatte Einparameter-Familie von Hyperflächen

$$F : M^n \times [\,0, T\,) \to \mathbb{R}^{n+1}$$

mit $T > 0$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$(\star_f) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} F(p,t) &= -f(p,t) \cdot \nu(p,t) \qquad \text{für alle } p \in M^n, t \geq 0 \\ \\ F(\cdot, 0) &= F_0\,. \end{cases}$$

Die Geschwindigkeit f sei dabei eine glatte, symmetrische und homogene Funktion der Hauptkrümmungen $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Aufgrund der Symmetrie von f können wir äquivalent dazu f als eine Funktion $\tilde{f}$ der Weingartenabbildung W oder als eine Funktion $\hat{f}$ der zweiten Fundamentalform A auffassen:

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \tilde{f}(W) = \tilde{f}(h^i_j) = \hat{f}(A) = \hat{f}(h_{ij})\,.$$

Die Vorzeichen in $(\star_f)$ sind so gewählt, dass die mittlere Krümmung einer konvexen Fläche immer positiv ist und sich die Flächen in Richtung ihrer inneren Einheitsnormalen bewegen.
Aus der Evolutionsgleichung $(\star_f)$ für die Flächen $M_t := F(M^n, t)$ ergeben sich nun Evolutionsgleichungen für deren geometrische Größen.

Lemma 3.1 *Es gelten folgende Evolutionsgleichungen für geometrische Größen der Flächen M_t, d.h. für Lösungen der Gleichung ($\star_f$):*

1) $\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2f h_{ij}$

2) $\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = 2f h^{ij}$

3) $\frac{\partial}{\partial t} \nu = \nabla f$

4) $\frac{\partial}{\partial t} h_{ij} = \nabla_i \nabla_j f - h_{ik} h^k_j f$

5) $\frac{\partial}{\partial t} h^i_j = \nabla^i \nabla_j f + h^{ik} h_{kj} f$

6) $\frac{\partial}{\partial t} f = \frac{\partial f}{\partial h^i_j} \nabla^i \nabla_j f + \frac{\partial f}{\partial h^i_j} h^{ik} h_{kj} f$

7) $\frac{\partial}{\partial t} H = \Delta f + |A|^2 f$

Beweis: Siehe beispielsweise [A1], Kapitel 3. □

Wir werden jetzt die Vertauschungsrelationen aus Lemma 1.1 benutzen, um die Evolutionsgleichungen für die Krümmung in parabolische Systeme auf der Hyperfläche umzuwandeln.
Dazu definieren wir für jede Geschwindigkeit f den zugehörigen (meist nichtlinearen) Operator $\Box_f$ durch

$$\Box_f u := \frac{\partial \tilde{f}}{\partial h^i_j} \nabla^i \nabla_j u = \frac{\partial \hat{f}}{\partial h_{lj}} g_{li} \nabla^i \nabla_j u = \frac{\partial \hat{f}}{\partial h_{ij}} \nabla_i \nabla_j u \,.$$

Offensichtlich ist für den mittleren Krümmungsfluss $\Box_H = \Delta$ der Laplace-Beltrami-Operator, und allgemein gilt, dass $\Box_f$ genau dann ein elliptischer Operator ist, wenn

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial h_{ij}}(p)\, \xi^i \xi^j > 0 \quad \text{für alle} \quad 0 \neq \xi \in I\!R^n \,,\ p \in M^n \,.$$

Äquivalent dazu ist die Bedingung, dass

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}(p) > 0 \quad \text{für alle} \quad 1 \leq i \leq n \,,\ p \in M^n \,.$$

Im Fall $f = Q_k$ für ein $k \in \{1, ..., n\}$ schreiben wir $\Box_k = \frac{\partial Q_k}{\partial h^i_j} \nabla^i \nabla_j$, insbesondere also $\Box_H = \Box_1 = \Delta$.

Korollar 3.2 *Sei f homogen vom Grad 1. Auf den Lösungen $M_t = F(M^n, t)$ des Problems $(\star_f)$ gilt dann*

a) für die zweite Fundamentalform

$$\frac{\partial}{\partial t} h_{ij} = \Box_f h_{ij} + \frac{\partial^2 f}{\partial h_q^p \partial h_l^k} \nabla_i h_q^p \nabla_j h_l^k + \frac{\partial f}{\partial h_l^k} h_m^k h_l^m \cdot h_{ij} - 2\, h_{ik} h_j^k\, f\,.$$

b) für die Weingarten-Abbildung

$$\frac{\partial}{\partial t} h_j^i = \Box_f h_j^i + \frac{\partial^2 f}{\partial h_q^p \partial h_l^k} \nabla^i h_q^p \nabla_j h_l^k + \frac{\partial f}{\partial h_l^k} h_m^k h_l^m \cdot h_j^i\,.$$

c) für die mittlere Krümmung

$$\frac{\partial}{\partial t} H = \Box_f H + \frac{\partial^2 f}{\partial h_q^p \partial h_l^k} \nabla^i h_q^p \nabla_i h_l^k + \frac{\partial f}{\partial h_l^k} h_m^k h_l^m \cdot H\,.$$

d) für ein symmetrisches Polynom K in den Hauptkrümmungen, das homogen vom Grad α ist

$$\frac{\partial}{\partial t} K = \Box_f K - \frac{\partial f}{\partial h_j^i} \frac{\partial^2 K}{\partial h_q^p \partial h_l^k} \nabla^i h_q^p \nabla_j h_l^k + \frac{\partial K}{\partial h_j^i} \frac{\partial^2 f}{\partial h_q^p \partial h_l^k} \nabla^i h_q^p \nabla_j h_l^k + \alpha \frac{\partial f}{\partial h_l^k} h_m^k h_l^m \cdot K\,.$$

Beweis: Wegen $\nabla_i f = \frac{\partial f}{\partial h_l^k} \nabla_i h_l^k$ gilt auch

$$\nabla_i \nabla_j f = \frac{\partial^2 f}{\partial h_q^p \partial h_l^k} \nabla_i h_q^p \nabla_j h_l^k + \frac{\partial f}{\partial h_l^k} \nabla_i \nabla_j h_l^k\,.$$

Für die zweite Fundamentalform gilt also mit Lemma 3.1, 4) und Lemma 1.1

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} h_{ij} &= \nabla_i \nabla_j f - h_{ik} h_j^k \cdot f = \frac{\partial f}{\partial h_l^k} \nabla_i \nabla_j h_l^k + \frac{\partial^2 f}{\partial h_q^p \partial h_l^k} \nabla_i h_q^p \nabla_j h_l^k - h_{ik} h_j^k \cdot f \\
&= \frac{\partial f}{\partial h_l^k} \{ \nabla^k \nabla_l h_{ij} + h_m^k h_{il} h_j^m - h_l^k h_{im} h_j^m + h_m^k h_{ij} h_l^m - h_j^k h_{im} h_l^m \} \\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial h_q^p \partial h_l^k} \nabla_i h_q^p \nabla_j h_l^k - h_{ik} h_j^k \cdot f \\
&= \Box_f h_{ij} + \frac{\partial^2 f}{\partial h_q^p \partial h_l^k} \nabla_i h_q^p \nabla_j h_l^k - 2 h_{im} h_j^m \cdot f + \frac{\partial f}{\partial h_l^k} h_m^k h_l^m \cdot h_{ij}\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt wie in Lemma 3.1 mit $h_j^i = g^{ik} h_{kj}$ die Behauptung b) und mit $H = g^{ij} h_{ij}$ die Behauptung c).
d) folgt sofort aus $\frac{\partial K}{\partial h_l^k} h_l^k = \alpha \cdot K$ und $\nabla_j K = \frac{\partial K}{\partial h_l^k} \nabla_j h_l^k$, beziehungsweise

$$\nabla^i \nabla_j K = \frac{\partial^2 K}{\partial h_q^p \partial h_l^k} \nabla^i h_q^p \nabla_j h_l^k + \frac{\partial K}{\partial h_l^k} \nabla^i \nabla_j h_l^k\,.$$

$\Box$

Für die weiteren Rechnungen wird es sich als hilfreich erweisen, statt der Weingartenabbildung deren inverse Abbildung, beziehungsweise symmetrische Polynome in den Eigenwerten dieser Abbildung zu betrachten. Falls M^n also strikt konvex ist (das heißt falls alle Hauptkrümmungen positiv sind), ist

$$W^{-1}(p) = \{b^i_j\} : T_pM^n \to T_pM^n$$

wohldefiniert, und es gilt

$$b^i_l\, h^l_j = \delta^i_j\,.$$

Die Eigenwerte von $W^{-1}(p)$ seien mit $\kappa_1(p), ..., \kappa_n(p)$ bezeichnet. Sie werden auch Hauptradien der Fläche genannt, und es gilt offensichtlich

$$\kappa_i(p) = \frac{1}{\lambda_i(p)} \qquad \text{für alle } i \in \{1, ..., n\}\,.$$

Für die b^i_j gilt folgende Evolutionsgleichung.

Lemma 3.3 *Es gilt für alle* $i, j \in \{1, ..., n\}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\, b^i_j = \Box_f\, b^i_j - b^i_p b^q_j\, \frac{\partial^2 f}{\partial h^k_l \partial h^m_n}\, \nabla^p h^k_l \nabla_q h^m_n - 2\, b^i_m b^n_p b^q_j\, \frac{\partial f}{\partial h^k_l}\, \nabla^k h^p_q \nabla_l h^m_n - \frac{\partial f}{\partial h^p_q}\, h^p_m h^m_q \cdot b^i_j\,.$$

Beweis:
Aus $b^i_l\, h^l_j = \delta^i_j$ folgt $\frac{\partial}{\partial t}\, b^i_j = -b^i_p\, b^q_j \frac{\partial}{\partial t}\, h^p_q$, beziehungsweise $\nabla_k\, b^i_j = -b^i_p\, b^q_j \nabla_k\, h^p_q$ und somit

$$\nabla^k \nabla_l\, b^i_j = 2\, b^i_m\, b^q_j\, b^n_p\, \nabla^k h^p_q \nabla_l h^m_n - b^i_p\, b^q_j \nabla^k \nabla_l\, h^p_q\,.$$

Mit Korollar 3.2 b) folgt dann die Behauptung. □

Genauso wie man symmetrische Polynome in den Hauptkrümmungen betrachtet, kann man nun für konvexe Flächen die entsprechenden Polynome in den Hauptradien untersuchen. Wir definieren dazu

$$\tilde{H} := tr(W^{-1}) = \kappa_1 + ... + \kappa_n\,,$$

beziehungsweise allgemein für $k \in \{1, ..., n\}$

$$\tilde{S}_k = S_k(\kappa) := \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n} \kappa_{i_1} \kappa_{i_2} \cdot ... \cdot \kappa_{i_k}\,,$$

und

$$\tilde{Q}_k = Q_k(\kappa) := \frac{S_k(\kappa)}{S_{k-1}(\kappa)}\,.$$

Für $\tilde{H}$ gilt dann folgende Evolutionsgleichung.

Lemma 3.4 *Es gilt*

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{H} = \Box_f \tilde{H} - b^i_p b^q_i \frac{\partial^2 f}{\partial h^k_l \partial h^m_n} \nabla^p h^k_l \nabla_q h^m_n - 2\, b^i_m b^n_p b^q_i \frac{\partial f}{\partial h^k_l} \nabla^k h^p_q \nabla_l h^m_n - \frac{\partial f}{\partial h^p_q} h^p_m h^m_q \cdot \tilde{H}\,.$$

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus Lemma 3.3 mit $\tilde{H} = b^i_i = \delta^i_j\, b^j_i$. $\Box$

Wie wir gleich sehen werden, vereinfachen sich die Evolutionsgleichungen für b^i_j und $\tilde{H}$, wenn man annimmt, dass $f(\lambda) = \frac{1}{g(\kappa)}$ für eine Funktion g in den Hauptradien gilt.
Dabei wollen wir im Folgenden die Funktionen f und g jeweils als Funktionen von λ beziehungsweise h^i_j und κ beziehungsweise b^i_j auffassen, ohne dies in der Notation zu unterscheiden.

Lemma 3.5 *Sei* $f(h^i_j) = \frac{1}{g(b^i_j)}$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial h^i_j \partial h^p_q} &= \frac{2}{f}\frac{\partial f}{\partial h^i_j}\frac{\partial f}{\partial h^p_q} - \frac{1}{g^2}\frac{\partial^2 g}{\partial b^m_n \partial b^k_l} b^{mq}\, b_{np}\, b^{jk}\, b_{il} - \frac{1}{g^2}\frac{\partial g}{\partial b^k_l}\left(b^{jq}\, b^k_p\, b_{il} + b^{jk}\, b^q_l\, b_{ip}\right)\\
&= \frac{2}{f}\frac{\partial f}{\partial h^i_j}\frac{\partial f}{\partial h^p_q} - \frac{1}{g^2}\frac{\partial^2 g}{\partial b^m_n \partial b^k_l} b^{mq}\, b_{np}\, b^{jk}\, b_{il} - \frac{\partial f}{\partial h^{ip}} b^{jq} - \frac{\partial f}{\partial h_{jq}} b_{ip}\,.
\end{aligned}$$

Beweis: Aus $h^k_j\, b^j_l = \delta^k_l$ folgt $\frac{\partial}{\partial h^i_j} b^k_l = -\, b^{jk}\, b_{il}$. Also ist

$$\frac{\partial f}{\partial h^i_j} = -\frac{1}{g^2}\frac{\partial g}{\partial h^i_j} = -\frac{1}{g^2}\frac{\partial g}{\partial b^k_l}\frac{\partial}{\partial h^i_j} b^k_l = \frac{1}{g^2}\frac{\partial g}{\partial b^k_l} b^{jk} b_{il}\,.$$

Daraus folgt dann

$$\frac{\partial^2 f}{\partial h^i_j \partial h^p_q} = -\frac{2}{g^3}\frac{\partial g}{\partial h^p_q}\frac{\partial g}{\partial b^k_l} b^{jk} b_{il} + \frac{1}{g^2}\frac{\partial^2 g}{\partial b^m_n \partial b^k_l}\Big(\frac{\partial}{\partial h^p_q} b^m_n\Big) b^{jk} b_{il} + \frac{1}{g^2}\frac{\partial g}{\partial b^k_l}\frac{\partial}{\partial h^p_q}\left(b^{jk} b_{il}\right).$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial h^p_q} b^{jk} = \frac{\partial}{\partial h^p_q}\left(g^{jl}\, b^k_l\right) = -\, g^{jl}\, b^k_p\, b^q_l = -\, b^{jq}\, b^k_p$$

und analog

$$\frac{\partial}{\partial h^p_q} b_{il} = \frac{\partial}{\partial h^p_q}\left(g_{ik}\, b^k_l\right) = -\, g_{ik}\, b^k_p\, b^q_l = -\, b_{ip}\, b^q_l$$

folgt daraus die Behauptung. $\Box$

Nimmt man nun zusätzlich an, dass $g(\kappa)$ eine konkave Funktion ist, so gilt:

Lemma 3.6
Falls g konkav auf Γ_n und $f > 0$ ist, gilt für strikt konvexe Flächen M_t

$$\frac{\partial}{\partial t} b^i_j \;\leq\; \Box_f\, b^i_j - \frac{\partial f}{\partial h^p_q}\, h^p_m\, h^m_q \cdot b^i_j \tag{6}$$

$$\text{und}\quad \frac{\partial}{\partial t} \tilde{H} \;\leq\; \Box_f\, \tilde{H} - \frac{\partial f}{\partial h^p_q}\, h^p_m\, h^m_q \cdot \tilde{H}\,. \tag{7}$$

Beweis: Mit Lemma 3.5 gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} b^i_j \;=\; & \Box_f\, b^i_j - b^i_p\, b^q_j \Big(\frac{2}{f}\,\frac{\partial f}{\partial h^k_l}\,\frac{\partial f}{\partial h^m_n} - \frac{1}{g^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial b^r_s \partial b^v_w}\, b^{lr}\, b_{ks}\, b^{nv}\, b_{mw} - \frac{\partial f}{\partial h^{km}}\, b^{ln} \\ & - \frac{\partial f}{\partial h_{ln}}\, b_{km}\Big) \nabla^p h^k_l \nabla_q h^m_n - 2\, b^i_m\, b^n_p\, b^q_j\, \frac{\partial f}{\partial h^k_l}\, \nabla^k h^p_q \nabla_l h^m_n - \frac{\partial f}{\partial h^p_q}\, h^p_m\, h^m_q \cdot b^i_j\,.\end{aligned}$$

Da g konkav ist, gilt

$$b^i_p b^q_j\, \frac{\partial^2 g}{\partial b^r_s \partial b^v_w}\, (b^{lr}\, b_{ks}\, \nabla^p h^k_l)(b^{nv}\, b_{mw} \nabla_q h^m_n) \leq 0\,,$$

und somit

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} b^i_j \;\leq\; & \Box_f\, b^i_j - \frac{2}{f}\, b^i_p\, b^q_j\, \nabla^p f\, \nabla_q f + b^i_p\, b^q_j\, b^{ln}\, g_{rm} \frac{\partial f}{\partial h^k_r}\, \nabla^p h^k_l \nabla_q h^m_n \\ & + b^i_p\, b^q_j\, b_{km}\, g^{sn} \frac{\partial f}{\partial h^s_l}\, \nabla^p h^k_l \nabla_q h^m_n - 2\, b^i_m\, b^q_j\, b^n_p\, \frac{\partial f}{\partial h^k_l}\, \nabla^k h^p_q \nabla_l h^m_n - \frac{\partial f}{\partial h^p_q}\, h^p_m\, h^m_q \cdot b^i_j\,.\end{aligned}$$

Mit den Codazzi-Gleichungen folgt dann

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} b^i_j \;\leq\; & \Box_f\, b^i_j - \frac{2}{f}\, b^i_p\, b^q_j\, \nabla^p f\, \nabla_q f + b^i_p\, b^q_j\, b^l_n\, \frac{\partial f}{\partial h^k_m}\, \nabla^k h^p_l \nabla_m h^n_q \\ & + b^i_p\, b^q_j\, b^k_m\, \frac{\partial f}{\partial h^n_l}\, \nabla_l h^p_k \nabla^n h^m_q - 2\, b^i_m\, b^q_j\, b^n_p\, \frac{\partial f}{\partial h^k_l}\, \nabla^k h^p_q \nabla_l h^m_n - \frac{\partial f}{\partial h^p_q}\, h^p_m\, h^m_q \cdot b^i_j\,,\end{aligned}$$

und wegen

$$-\frac{2}{f}\, b^i_p\, b^q_j\, \nabla^p f\, \nabla_q f \leq 0$$

folgt der erste Teil der Behauptung. Der zweite Teil ist wieder eine Folgerung aus $\tilde{H} = \delta^i_j\, b^j_i$. □

Der Ertrag dieser Vorarbeit ist folgendes Theorem:

Theorem 3.7 *Falls sich die Geschwindigkeit f auf Γ_n als Inverses einer konkaven Funktion g schreiben lässt, $g(b^i_j) = \frac{1}{f(h^i_j)}$, so bleiben die Lösungsflächen M_t des Problems $(\star_f)$ strikt konvex, wenn die Anfangsfläche strikt konvex war, solange $\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} > 0$ für $1 \leq i \leq n$ und $f > 0$ gilt.*

Beweis: Mit dem schwachen Maximumprinzip für strikt parabolische partielle Differentialgleichungen (siehe zum Beispiel [PW], Kapitel 3) folgt aus Lemma 3.6 und wegen $\tilde{H} > 0$ auf M_0, dass $\tilde{H}$ für $t > 0$ kein positives Maximum haben kann. Es gilt somit

$$(\star) \qquad \max_{M_t} \tilde{H} \leq \max_{M_0} \tilde{H}\,.$$

Angenommen, es würde nun $\lambda_i = 0$ zu einem ersten Zeitpunkt $t > 0$ und für ein $i \in \{1, ..., n\}$ gelten, so müßte wegen $\tilde{H} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}$ dort $\tilde{H} \to \infty$ gelten, was im Widerspruch zu $(\star)$ steht. Also gilt $\lambda_i > 0$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$ auf M_t. $\square$

4 A priori Abschätzungen für Q_k-Flüsse

In diesem Kapitel wollen wir als Geschwindigkeit f die Quotienten Q_k betrachten für $k \in \{1, ..., n\}$ und einige direkte Konsequenzen aus den Evolutionsgleichungen des letzten Kapitels ziehen.
Wir betrachten also im Folgenden für $1 \leq k \leq n$ Lösungen des Problems

$$(\star_k) \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} F(p,t) &= \; - Q_k(p,t) \cdot \nu(p,t) \qquad \text{für alle } p \in M^n,\ t \geq 0 \\[2ex] F(\,\cdot\,,0) &= \; F_0\,, \end{cases}$$

wobei $M_0 = F_0(M^n)$ eine glatte, orientierbare, geschlossene Hyperfläche des $I\!R^{n+1}$ ist und ν wieder das äußere Normalenvektorfeld bezeichnet.
Falls wir nun $\lambda \in \Gamma_k$ für die Hauptkrümmungen $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ von M_0 fordern, ist die Gleichung wegen Lemma 2.5 gleichmäßig parabolisch und wir erhalten zumindest für kurze Zeiten eine eindeutige glatte Lösung (siehe zum Beispiel [HP]). Da wir uns allerdings in dieser Arbeit gerade mit den Anfangsflächen M_0 beschäftigen wollen, auf denen obige Gleichung nur schwach parabolisch, und somit die Kurzzeitexistenz noch nicht gesichert ist, gelte auf M_0 nur $\lambda \in \Gamma_{k-1}$ und $S_k(\lambda) \geq 0$.
Auf derartigen Startflächen gilt offenbar $Q_k \geq 0$ und für die Flächen M_t gilt dann:

Satz 4.1 *Falls $F : M^n \times [\,0, T\,) \to I\!R^{n+1}$ eine Lösung von $(\star_k)$ ist, gilt*

$$Q_k(p,t) \geq \min_{t=0} Q_k \cdot \Big(1 - c(k)\,(\min_{t=0} Q_k)^2\, t\Big)^{-\frac{1}{2}}$$

mit $c(k) = \frac{2k}{n-k+1}$, und es gilt somit $T \leq \frac{1}{c(k)} \cdot (\min_{t=0} Q_k)^{-2}$. Falls insbesondere $Q_k > 0$ auf M_0 gilt, ist $T < \infty$.

Beweis: Da $S_{k-1}(\lambda) > 0$ auf M_0 gilt, ist nach Lemma 2.5 $\frac{\partial Q_k}{\partial \lambda_i} \geq 0$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$, also

$$\frac{\partial Q_k}{\partial h^p_q}\, h^p_m\, h^m_q = \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q_k}{\partial \lambda_i}\, \lambda_i^2 \geq 0\,.$$

Aus der Evolutionsgleichung für Q_k (siehe Lemma 3.1, 6) mit $f = Q_k$)

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_k = \frac{\partial Q_k}{\partial h^i_j} \nabla^i \nabla_j Q_k + \frac{\partial Q_k}{\partial h^i_j}\, h^{il}\, h_{lj} \cdot Q_k$$

und dem schwachen Maximumprinzip für parabolische Gleichungen folgt daraus sofort $Q_k \geq 0$ für alle $t \in [\,0, T\,)$. Es sei bemerkt, dass das schwache Maximumprinzip (im Gegensatz zur strikten Version) auch für schwach parabolische Gleichungen gilt.
Mit Lemma 2.6 gilt dann aber weiter

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_k \geq \Box_k\, Q_k + \frac{k}{n-k+1}\, Q_k^3\,.$$

Sei nun φ die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\varphi = \frac{k}{n-k+1}\,\varphi^3\,, \quad \varphi(0) = \min_{t=0} Q_k\,,$$

also

$$\varphi(t) = \varphi(0)\cdot\Big(1 - c(k)\,\varphi(0)^2\,t\Big)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Betrachtet man φ als Funktion auf $M^n \times [\,0, T\,)$, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(Q_k - \varphi) \geq \Box_k\,(Q_k - \varphi) + \frac{k}{n-k+1}\,(Q_k^3 - \varphi^3)\,,$$

so dass das Maximumprinzip jetzt $Q_k \geq \varphi$ für alle $t \in [\,0, T\,)$ liefert.
Da aber $\varphi \longrightarrow \infty$ gilt für $t \longrightarrow \frac{1}{c(k)}\cdot(\min_{t=0} Q_k)^{-2}$, folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 4.2 Falls M_0 eine Sphäre ist, entspricht die Funktion $\varphi(t)$ genau der Geschwindigkeit Q_k, und die Schranke $T \leq \frac{1}{c(k)}\cdot(\min_{t=0} Q_k)^{-2}$ ist scharf.
In diesem Fall liefert $(\star_k)$ nämlich für den Radius der Sphären $M_t = S^n_{R(t)}$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\,t}\,R(t) = -\,\frac{n-k+1}{k}\,R(t)^{-1}\,,$$

und somit ist

$$R(t) = \Big(R(0)^2 - 2\,\frac{n-k+1}{k}\,t\Big)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Das heißt es gilt $R(t) = 0$ für $t = \frac{R(0)^2\,k}{2\,(n-k+1)}$ und andererseits ist

$$\frac{1}{c(k)}\cdot(\min_{t=0} Q_k)^{-2} = \frac{n-k+1}{2\,k}\cdot\left(\frac{k\,R(0)}{n-k+1}\right)^2 = \frac{R(0)^2\,k}{2\,(n-k+1)}\,.$$

Bemerkung 4.3 Da wir auf der Startfläche M_0 nur $S_k \geq 0$ voraussetzen, kann eventuell $\min_{t=0} Q_k = 0$ gelten, und Satz 4.1 liefert somit nur $Q_k \geq 0$ auf allen M_t. Wie wir in Kapitel 8 sehen werden, benötigen wir für die Kurzzeitexistenz des Q_k-Flusses mit obigen Voraussetzungen allerdings $Q_k > 0$ auf allen M_t für $t > 0$. Um dies in Theorem 7.6 zu erreichen, werden wir dort noch fordern müssen, dass die Startfläche zusätzlich schwach konvex ist.

Für die mittlere Krümmung H gilt eine zu Satz 4.1 analoge Abschätzung nach oben:

Satz 4.4 *Falls $F : M^n \times [\,0, T\,) \to I\!R^{n+1}$ eine Lösung von $(\star_k)$ ist für $k \geq 2$, gilt*

$$H(p,t) \leq \max_{t=0} H\cdot\Big(1 - \tilde{c}(k)\,(\max_{t=0} H)^2\,t\Big)^{-\frac{1}{2}}$$

solange für die Hauptkrümmungen $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ *von* M_t *noch* $\lambda \in \Gamma_{k-1}$ *gilt. Dabei ist*

$$\tilde{c}(k) = 2 \cdot \max_{\lambda \in \Gamma_{k-1}} \left\{ \frac{\partial Q_k}{\partial \lambda_i} \right\}_{1 \le i \le n} .$$

Beweis: Nach Korollar 3.2 gilt für H

$$\frac{\partial}{\partial t} H = \Box_k H + \frac{\partial^2 Q_k}{\partial h_q^p \partial h_j^i} \nabla^l h_q^p \nabla_l h_j^i + \frac{\partial Q_k}{\partial h_q^p} h_m^p \, h_q^m \cdot H \,,$$

beziehungsweise

$$\frac{\partial}{\partial t} H \le \Box_k H + \frac{\partial Q_k}{\partial h_q^p} h_m^p \, h_q^m \cdot H \,,$$

weil Q_k nach Lemma 2.4 konkav ist, solange $\lambda \in \Gamma_{k-1}$ gilt. Da aber Q_k homogen vom Grad 1 ist, ist $\frac{\partial Q_k}{\partial h_q^p}$ homogen vom Grad 0, also insbesondere beschränkt.

Sei nun $c_k := \max_{\Gamma_{k-1}} \left\{ \frac{\partial Q_k}{\partial \lambda_i} \right\}$, dann ist $\frac{\partial Q_k}{\partial h_q^p} h_m^p \, h_q^m = \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q_k}{\partial \lambda_i} \lambda_i^2 \le c_k \cdot |A|^2$.

Es gilt aber $S_2(\lambda) \ge 0$, da $\lambda \in \Gamma_{k-1}$ und $Q_k \ge 0$ nach dem letzten Satz gilt. Das bedeutet wegen $S_2 = \frac{1}{2}(H^2 - |A|^2)$ auch $|A|^2 \le H^2$ und somit

$$\frac{\partial}{\partial t} H \le \Box_k H + c_k \cdot H^3 .$$

Nun folgt wie im Beweis des letzten Satzes durch Vergleich mit der Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi} = c_k \cdot \tilde{\varphi}^3 , \quad \tilde{\varphi}(0) = \max_{t=0} H$$

die Behauptung aus dem Maximumprinzip. □

Bemerkung 4.5 Die Newton-Ungleichung liefert für $\lambda \in \Gamma_{k-1}$

$$Q_k(\lambda) \le \frac{n-k+1}{k \cdot n} H .$$

Folglich liefert der letzte Satz zusätzlich eine Abschätzung für die Geschwindigkeit Q_k nach oben, beziehungsweise zusammen mit Satz 4.1 auch $H \ge 0$, solange noch $\lambda \in \Gamma_{k-1}$ gilt.

Es folgt außerdem, dass H auf dem Intervall $[0, T)$ mit $T = \frac{1}{\tilde{c}(k)} (\max_{t=0} H)^{-2}$ beschränkt bleibt. Da die Startfläche kompakt ist, gilt aber $\max_{t=0} H > 0$ und somit $T < \infty$.

Wie oben erwähnt, gilt für $k \ge 2$ wegen $Q_k \ge 0$ immer $|A|^2 \le H^2$ und der Satz liefert somit auch eine a priori Schranke an $|A|^2$ nach oben. Dies wird später für die Kurzzeitexistenz des Flusses eine entscheidende Rolle spielen (siehe Kapitel 8).

Satz 4.6 *Für alle $2 \leq k \leq n$ existiert ein $0 < C < \infty$, so dass für Lösungen $F : M^n \times [\,0, T\,) \to I\!R^{n+1}$ von $(\star_k)$*

$$|A|^2 \leq C$$

auf einem Intervall $[\,0, T)$ gilt, wobei C und T nur von $\max_{M_0} H$ abhängen.

Mit Hilfe der Newton-Ungleichung kann man wie in Bemerkung 4.5 immer Q_k durch H nach oben abschätzen, solange $H > 0$ gilt.
Falls zusätzlich $Q_k > 0$ auf M_0 ist, erhält man auch die umgekehrte Richtung:

Satz 4.7 *Falls $F : M^n \times [\,0, T\,) \to I\!R^{n+1}$ eine Lösung von $(\star_k)$ ist, und $Q_k > 0$ auf M_0 gilt, so ist*

$$H(p,t) \leq \left(\max_{t=0} \frac{H}{Q_k} \right) \cdot Q_k(p,t)\,.$$

Beweis: Für den Quotienten $\frac{H}{Q_k}$ folgt mit Lemma 3.1, 6) und Korollar 3.2 c) die Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{H}{Q_k}\right) = \Box_k \left(\frac{H}{Q_k}\right) + \frac{2}{Q_k}\,\frac{\partial Q_k}{\partial h^i_j}\,\nabla^i \left(\frac{H}{Q_k}\right) \nabla_j\, Q_k + \frac{1}{Q_k}\,\frac{\partial^2 Q_k}{\partial h^p_q \partial h^i_j}\,\nabla^l h^p_q \nabla_l h^i_j\,.$$

Zusammen mit der Konkavität von Q_k gilt dann

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{H}{Q_k}\right) \leq \Box_k \left(\frac{H}{Q_k}\right) + \frac{2}{Q_k}\,\frac{\partial Q_k}{\partial h^i_j}\,\nabla^i \left(\frac{H}{Q_k}\right) \nabla_j\, Q_k\,.$$

Die Behauptung ist schließlich eine Folge des Maximumprinzips. $\Box$

Bemerkung 4.8 Für $k = 1$ handelt es sich bei dem Problem $(\star_k)$ um den bekannten mittleren Krümmungsfluss, der von G. Huisken in [H84] untersucht wurde. Da in diesem Fall

$$\frac{\partial^2 f}{\partial h^i_j \partial h^p_q} = \frac{\partial^2 H}{\partial h^i_j \partial h^p_q} = 0$$

gilt, vereinfachen sich damit einige der Evolutionsgleichungen des letzten Kapitels. Man kann dann beispielsweise leicht beweisen, dass schwach konvexe Anfangsflächen unter der Evolution sofort strikt konvex werden.
Dazu betrachtet man nacheinander die Quotienten Q_k von H bis Q_n. Da $\Box_1 = \Delta$ gleichmäßig elliptisch ist, erhält man mit dem strikten Maximumprinzip für parabolische Gleichungen zunächst aus Korollar 3.2 c), dass H sofort strikt positiv wird. Für jedes $t > 0$ ist also Q_2 wohldefiniert und nichtnegativ. Somit ist wegen Lemma 2.4 Q_2 konkav in h^i_j und mit Korollar 3.2 d) und dem strikten Maximumprinzip folgt für $K = Q_2$, dass auch Q_2 sofort strikt positiv wird, womit Q_3 wiederum

wohldefiniert ist. Diese Argumentation kann nun iterativ fortgesetzt werden bis zu $Q_n > 0$ auf $M^n \times (0, T)$.
Es sei noch bemerkt, dass jeweils die Alternativen $Q_k \equiv 0$ auf ganz M_t unmöglich sind, da die Flächen kompakt sind, und somit strikt konvexe Punkte existieren müssen.

Für den Fall $k \geq 2$ ist es deutlich schwieriger, das entsprechende Resultat zu beweisen. Um hier überhaupt zu zeigen, dass schwach konvexe Startflächen unter der Evolution schwach konvex bleiben, muss man M_0 zunächst durch strikt konvexe Flächen approximieren. Deshalb wollen wir uns an dieser Stelle der Evolution strikt konvexer Anfangsflächen widmen.

Falls nämlich M_0 bereits strikt konvex ist, kann man die im letzten Kapitel eingeführte Größe $\tilde{H}$ näher untersuchen, was wir im Folgenden tun wollen.
Wie wir bereits gesehen haben, vereinfacht sich die Evolutionsgleichung für $\tilde{H}$ deutlich, wenn man die Geschwindigkeit f als Inverses einer konkaven Funktion g in den Hauptradien schreiben kann. Für die Geschwindigkeit Q_k ist dies möglich, denn:

Lemma 4.9 *Es gilt für alle $\lambda \in \Gamma_n$ und $\kappa_i = \frac{1}{\lambda_i}$ für $i \in \{1, ..., n\}$*

$$Q_k = \frac{S_k(\lambda)}{S_{k-1}(\lambda)} = \frac{S_{n-k}(\kappa)}{S_{n-k+1}(\kappa)} = (\tilde{Q}_{n-k+1})^{-1} .$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} Q_k &= \frac{S_k(\lambda)}{S_{k-1}(\lambda)} = \left(\sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} \frac{1}{\kappa_{i_1}} \cdot ... \cdot \frac{1}{\kappa_{i_k}} \right) \left(\sum_{1 \leq i_1 < ... < i_{k-1} \leq n} \frac{1}{\kappa_{i_1}} \cdot ... \cdot \frac{1}{\kappa_{i_{k-1}}} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{\tilde{S}_{n-k}}{\tilde{S}_n} \right) \left(\frac{\tilde{S}_{n-k+1}}{\tilde{S}_n} \right)^{-1} = (\tilde{Q}_{n-k+1})^{-1} . \end{aligned}$$

□

Für $\tilde{H}$ gilt dann folgende Abschätzung.

Satz 4.10 *Falls M_0 strikt konvex und $F : M^n \times [\,0, T\,) \to I\!R^{n+1}$ eine Lösung von $(\star_k)$ ist, gilt*

$$\tilde{H}(p, t) \leq \left(\left(\max_{t=0} \tilde{H} \right)^2 - \hat{c}(k)\, t \right)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

mit $\hat{c}(k) = 2\, \frac{n^2\,(n-k+1)}{k}$. *Insbesondere ist* $T \leq \frac{\max_{t=0} \tilde{H}}{\hat{c}(k)}$.

Beweis: Nach dem letzten Lemma ist $Q_k = (\tilde{Q}_{n-k+1})^{-1}$ auf konvexen Flächen und somit ist wegen Lemma 2.4 Lemma 3.6 anwendbar. Für die Evolution von $\tilde{H}$ gilt also

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{H} \leq \Box_k \tilde{H} - \frac{\partial Q_k}{\partial h^p_q} h^p_m\, h^m_q \cdot \tilde{H} .$$

Wie im Beweis von Satz 4.1 folgt

$$\frac{\partial Q_k}{\partial h_q^p} h_m^p h_q^m \geq \frac{k}{n-k+1} Q_k^2 .$$

Durch mehrfache Anwendung der Newton-Ungleichung erhält man weiter $Q_k \geq \frac{n(n-k+1)}{k} Q_n$. Da aber wegen Lemma 4.9 $Q_n = \tilde{H}^{-1}$ gilt, folgt

$$\frac{\partial Q_k}{\partial h_q^p} h_m^p h_q^m \geq \frac{n^2 (n-k+1)}{k} \tilde{H}^{-2}$$

und somit

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{H} \leq \Box_k \tilde{H} - \frac{n^2 (n-k+1)}{k} \tilde{H}^{-1} .$$

Wie in den Beweisen von Satz 4.1 und 4.4 folgt jetzt die Behauptung durch Vergleich mit der Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\varphi} = - \frac{n^2 (n-k+1)}{k} \cdot \hat{\varphi}^{-1} , \quad \hat{\varphi}(0) = \max_{t=0} \tilde{H}$$

aus dem Maximumprinzip. □

Bemerkung 4.11 Die Abschätzung (8) ist scharf, denn falls M_0 eine Sphäre ist, beschreibt $\hat{\varphi}$ genau die Größe $\tilde{H}$.

Korollar 4.12 *Für glatte Lösungen des Anfangswertproblems* $(\star_k)$ *sind alle Flächen* M_t *strikt konvex, falls dies bereits für* M_0 *gilt, und es existiert ein* $\delta(M_0) > 0$*, so dass* $\lambda_i(p,t) > \delta$ *für alle* $i \in \{1, ..., n\}$ *und* $(p,t) \in M^n \times [0,T)$ *ist.*

Beweis: Der erste Teil der Aussage folgt analog zu Theorem 3.7. Abschätzung (8) liefert wegen $\tilde{H} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}$ auch den zweiten Teil der Behauptung. □

Um nun schließlich zu zeigen, dass auch schwache Konvexität unter der Evolution erhalten bleibt, brauchen wir noch folgende Aussage über das Existenzintervall von Lösungen.

Satz 4.13 *Sei* $[0,T)$ *das maximale Existenzintervall für eine Lösung von* $(\star_k)$*, wobei* $\lambda \in \Gamma_k$ *für die Hauptkrümmungen* $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ *von* M_0 *gelte. Dann ist* $T < \infty$ *und für* $t \to T$ *wird* $\max_{M_t} |A|^2$ *unbeschränkt.*

Beweis: Da die Startfläche M_0 kompakt ist, kann man eine Kugel B_R vom Radius $R > 0$ finden, so dass M_0 ganz im Inneren von B_R liegt. Läßt man nun ∂B_R und M_0 gleichzeitig fließen, so muss aufgrund des Maximumprinzips während der ganzen

Evolution die Fläche M_t in der entsprechenden Kugel $B_{R(t)}$ enthalten sein. Für $R(t)$ gilt nach Bemerkung 4.2

$$R(t) = 0 \quad \text{für } \ t = \frac{R(0)^2\, k}{2\,(n-k+1)}\,,$$

folglich ist $T < \infty$.
Um den zweiten Teil der Aussage zu beweisen, wollen wir zeigen, dass unter der Annahme $\max_{M_t} |A|^2 < C$ für ein $C > 0$, die Flächen M_t zu einer glatten Grenzfläche M_T konvergieren mit $\lambda \in \Gamma_k$ auf ganz M_T. Dann könnte man aber wegen Lemma 2.5 das Resultat aus [HP], Theorem 3.1 auf M_T anwenden, um die Lösung auf spätere Zeitpunkte auszuweiten, was der Maximalität von T widersprechen würde.
Sei also $\max_{M_t} |A|^2 < C$ für $0 \le t < T$. Nach Bemerkung 4.5 ist $Q_k \le \frac{n-k+1}{k\,n} H$, und außerdem gilt $H \le \sqrt{n}\,|A|$. Somit ist

$$|F(p,t_1) - F(p,t_2)| \le \int_{t_1}^{t_2} |Q_k(p,\tau)| d\tau \le \frac{n-k+1}{k\,n} \sqrt{n}\, C^{\frac{1}{2}}\, |t_2 - t_1|\,,$$

und folglich konvergiert $F(\cdot,t)$ für $t \to T$ zu einem stetigen Grenzwert $F(\cdot,T)$. Um zu zeigen, dass $F(\cdot,T)$ eine Fläche M_T darstellt, benutzen wir ein Lemma von R. Hamilton. Dieses besagt, dass für eine zeitabhängige Metrik g_{ij} auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M mit

$$\int_0^T \max_M |\frac{\partial}{\partial t}\, g_{ij}|\, dt \le \tilde{C} < \infty$$

die Metriken $g_{ij}(t)$ für alle Zeiten $t \in [0,T)$ äquivalent sind und für $t \to T$ gleichmäßig gegen einen positiv definiten metrischen Tensor $g_{ij}(T)$ konvergieren, der stetig und ebenfalls äquivalent ist.
In unserem Fall ist mit Lemma 3.1

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\, g_{ij}\right|^2 = g^{ip} g^{jq} \Big(\frac{\partial}{\partial t}\, g_{ij}\Big) \Big(\frac{\partial}{\partial t}\, g_{pq}\Big) = 4\, Q_k^2\, |A|^2 \le 4\, n \left(\frac{n-k+1}{k\,n}\right)^2 C^2\,,$$

und wir können somit das Lemma 14.2 aus [Ha1] anwenden.
Die Tatsache, dass auch auf M_T wieder $\lambda \in \Gamma_k$ gelten muss, folgt dann aus Satz 4.1.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass M_T glatt ist. Dabei ist zu bemerken, dass die Schranke an $|A|^2$ gleichmäßige C^2-Schranken an F impliziert. Da aber Q_k konkav in h^i_j ist, und die Evolutionsgleichung wegen $Q_k > 0$ und Lemma 2.5 gleichmäßig parabolisch ist, kann man die Abschätzungen von Krylov [Kry], Theorem 2, Kapitel 5.5 anwenden und erhält aus den gleichmäßigen C^2-Schranken gleichmäßige innere $C^{2,\alpha}$-Schranken in Raum und Zeit. Zur Definition der parabolischen Höldernormen siehe zum Beispiel [Lie]. Für $C^{2,\alpha}$-Abschätzungen, die nicht nur im Inneren, sondern

auch in einer Umgebung einer Anfangsfläche gelten, kann man anhand der Resultate von Krylov [Kry] nachprüfen, dass diese nur von der Schranke an $|A|$ und der $C^{2,\alpha}$-Norm der Anfangsfläche abhängen.
Die höheren C^l-Schranken erhält man mittels der inneren Schauderabschätzungen für parabolische Gleichungen, siehe [Lie]. □

Satz 4.14 *Für glatte Lösungen des Anfangswertproblems* $(\star_k)$ *sind alle Flächen* M_t *schwach konvex, falls dies für* M_0 *gilt.*

Beweis: Für $k = 1$, das heißt den mittleren Krümmungsfluss ist die Behauptung klar (siehe Bemerkung 4.8). Um die Behauptung für $k \geq 2$ zu zeigen, approximieren wir wie bereits oben erwähnt die schwach konvexe Anfangsfläche M_0 glatt durch eine Familie strikt konvexer Flächen M_0^ε. Diese bekommt man beispielsweise mit Hilfe des mittleren Krümmungsflusses.
Von jeder der Flächen M_0^ε kann man nun aufgrund der strikten Konvexität den Q_k-Fluss starten (wieder mit [HP], Theorem 3.1) und erhält wegen Korollar 4.12 strikt konvexe Lösungen M_t^ε für $t \in [0, T_\varepsilon)$. Wegen Satz 4.6 erhält man für die Flächen M_t^ε gleichmäßige $|A|^2$-Schranken und mit Satz 4.13 erhält man dann eine gleichmäßige untere Schranke an T_ε. Da wieder die gleichmäßige $|A|^2$-Schranke für die Flächen M_t^ε eine gleichmäßige C^2-Schranke für die Lösungen F_ε impliziert, liefert das Theorem von Arzela-Ascoli eine gleichmäßig konvergente Teilfolge F_{ε_i}, die für $\varepsilon_i \to 0$ in C^1 gegen F konvergiert. Als gleichmäßiger Limes konvexer Lösungen müssen die Flächen M_t schwach konvex sein.

Falls die Lösungen M_t eindeutig sind, ist die Behauptung damit gezeigt. Um diese Eindeutigkeit zu zeigen, wollen wir an dieser Stelle eine Definition von Viskositätslösungen aus [A3] angeben. Eine Familie von konvexen Gebieten $\{\Omega_t\}_{0<t<T}$ heißt dabei *Viskositätslösung* von $(\star_k)$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:
i) Für jede glatte, strikt konvexe Hyperfläche N_0, die in Ω_{t_0} für ein $t_0 \in (0, T)$ enthalten ist, sind die eindeutigen glatten Hyperflächen N_t, die man als Lösung von $(\star_k)$ mit Startfläche N_0 erhält, für alle $t \in [0, T - t_0)$ in Ω_{t_0+t} enthalten, solange sie existieren.
ii) Für jede glatte, strikt konvexe Hyperfläche N_0, die Ω_{t_0} für ein $t_0 \in (0, T)$ umschließt, umschließen die eindeutigen glatten Flächen N_t für alle $t \in [0, T - t_0)$ die Mengen Ω_{t_0+t}.

Mit diesem sehr schwachen Begriff einer Lösung erhält man wie in [A3], Theorem 15 für schwach konvexe Anfangsflächen aus der $|A|^2$-Schranke zumindest für kurze Zeiten eine eindeutige Viskositätslösung, die für $t \to 0$ im Hausdorffabstand gegen M_0 konvergiert. Da glatte Lösungen insbesondere Viskositätslösungen sind, ist die Behauptung somit bewiesen. □

5 Striktes Maximumprinzip für die Geschwindigkeit Q_k

Wir wollen jetzt als Startfläche M_0 für das Problem $(\star_k)$ aus Kapitel 4 eine glatte, geschlossene, schwach konvexe Hyperfläche des $\mathbb{R}^{n+1}$ betrachten, auf der $S_{k-1} > 0$ gilt. Insbesondere gilt auf M_0 dann $S_l > 0$ für alle $1 \leq l \leq k-1$.

Da auf diesen Flächen nach Lemma 2.5 zwar $\frac{\partial Q_k}{\partial \lambda_i} \geq 0$ gilt für alle $i \in \{1, ..., n\}$, aber eben nicht notwendigerweise $\frac{\partial Q_k}{\partial \lambda_i} > 0$, hat der Operator $\Box_k$ eventuell Nulleigenwerte, das heißt er ist nur degeneriert elliptisch.
Aus diesem Grund kann man kein striktes parabolisches Maximumprinzip für die Evolution der Geschwindigkeit Q_k benutzen, um zu zeigen, dass $Q_k(p,t) > 0$ für alle $p \in M^n$ und $t > 0$ gilt.
Setzt man allerdings voraus, dass man bereits (zumindest für kurze Zeiten) eine glatte Lösung von $(\star_k)$ hat, so kann man mit Hilfe eines Maximumprinzips für degeneriert elliptische Operatoren zeigen, dass Q_k unter der Evolution dennoch sofort strikt positiv werden muss. Der wichtigste Schritt dazu ist folgendes Lemma.

Lemma 5.1 *Sei M^n eine glatte, geschlossene, schwach konvexe Hyperfläche des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $S_{k-1} > 0$ auf ganz M^n für ein $1 \leq k \leq n$. Dann existiert zu jedem $p \in M^n$ mit $Q_k(p) = 0$ eine regulär parametrisierte Kurve $\gamma : [0,1] \to M^n$ und ein Punkt $q \in M^n$ mit $Q_k(q) > 0$, so dass γ die Punkte p und q verbindet und $\frac{\partial Q_k}{\partial h^i_j}$ in Richtung von γ nicht verschwindet. Das heißt $\dot{\gamma}$ lässt sich für $t \in [0,1]$ darstellen als $\dot{\gamma}(t) = w(t)$ mit $w^j = \frac{\partial Q_k}{\partial h^i_j} v^i$ für ein glattes Vektorfeld v entlang der Kurve γ.*

Beweis: Für $k = 1$ ist $\frac{\partial Q_k}{\partial h^i_j} = \frac{\partial H}{\partial h^i_j} = \delta^j_i$ und somit die Behauptung klar.
Sei also $k > 1$ und $p \in M^n$ mit $Q_k(p) = 0$. Wegen $S_{k-1}(p) > 0$ gelte in p ohne Beschränkung der Allgemeinheit für die Hauptkrümmungen

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1} > 0 \quad \text{ und } \quad \lambda_k = \ldots = \lambda_n = 0\,.$$

Wegen Lemma 2.5 gilt dann

$$\frac{\partial Q_k}{\partial \lambda_i}(p) = 0 \;\text{ für }\; i \in \{1, \ldots, k-1\} \;\text{ und }\; \frac{\partial Q_k}{\partial \lambda_i}(p) > 0 \;\text{ für }\; i \in \{k, \ldots, n\}\,.$$

Aufgrund der Stetigkeit der Hauptkrümmungen existiert eine Umgebung $U_p \subset M^n$ von p, so dass auf ganz U_p gilt $\lambda_1, ..., \lambda_{k-1} > 0$ und $\frac{\partial Q_k}{\partial \lambda_i} > 0$ für $i \in \{k, ..., n\}$. (Wir meinen dabei nicht, dass h^i_j in der ganzen Umgebung diagonal ist.)

Wähle jetzt in p eine Orthonormalbasis $\{e_i(p)\}_{1 \leq i \leq n}$ von T_pM^n, so dass in dieser Basis h^i_j diagonal ist, das heißt die Richtungen $e_i(p)$ sind die Hauptkrümmungsrichtungen zu den Eigenwerten λ_i. Insbesondere gilt

$$\ker A(p) = \langle e_k, ..., e_n \rangle\,,$$

wobei $\langle e_k, ..., e_n\rangle$ den Aufspann der Basisvektoren $e_k, ..., e_n$ bezeichnet.
Setze nun $\{e_i\}$ glatt auf U_p fort, so dass in jedem Punkt $q \in U_p$ gilt, dass $\{e_i(q)\}_{1\leq i\leq n}$ eine Basis von T_qM^n ist. Durch glatte Operationen kann man dann die Vektorfelder e_i zu Basisvektorfeldern $\tilde{e}_i$ umwandeln, so dass für $i \in \{1, ..., k-1\}$ und $q \in U_p$ gilt

$$\tilde{e}_i(q) \perp \langle \tilde{e}_k(q), ..., \tilde{e}_n(q)\rangle =: D(q)\,.$$

Falls U_p klein genug ist, ist D somit eine glatte $(n-k+1)-$dimensionale Distribution auf U_p und es gilt

$$(\star) \qquad \begin{cases} \ker A(q) \subseteq D(q) & \text{für alle } \; q \in U_p \\ A(q)(\tilde{e}_i(q), \tilde{e}_j(q)) > 0 & \text{für alle } \; i, j \in \{1, ..., k-1\}\,. \end{cases}$$

Gäbe es nun in einem Punkt eine Nulleigenrichtung von $\frac{\partial Q_k}{\partial h^i_j}$ in D, so könnte diese wegen Lemma 2.5 keine Nulleigenrichtung von h^i_j sein. Dann existierten aber dort wegen $(\star)$ mindestens k positive Hauptkrümmungen und in diesem Fall würde wegen $S_k > 0$ an dieser Stelle wieder mit Lemma 2.5 folgen, dass $\frac{\partial Q_k}{\partial h^i_j}$ positiv definit ist. Also kann $\frac{\partial Q_k}{\partial h^i_j}$ in Richtungen von D nicht verschwinden.

Kurven mit $\dot{\gamma} \in D$ wollen wir $D-$Kurven nennen und $\Gamma_p(D) \subseteq U_p$ die Menge aller Punkte $q \in U_p$, die mit p durch eine $D-$Kurve verbunden werden können.
Falls es einen Punkt $q \in \Gamma_p(D)$ gibt mit $Q_k(q) > 0$, ist die Behauptung des Lemmas gezeigt. Nehmen wir also an, dies sei nicht der Fall und es gelte $Q_k(q) = 0$ für alle $q \in \Gamma_p(D)$. Wegen $(\star)$ muss dann

$$D(q) = \ker A(q) \quad \text{ für alle } \quad q \in \Gamma_p(D)$$

gelten und die Distribution D ist somit involutiv auf $\Gamma_p(D)$. Nach Theorem 5.3 aus [HK] existieren deshalb Koordinaten $w : U_p \to \mathbb{R}^n$, $w(p) = 0$ mit $D = \langle \frac{\partial}{\partial w^k}, ..., \frac{\partial}{\partial w^n}\rangle$ auf $\{w^i = 0\}_{i\in\{1,...,k-1\}}$, das heißt $N := \Gamma_p(D)$ ist eine $(n-k+1)-$dimensionale Untermannigfaltigkeit von M^n mit $Q_k|_N \equiv 0$.
Aufgrund der Stetigkeit von Q_k müsste $Q_k = 0$ auch auf dem Rand von N in M^n gelten und man könnte dasselbe Argument wie oben an einem möglichen Randpunkt von N wiederholen. Auf diese Weise erhält man eine $(n-k+1)-$dimensionale Untermannigfaltigkeit N^{n-k+1} von M^n ohne Rand mit $Q_k|_N \equiv 0$.

Wegen $\ker A(p) = T_pN \subset T_pM^n$ für alle $p \in N$ gilt

$$A(p)(X, Y) = 0 \text{ für alle } X \in T_pN,\ Y \in T_pM^n$$

und somit aufgrund der Definition der zweiten Fundamentalform von $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$D\nu(p) \cdot X = 0 \text{ für alle } X \in T_pN\,,$$

wobei $D\nu(p)$ die Weingartenabbildung im Punkt p ist. Das bedeutet aber, dass ν im $\mathbb{R}^{n+1}$ parallel ist entlang Kurven in N. Sei nun $p \in N$ fest und $E := T_pM^n$, dann muss $N \subseteq E$ gelten, weil M^n schwach konvex ist und somit auf einer Seite von E liegen muss. Also gilt $T_qM^n = E$ für alle $q \in N$.
Seien jetzt $p_1, p_2 \in N$ und γ die Verbindungsgerade im $\mathbb{R}^{n+1}$ von p_1 nach p_2, also insbesondere $\gamma \subset E$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der Abstand von p_1 und p_2 kleiner als der Injektivitätsradius von M^n. Da M^n schwach konvex ist, und somit eine konvexe Menge berandet, muss γ innerhalb dieser Menge verlaufen, beziehungsweise wegen obiger Argumentation über E sogar in M^n selber.
Angenommen, es existiert dann ein Punkt p_0 auf γ mit $p_0 \in M^n \setminus N$, so existiert ein Punkt $q_0 \in N$, der minimalen Abstand zu p_0 hat, und die minimale Geodäte σ von q_0 nach p_0 steht senkrecht auf N, das heißt $\dot\sigma(0) \perp T_{q_0}N$. Da aber $\ker A(q_0) = T_{q_0}N$ gilt, ergibt sich ein Widerspruch zu $p_0 \in M^n \cap E$. Demzufolge gilt $\gamma \subset N$ und N ist folglich total geodätisch im $\mathbb{R}^{n+1}$, das heißt es gilt $N \simeq \mathbb{R}^{n-k+1}$, da N keinen Rand hat. Dies kann aber wiederum nicht sein, weil N eine Untermannigfaltigkeit der kompakten Mannigfaltigkeit M^n ist. Also ist die Behauptung gezeigt. $\square$

Es gilt folgendes striktes Maximumprinzip für die Geschwindigkeit Q_k.

Theorem 5.2 *Sei M_0 eine glatte, geschlossene, schwach konvexe Hyperfläche des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $S_{k-1} > 0$ auf ganz M_0 für ein $1 \le k \le n$ und $F : M^n \times [\,0, T\,) \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte Lösung von $(\star_k)$ für ein $T > 0$. Dann gilt $Q_k(p,t) > 0$ für alle $p \in M^n$ und $t \in [\,0, T)$.*

Beweis: Die Geschwindigkeit Q_k erfüllt (siehe Lemma 3.1) die Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_k = \Box_k\, Q_k + \frac{\partial Q_k}{\partial h^i_j}\, h^{il} h_{lj} \cdot Q_k\,.$$

Da M_0 eine kompakte, schwach konvexe Hyperfläche ist, muss es mindestens einen Punkt $p \in M_0$ geben, an dem alle Hauptkrümmungen positiv sind, das heißt an dem $Q_k(p) > 0$ gilt. Das obige Lemma besagt, dass man jeden Punkt $q \in M^n$ mit $Q_k(q,0) = 0$ mit einem Punkt $\tilde q \in M^n$ mit $Q_k(\tilde q, 0) > 0$ durch eine Kurve $\gamma \subset M^n$ verbinden kann, entlang der $\Box_k$ nicht degeneriert ist.
Das strikte Maximumprinzip für degeneriert elliptische Operatoren (siehe [Alt] und [Bon] oder für eine ausführliche Erklärung [Tai]) liefert dann die Behauptung. $\square$

6 Zylinder

In diesem Kapitel wollen wir zeigen, dass jede schwach konvexe $C^{2,\alpha}$-Hyperfläche des $\mathbb{R}^{n+1}$, auf der $S_k > 0$ für ein $1 \leq k \leq n$ gilt, vollständig durch die Eigenschaft charakterisiert ist, dass man sie in jedem Punkt durch einen Zylinder der Form $S_R^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ von außen berühren kann.
Wir werden diese Zylinder dann im nächsten Kapitel benutzen, um zylindersymmetrische Barrieren für den Fluss zu konstruieren, die uns im Anschluss ein striktes Maximumprinzip für Q_k liefern, das im Gegensatz zu Theorem 5.2 nicht von der Existenz einer glatten Lösung abhängt.

Theorem 6.1 *Sei $F : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ für ein $0 < \alpha \leq 1$ eine $C^{2,\alpha}$-Immersion einer geschlossenen Hyperfläche im Euklidischen Raum, $n \geq 2$. Dann ist M genau dann schwach konvex mit $S_k > 0$ auf ganz M für ein $1 \leq k \leq n$, wenn es ein $R > 0$ gibt, so dass zu jedem Punkt $p \in M$ ein Zylinder $Z_p \simeq S_R^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ existiert, der M umschließt und in p von außen berührt.*
Dabei ist S_R^k eine k-dimensionale Sphäre vom Radius R und $M = F(M^n) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Beweis: Sei M schwach konvex mit $S_k > 0$ und $p \in M$ beliebig. Wegen $S_k > 0$ existieren in p mindestens k positive Hauptkrümmungen $\lambda_1, ..., \lambda_k > 0$. Wir wählen dann ein Koordinatensystem $(x_1, ..., x_{n+1})$ des $\mathbb{R}^{n+1}$, so dass p der Ursprung und $x_{n+1}(p) = 0$ ist. Da M schwach konvex ist, muss die Fläche ganz auf einer Seite von T_pM liegen, deshalb gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $T_pM = \{x_{n+1} = 0\}$ und M liege unterhalb von T_pM.
Außerdem seien die x_i genau die Hauptkrümmungsrichtungen in p und

$$E := \langle x_{k+1}, ..., x_n \rangle = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_1, ..., x_k = 0,\ x_{n+1} = 0\}\,.$$

Offensichtlich ist der Kern der zweiten Fundamentalform im Punkt p in E enthalten.

Da M schwach konvex ist, gilt $x_{n+1}(q) \leq 0$ für alle $q \in M$. Für $q \in M \setminus E$ muß allerdings $x_{n+1}(q) < 0$ gelten, da sonst aufgrund der Konvexität von M die Verbindungsstrecke von p nach q in E liegen müßte, was wegen $\ker A(p) \subseteq E$ nicht sein kann. Also gilt

$$x_{n+1}(q) = 0 \text{ für ein } q \in M \Longleftrightarrow q \in E\,. \tag{9}$$

Behauptung:

$$\textit{Für alle } q \in M \cap E \textit{ gilt } \ker A(q) \subseteq E\,. \tag{10}$$

Angenommen, diese Behauptung sei bereits bewiesen, dann gilt

$$A(q)(w, w) > 0 \text{ für alle } q \in M \cap E \text{ und } w \in T_qM \cap E^{\perp}\,. \tag{11}$$

Definiere jetzt für alle $q \in M$ die $(k+1)$-dimensionalen Ebenen

$$E(q) := \{q + \sum_{i=1}^{k} \mu^i e_i + \mu\, e_{n+1} \mid \mu^i, \mu \in I\!R\}$$

und die Mengen $D(q) := E(q) \cap M$. Dann ist $M = \bigcup_{q \in E} D(q)$. Da M kompakt ist, existiert ein kompaktes $K \subseteq I\!R^{n+1}$, so dass

$$M = \bigcup_{q \in E \cap K} D(q)\,.$$

Außerdem existiert für alle $q \in E \cap K$ wegen (11) ein $R(q) > 0$ und ein $y(q) \in E(q)$ mit $y_i(q) = 0$ für alle $1 \le i \le k$, so dass

$$D(q) \subseteq \bar{B}^k_{R(q)}\big(y(q)\big) \subseteq E(q) \quad \text{und} \quad D(q) \cap \bar{B}^k_{R(q)}\big(y(q)\big) = \{q\}\,.$$

Da M beziehungsweise K kompakt sind, existiert nun ein $R_{max} > 0$ und ein $z_{max} < 0$, so dass für alle $q \in E \cap K$ gilt

$$D(q) \subseteq \bar{B}^k_{R_{max}}\big(y(q)\big) \quad \text{und} \quad D(q) \cap \bar{B}^k_{R_{max}}\big(y(q)\big) = \{q\}$$

mit $y_i(q) = 0$ für alle $1 \le i \le k$ und $y_{n+1}(q) = z_{max}$.

$$\tilde{Z} := \bigcup_{q \in E \cap K} \partial\, B^k_{R_{max}}\big(y(q)\big)$$

ist nun ein Teilstück des gesuchten Zylinders Z mit $Z \simeq S^k_{R_{max}} \times I\!R^{n-k}$. Wieder aufgrund der Kompaktheit von M kann man den Radius R dieser Zylinder auch unabhängig vom Berührpunkt $p \in M$ wählen.

Um den Beweis der einen Richtung des Theorems zu beenden, muss jetzt noch die Behauptung (10) gezeigt werden.
Sei dazu $q \in M \cap E$ und $v \in T_qM \cap E^\perp$ mit $|v| = 1$, $v \in \ker A(q)$. Betrachte dann für ein festes $\delta > 0$ die eindeutige Geodäte $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ mit $\gamma(0) = q$ und $\dot{\gamma}(0) = v$. Für alle $\varepsilon \in [\,0, \delta)$ sei außerdem die Gerade $g_\varepsilon : (-\infty, \infty) \to I\!R^{n+1}$ im $I\!R^{n+1}$ gegeben durch $g_\varepsilon(0) = p$ und $g_\varepsilon(t_\varepsilon) = \gamma(\varepsilon)$ für ein $t_\varepsilon > 0$.

Lemma 6.2 *Es existiert ein $c = c(M) > 0$, so dass für alle $\varepsilon \in [\,0, \delta)$ gilt*

$$x_{n+1}\big(\gamma(\varepsilon)\big) \ge -\,c \cdot \varepsilon^{2+\alpha}\,.$$

Beweis: Da M konvex ist und $g_0 \subseteq E$, kann man M in einer Umgebung $U \subset M$ von $g_0|_{[0,t_0]}$ als Graph über der Ebene $\{x \in I\!R^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\} \simeq I\!R^n$ schreiben .
Sei also $M \cap U = \operatorname{graph} u$ für ein $u \in C^{2,\alpha}(I\!R^n)$, das heißt für alle $y \in U$ gilt $y = (x, u(x)) = (x, x_{n+1})$ mit $x \in I\!R^n$. In $q =: (x_0, 0)$ gilt dann wegen $v \in \ker A(q)$

$$u(x_0) = 0\,, \quad \nabla u(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad \langle D^2u(x_0)\, v, v\rangle = 0. \tag{12}$$

Für alle $\varepsilon \in [\,0,\delta)$ sei $x_\varepsilon \in I\!R^n$ gegeben durch $\gamma(\varepsilon) = (x_\varepsilon, u(x_\varepsilon))$.
Eine Taylor-Entwicklung von u um x_0 ergibt dann

$$u(x_\varepsilon) = u(x_0) + \Big\langle \nabla u(x_0), x_\varepsilon - x_0 \Big\rangle + \frac{1}{2}\Big\langle D^2u(x_\theta)(x_\varepsilon - x_0), (x_\varepsilon - x_0)\Big\rangle\,,$$

wobei $x_\theta = x_0 + \theta(x_\varepsilon - x_0)$ für ein $0 < \theta \leq 1$ ist. Wegen (12) ist also

$$u(x_\varepsilon) = \frac{1}{2}\Big\langle D^2u(x_\theta)(x_\varepsilon - x_0), (x_\varepsilon - x_0)\Big\rangle\,.$$

Da aber $u(x_\varepsilon) \leq 0$, gilt wieder mit (12)

$$\begin{aligned} u(x_\varepsilon) &= -\frac{1}{2}\,|\langle D^2u(x_\theta)(x_\varepsilon - x_0), (x_\varepsilon - x_0)\rangle| \\ &= -\frac{1}{2}\,|\langle D^2u(x_\theta)(x_\varepsilon - x_0), (x_\varepsilon - x_0)\rangle - \langle D^2u(x_0)(x_\varepsilon - x_0), (x_\varepsilon - x_0)\rangle| \\ &\geq -\frac{1}{2}\,|\,D^2u(x_\theta) - D^2u(x_0)\,| \cdot |\,x_\varepsilon - x_0\,|^2\,. \end{aligned}$$

Weil aber $u \in C^{2,\alpha}(I\!R^n)$ ist, gibt es ein $c_\alpha > 0$, so dass

$$|\,D^2u(x_\theta) - D^2u(x_0)\,| \leq c_\alpha |\,x_\theta - x_0\,|^\alpha\,.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} u(x_\varepsilon) &\geq -\frac{1}{2}\,c_\alpha |\,x_\theta - x_0\,|^\alpha\,|\,x_\varepsilon - x_0\,|^2 \\ &= -\frac{1}{2}\,c_\alpha\,\theta^\alpha\,|\,x_\varepsilon - x_0\,|^\alpha\,|\,x_\varepsilon - x_0\,|^2 \\ &\geq -\frac{1}{2}\,c_\alpha\,|\,x_\varepsilon - x_0\,|^{2+\alpha}\,. \end{aligned}$$

Weil nun M nichtnegative Schnittkrümmungen hat, ist $|\,x_\varepsilon - x_0\,| \leq d_M(\gamma(\varepsilon), q) = \varepsilon$ und mit $c := \frac{1}{2}\,c_\alpha$ folgt $x_{n+1}(\gamma(\varepsilon)) = u(x_\varepsilon) \geq -c\cdot\varepsilon^{2+\alpha}$, womit das Lemma bewiesen ist.

Lemma 6.3 *Für alle* $t \in [\,0, t_\varepsilon\,]$ *gilt mit* $d_\varepsilon = |\,p - \gamma(\varepsilon)\,|$

$$x_{n+1}\Big(g_\varepsilon(t)\Big) \geq -\,c \cdot \frac{t}{d_\varepsilon} \cdot \varepsilon^{2+\alpha}\,.$$

Beweis: Nach Strahlensatz gilt

$$\frac{-\,x_{n+1}(\gamma(\varepsilon))}{|\,p - \gamma(\varepsilon)\,|} = \frac{-\,x_{n+1}(g_\varepsilon(t))}{t}\,.$$

Dabei soll ohne Beschränkung der Allgemeinheit g_ε nach Bogenlänge parametrisiert sein. Zusammen mit dem letzten Lemma gilt also

$$x_{n+1}(g_\varepsilon(t)) = \frac{t}{d_\varepsilon}\, x_{n+1}(\gamma(\varepsilon)) \geq -\, c \cdot \frac{t}{d_\varepsilon} \cdot \varepsilon^{2+\alpha}\,,$$

was zu zeigen war.

Eine Taylor-Entwicklung wie im Beweis von Lemma 6.2 von u um $x = 0$ ergibt für ein $0 < \theta \leq 1$:

$$\begin{aligned} u(t \cdot x_\varepsilon) &= u(0) + \langle \nabla u(0), t\, x_\varepsilon\rangle + \frac{1}{2}\,\langle D^2 u(\theta\, t\, x_\varepsilon)\, t\, x_\varepsilon, t\, x_\varepsilon\rangle \\ &= \frac{1}{2}\,\langle D^2 u(\theta\, t\, x_\varepsilon)\, t\, x_\varepsilon, t\, x_\varepsilon\rangle, \end{aligned}$$

da wie oben $u(0) = 0$ und $\nabla u(0) = 0$ ist. Außerdem gilt wegen $u \in C^{2,\alpha}(I\!R^n)$

$$|D^2 u(\theta\, t\, x_\varepsilon) - D^2 u(0)| \leq c_\alpha |\,\theta\, t\, x_\varepsilon|^\alpha$$

und somit

$$\begin{aligned} u(t \cdot x_\varepsilon) &\leq \frac{1}{2}\, c_\alpha\, |\,\theta\, t\, x_\varepsilon|^\alpha\, |\,t\, x_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2}\,\langle D^2 u(0)\, t\, x_\varepsilon, t\, x_\varepsilon\rangle \\ &\leq \frac{1}{2}\,\langle D^2 u(0)\, t\, x_\varepsilon, t\, x_\varepsilon\rangle + O(|\,t\, x_\varepsilon|^{2+\alpha})\,. \end{aligned}$$

Weil aber M kompakt ist, existiert ein $D > 0$, so dass $|\,x_\varepsilon\,| \leq D$ gilt. Dann ist wegen

$$h_{ij} = \frac{-D_i D_j u}{\sqrt{1 + |\,Du\,|^2}}$$

$$\begin{aligned} u(t \cdot x_\varepsilon) &= \frac{1}{2}\,\langle D^2 u(0)\, t\, x_\varepsilon, t\, x_\varepsilon\rangle + O(t^{2+\alpha}) = -\,\frac{1}{2}\, A(p)(t\, x_\varepsilon, t\, x_\varepsilon) + O(t^{2+\alpha}) \\ &= -\,\frac{1}{2}\, t^2\, A(p)(x_\varepsilon, x_\varepsilon) + O(t^{2+\alpha})\,. \end{aligned}$$

Es gilt $x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon' \cdot v$ für ein $\varepsilon' \leq \varepsilon$ und $v = \sum_{i=1}^k v^i e_i$, wobei $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n+1}$ die Einheitsvektoren im $I\!R^{n+1}$ sind. Für kleine ε kann man dabei ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\varepsilon' \geq \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Damit ist wegen $|v| = 1$

$$\begin{aligned} A(p)(x_\varepsilon, x_\varepsilon) &= \underbrace{A(p)(x_0, x_0)}_{=0} + \underbrace{2\,\varepsilon' A(p)(x_0, v)}_{\geq 0,\ da\ M\ konvex} + (\varepsilon')^2\, A(p)(v, v) \\ &\geq (\varepsilon')^2 \sum_{i,j=1}^k v^i v^j\, A(p)(e_i, e_j) \\ &= (\varepsilon')^2 \sum_{i,j=1}^k v^i v^j\, h_{ij} \\ &\geq \frac{\varepsilon^2}{4} \min_{1 \leq i \leq k} \{\lambda_i\}\,. \end{aligned}$$

Mit $\kappa := \min_{1\leq i\leq k}\{\lambda_i\}(p) > 0$ folgt somit für kleine $t > 0$

$$x_{n+1}(g_\varepsilon(t)) \leq u(t\cdot x_\varepsilon) \leq -\frac{1}{8}\,t^2\varepsilon^2\kappa + O(t^{2+\alpha})\,.$$

Mit Lemma 6.3 ist dann

$$-\,c\,\frac{t}{d_\varepsilon}\,\varepsilon^{2+\alpha} \leq -\frac{1}{8}\,t^2\varepsilon^2\kappa + O(t^{2+\alpha})$$

beziehungsweise

$$t\,d_\varepsilon\,\kappa \leq 8\,c\,\varepsilon^\alpha + O(t^{2+\alpha})\,.$$

Für $t = \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}$ und kleine $\varepsilon > 0$ ist also $d_\varepsilon\,\kappa \leq 16\,c\,\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}$. Wegen $|\,p-q\,| = |x_0| > 0$ existiert außerdem ein $d > 0$ mit $d_\varepsilon \geq d$. Also gilt

$$d\,\kappa \leq 16\,c\,\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}\,,$$

was für beliebig kleine $\varepsilon > 0$ nicht sein kann, da d, κ und c positive Konstanten sind. Demzufolge muß doch $v \in E$ gelten. Damit ist die Behauptung und somit die eine Richtung des Theorems gezeigt.

Es bleibt also nur noch die umgekehrte Richtung zu zeigen.
Da in jedem Punkt von M der Tangentialraum von M und der Tangentialraum des dort berührenden Zylinders identisch sein müssen, folgt aus der Existenz der Zylinder sofort die schwache Konvexität von M, da diese äquivalent zu der Bedingung ist, dass die Fläche immer ganz auf einer Seite ihres jeden Tangentialraumes liegt.
Die Eigenschaft $S_k > 0$ für M folgt dann, da in jedem Punkt offensichtlich mindestens k Hauptkrümmungen positiv sein müssen. $\square$

7 Zylindersymmetrische Barrieren

In diesem Kapitel wollen wir zunächst ganz allgemein schwach konvexe Hyperflächen und deren Evolution unter den Q_k-Flüssen untersuchen, die eine zylinderförmige Symmetrie haben. Anschließend wollen wir unter Zuhilfenahme von Theorem 6.1 zylindersymmetrische Barrieren konstruieren, die uns dann eine untere Schranke an die Geschwindigkeit Q_k liefern, die nicht von den Anfangsdaten $Q_k|_{t=0}$ abhängt. Diese Schranke sichert uns im Folgenden die gleichmäßige Elliptizität des Operators $\Box_k$ für positive Zeiten und ist somit, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, der Schlüssel zur Kurzzeitexistenz.

Wir wollen nun also für $l \in \{1, ..., n\}$ Einbettungen der Form $F : S^l \times I\!R^{n-l} \to I\!R^{n+1}$ mit

$$F(z, x) = (u(|x|)\, z, x) \in I\!R^{l+1} \times I\!R^{n-l} \simeq I\!R^{n+1} \tag{13}$$

für eine konkave Funktion $u : I\!R_0^+ \to I\!R$ betrachten, die monoton fallend in $|x|$ ist.

Beispiel 7.1
a) Für $u(|x|) = R = konst.$ erhält man einen Zylinder.
b) Mit $u(|x|) = \sqrt{R^2 - |x|^2}$ für festes $R > 0$ erhält man eine Sphäre vom Radius R.

Die Grundidee der folgenden Barrierenkonstruktion für schwach konvexe Anfangsflächen mit $S_{k-1} > 0$ besteht darin, die Charakterisierung dieser Flächen durch die Existenz berührender Zylinder auszunutzen, wie wir sie im letzten Kapitel beschrieben haben.
Um aus Einbettungen der Form (13) tatsächlich Barrieren zu konstruieren, müssen wir zuerst für derartige Flächen die geometrischen Größen in Abhängigkeit der Radiusfunktion u bestimmen, die in der Evolutionsgleichung $(\star_k)$ auftreten. Insbesondere müssen wir Ausdrücke für die Geschwindigkeit Q_k und die äußere Normale finden.

Für Flächen, die wie in (13) gegeben sind, ergibt sich als Metrik (vergleiche [A3], Kapitel 12)

$$g_{ij} = \begin{cases} u^2\, \bar{g}_{ij} & \text{für } i, j \in \{1, ..., l\} \\[2ex] \delta_{ij} + \frac{x_i\, x_j}{|x|^2}(u')^2 & \text{für } i, j \in \{l+1, ..., n\} \\[2ex] 0 & \text{sonst ,} \end{cases}$$

wobei $\bar{g}_{ij}$ die Metrik auf S^l bezeichnet, und für die Weingartenabbildung gilt

$$h^i_j = \begin{cases} c\, \delta^i_j & \text{für } i, j \in \{1, ..., l\} \\[2ex] a\, x^i x_j - b\, \delta^i_j & \text{für } i, j \in \{l+1, ..., n\} \\[2ex] 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$a = \frac{1}{|x|^2\,\beta}\Big(\frac{u'}{|x|} - \frac{u''}{\beta^2}\Big)\,, \quad b = \frac{u'}{|x|\,\beta}\,, \quad c = \frac{1}{u\,\beta} \quad \text{und} \quad \beta = (1+(u')^2)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Eine Wahl der Normalen an die Fläche ist $\nu = \frac{1}{\beta}\,(z, -\frac{u'}{|x|}\,x)\,.$

Um daraus die elementarsymmetrischen Polynome $S_k(h^i_j)$ der Weingartenabbildung zu berechnen, wollen wir das charakteristische Polynom $P_{ch}(t)$ von $W = \{h^i_j\}$ betrachten. Es gilt

$$P_{ch}(t) = \det\,(W - t\,Id_{\mathbb{R}^n}) = \det\,(h^i_j - t\,\delta^i_j)\,.$$

Offensichtlich besitzt die Abbildung W eine Blockstruktur und somit ist

$$P_{ch}(t) = \det\,((c-t)\,Id_{\mathbb{R}^l})\cdot\det\,(\{a\,x^i x_j - (b+t)\,\delta^i_j\}_{i,j\in\{l+1,\dots,n\}})\,.$$

Für den ersten Faktor gilt

$$\det\,((c-t)\,Id_{\mathbb{R}^l}) = (c-t)^l$$

und für den zweiten Faktor

$$\det\,(\{a\,x^i x_j - (b+t)\,\delta^i_j\}) = (-1)^{n-l}\,(b+t)^{n-l-1}(b+t-a\,|x|^2)\,.$$

Damit ergibt sich für das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}
P_{ch}(t) &= (-1)^{n-l}(b+t-a\,|x|^2)(c-t)^l(b+t)^{n-l-1} \\
&= (-1)^{n-l}(b+t-a\,|x|^2)\sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j}c^{l-j}(-1)^j\,t^j\sum_{i=0}^{n-l-1}\binom{n-l-1}{i}b^{n-l-1-i}\,t^i\,.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
&(b+t-a\,|x|^2)\sum_{i=0}^{n-l-1}\binom{n-l-1}{i}b^{n-l-1-i}\,t^i \\
=\ & (b-a\,|x|^2)\sum_{i=0}^{n-l-1}\binom{n-l-1}{i}b^{n-l-1-i}\,t^i + \sum_{i=1}^{n-l}\binom{n-l-1}{i-1}b^{n-l-i}\,t^i \\
=\ & (b-a\,|x|^2)\,b^{n-l-1} + t^{n-l} \\
&+ \sum_{i=1}^{n-l-1}\left(\binom{n-l-1}{i}(b-a\,|x|^2)\,b^{n-l-1-i} + \binom{n-l-1}{i-1}b^{n-l-i}\right)t^i \\
=\ & (b-a\,|x|^2)\,b^{n-l-1} + t^{n-l} \\
&+ \sum_{i=1}^{n-l-1}\left(\left(\binom{n-l-1}{i} + \binom{n-l-1}{i-1}\right)b^{n-l-i} - \binom{n-l-1}{i}a\,|x|^2 b^{n-l-1-i}\right)t^i \\
=\ & \sum_{i=0}^{n-l}\left(\binom{n-l}{i}\,b^{n-l-i} - \binom{n-l-1}{i}a\,|x|^2 b^{n-l-1-i}\right)t^i\,,
\end{aligned}$$

wobei $\binom{p}{q} = 0$ für $p < q$ gilt, ist dann

$$\begin{aligned} P_{ch}(t) = \ & (-1)^{n-l} \sum_{j=0}^{l} \sum_{i=0}^{n-l} \binom{l}{j} (-1)^j c^{l-j} \left(\binom{n-l}{i} b^{n-l-i} - \binom{n-l-1}{i} a\,|x|^2 b^{n-l-1-i} \right) t^{i+j} \\ =: \ & \sum_{p=0}^{n} \alpha_p \, t^p \, . \end{aligned}$$

Da die elementarsymmetrischen Polynome $S_k(W)$ durch die Koeffizienten α_p des charakteristischen Polynoms gegeben sind, ergibt sich

$$\begin{aligned} S_k(W) &= (-1)^{n-k} \alpha_{n-k} \\ &= (-1)^{n-k} (-1)^{n-l} \sum_{\substack{i+j=n-k \\ i \in \{0,\dots,n-l\} \\ j \in \{0,\dots,l\}}} \binom{l}{j} (-1)^j c^{l-j} \left(\binom{n-l}{i} b^{n-l-i} - \binom{n-l-1}{i} a\,|x|^2 b^{n-l-1-i} \right). \end{aligned}$$

Aus der Definition für a und b ergibt sich $a|x|^2 = b - \frac{u''}{\beta^3}$ und somit schließlich

$$\begin{aligned} S_k(W) \ &= \sum_{\substack{i+j=n-k \\ i \in \{0,\dots,n-l\} \\ j \in \{0,\dots,l\}}} \binom{l}{j} c^{l-j} (-1)^{n-l+i} \, b^{n-l-i-1} \left(\binom{n-l}{i} b - \binom{n-l-1}{i} \left(b - \frac{u''}{\beta^3} \right) \right) \\ &= \sum_{\substack{i+j=n-k \\ i \in \{0,\dots,n-l\} \\ j \in \{0,\dots,l\}}} \binom{l}{j} c^{l-j} (-1)^{n-l+i} \, b^{n-l-i-1} \left(\binom{n-l-1}{i-1} b + \binom{n-l-1}{i} \frac{u''}{\beta^3} \right). \qquad (14) \end{aligned}$$

Für die Gauß-Krümmung G gilt dann zum Beispiel (siehe [A3], Kapitel 12)

$$G = S_n(W) = c^l \, (-1)^{n-l} \, b^{n-l-1} \, \frac{u''}{\beta^3} = (-1)^{n-l} \, \frac{u'' \, (u')^{n-l-1}}{|x|^{n-l-1} \, u^l \, (1 + (u')^2)^{\frac{n+2}{2}}} \, .$$

Wir wollen nun versuchen, das Problem $(\star_k)$ für diese Flächen in eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Funktion u umzuformulieren .
Da für die Startflächen der Evolution wieder $S_{k-1} > 0$ gelten soll, sei im Folgenden $l = k - 1$ für $k \in \{2, ..., n\}$. Damit ist

$$S_k(W) \ = \sum_{\substack{i+j=n-k \\ i \in \{0,\dots,n-k+1\} \\ j \in \{0,\dots,k-1\}}} \binom{k-1}{j} c^{k-j-1} (-1)^{n-k+i+1} \, b^{n-k-i} \left(\binom{n-k}{i-1} b + \binom{n-k}{i} \frac{u''}{\beta^3} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{i+j=n-k\\ i\in\{0,\dots,n-k+1\}\\ j\in\{0,\dots,k-1\}}} \binom{k-1}{j} c^{k-j-1}(-1)^{j+1}\, b^j \left(\binom{n-k}{j+1} b + \binom{n-k}{j}\frac{u''}{\beta^3}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n-k} \binom{k-1}{j} c^{k-j-1}(-1)^{j+1}\, b^j \left(\binom{n-k}{j+1} b + \binom{n-k}{j}\frac{u''}{\beta^3}\right)\\
&= \frac{1}{\beta^{k+2}\,|x|^{n+1}\,u^{k-1}} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{k-1}{j}(-1)^{j+1}\,u^j\,(u')^j\,|x|^{n-j}\left(\binom{n-k}{j+1} u'\beta^2\right.\\
&\qquad\left. + \binom{n-k}{j} u''\,|x|\right)\\
&=: \frac{1}{\beta^{k+2}\,|x|^{n+1}\,u^{k-1}} \sum_{j=0}^{n-k} A_j
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
S_{k-1}(W) &= \sum_{\substack{i+j=n-k+1\\ i\in\{0,\dots,n-k+1\}\\ j\in\{0,\dots,k-1\}}} \binom{k-1}{j} c^{k-j-1}(-1)^{n-k+i+1}\, b^{n-k-i} \left(\binom{n-k}{i-1} b + \binom{n-k}{i}\frac{u''}{\beta^3}\right)\\
&= \sum_{\substack{i+j=n-k+1\\ i\in\{0,\dots,n-k+1\}\\ j\in\{0,\dots,k-1\}}} \binom{k-1}{j} c^{k-j-1}(-1)^{j}\, b^{j-1} \left(\binom{n-k}{j} b + \binom{n-k}{j-1}\frac{u''}{\beta^3}\right)\\
&= \frac{1}{\beta^{k+1}\,|x|^{n+1}\,u^{k-1}} \sum_{j=0}^{n-k+1} \binom{k-1}{j}(-1)^{j}\,u^j\,(u')^{j-1}\,|x|^{n-j+1}\left(\binom{n-k}{j} u'\beta^2\right.\\
&\qquad\left. + \binom{n-k}{j-1} u''\,|x|\right)\\
&=: \frac{1}{\beta^{k+1}\,|x|^{n+1}\,u^{k-1}} \sum_{j=0}^{n-k+1} B_j\,.
\end{aligned}
$$

Dabei ist zu bemerken, dass man die Doppelsummen über i und j für $l = k-1$ in einfache Summen umwandeln kann, da die enthaltene Abhängigkeit von i und j dadurch aufgehoben wird, dass die zusätzlich auftretenden Summanden aufgrund der entsprechenden Binomialkoeffizienten verschwinden.

Wir haben nun die notwendige Vorarbeit geleistet, um das Problem $(\star_k)$ in Abhängigkeit der Radiusfunktion u anzugeben. Um allerdings zylindersymmetrische Lösungen von $(\star_k)$ zu betrachten, muß die Funktion u zusätzlich von der Zeit abhängen, das heißt $u : \mathbb{R}_0^+ \times [\,0,T) \to \mathbb{R}\,,\ (r,t) \mapsto u(r,t)$.

Dann bezeichne u' beziehungsweise u'' die Ableitung nach der ersten Variablen, also $u' = \frac{\partial u}{\partial r}$, $u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ und $\dot{u}$ entsprechend die Ableitung nach der Zeit, das heißt $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$. Damit gilt:

Lemma 7.2 *Die Funktion $F : S^{k-1} \times I\!R^{n-k+1} \times [\,0,T)$ mit $F(z,x,t) = (u(|x|,t)\,z, x)$ ist genau dann eine Lösung von $(\star_k)$, wenn für $u : I\!R_0^+ \times [\,0,T) \to I\!R$ gilt*

$$\dot{u} = -Q_k \cdot \beta = -Q_k \sqrt{1 + (u')^2}\,.$$

Dabei soll für jedes $t \in [\,0,T)$ die Funktion $u(\cdot,t) : I\!R_0^+ \to I\!R$ konkav und monoton fallend sein.

Beweis: Mit der Normalen $\nu = \frac{1}{\beta}\,(z, -\frac{u'}{|x|}\,x)$ und $\frac{\partial F}{\partial t} = (\dot{u}\,z, 0)$ folgt $\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \nu\rangle = \frac{1}{\beta}\,\dot{u}$, beziehungsweise $\dot{u} = \beta\,\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \nu\rangle$, woraus die Behauptung folgt. □

Korollar 7.3 *Jede Funktion $u(r,t)$ mit $\dot{u} \geq -Q_k \sqrt{1 + (u')^2}$ hat einen zylindersymmetrischen Graphen, der bei entsprechenden Anfangsdaten eine äußere Barriere für eine Lösung von $(\star_k)$ ist.*

Wir wollen jetzt eine solche äußere Barriere explizit angeben. Es sei bemerkt, dass diese Konstruktion zu einer entsprechenden Konstruktion in [A3], Kapitel 12 verwandt ist.

Lemma 7.4 *Seien $R_0 > 0$, $u_0 > 0$ und $\alpha > 1$ gegeben. Dann existiert ein $t_1 > 0$, so dass für die Funktion $u : [\,0, R_0\,] \times [\,0, t_1\,] \to I\!R$ mit*

$$u(r,t) = u_0 - \exp(-u_0\, t^{-\alpha})\, \cosh\Big(\frac{u_0}{2R_0}\, r\, t^{-\alpha}\Big) \tag{15}$$

folgende Eigenschaften gelten:

i) $u(r,0) := \lim_{t\to 0} u(r,t) = u_0$ *für alle* $r \in [\,0, R_0\,]$.

ii) $u(r,t) > 0$ *für alle* $r \in [\,0, R_0\,]$ *und* $t \in [\,0, t_1\,]$.

iii) $\dot{u}(r,t) < 0$, $u'(r,t) < 0$ *und* $u''(r,t) < 0$ *für alle* $r \in [\,0, R_0\,]$ *und* $t \in (0, t_1]$.

Beweis: Es gilt

$$\exp(-u_0\, t^{-\alpha})\, \cosh\Big(\tfrac{u_0}{2R_0}\, r\, t^{-\alpha}\Big)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\exp(-u_0\, t^{-\alpha})\Big(\exp\Big(\frac{u_0}{2R_0}\, r\, t^{-\alpha}\Big) + \exp\Big(-\frac{u_0}{2R_0}\, r\, t^{-\alpha}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\exp\Big(-u_0\, t^{-\alpha}\Big(1 - \frac{r}{2R_0}\Big)\Big) + \frac{1}{2}\exp\Big(-u_0\, t^{-\alpha}\Big(1 + \frac{r}{2R_0}\Big)\Big)\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Wegen $\frac{r}{2R_0} \le \frac{1}{2}$ folgt daraus

$$\lim_{t\to 0} \Big(\exp(-u_0\, t^{-\alpha}) \cosh\Big(\frac{u_0}{2R_0}\, r\, t^{-\alpha}\Big)\Big) = 0\,,$$

also Behauptung i). Außerdem gibt es zu festem $u_0 > 0$ ein $t_1 > 0$, so dass auch ii) gilt für $r \in [\,0, R_0\,]$ und $t \in [\,0, t_1\,]$. Weiter gilt für die Ableitungen von u:

$$\dot u(r,t) \;=\; -\,u_0\,\alpha\, t^{-\alpha-1} \exp(-u_0\, t^{-\alpha})\Big(\cosh\Big(\frac{u_0}{2R_0}\, r\, t^{-\alpha}\Big) - \frac{r}{2R_0}\, \sinh\Big(\frac{u_0}{2R_0}\, r\, t^{-\alpha}\Big)\Big) \tag{17}$$

$$u'(r,t) \;=\; -\,\frac{u_0}{2R_0}\, t^{-\alpha} \exp(-u_0\, t^{-\alpha})\, \sinh\Big(\frac{u_0}{2R_0}\, r\, t^{-\alpha}\Big) \tag{18}$$

$$u''(r,t) \;=\; -\,\Big(\frac{u_0}{2R_0}\Big)^2 t^{-2\alpha} \exp(-u_0\, t^{-\alpha})\, \cosh\Big(\frac{u_0}{2R_0}\, r\, t^{-\alpha}\Big)\,. \tag{19}$$

Mit $\cosh\Big(\frac{u_0}{2R_0}\, r\, t^{-\alpha}\Big) \ge \sinh\Big(\frac{u_0}{2R_0}\, r\, t^{-\alpha}\Big)$ und $\frac{r}{2R_0} \le \frac{1}{2}$ folgt also iii) für $r \in [\,0, R_0\,]$ und $t \in (0, t_1]$. □

Satz 7.5 *Zu gegebenen Konstanten $R_0 > 0$, $u_0 > 0$ und $\alpha > 1$ existiert ein $t_0 > 0$, so dass die Funktion $u : [\,0, R_0\,] \times [\,0, t_0\,] \to I\!R$ mit (15) zusätzlich zu den Eigenschaften i) - iii) des letzten Lemmas folgende Ungleichung erfüllt:*

$$\dot u \ge -Q_k \sqrt{1 + (u')^2}\,. \tag{20}$$

Beweis: Zu zeigen, dass u die Ungleichung (20) erfüllt, ist offensichtlich äquivalent dazu, dass

$$S_k \sqrt{1 + (u')^2} + \dot u\, S_{k-1} \ge 0$$

gilt. Mit $\beta = \sqrt{1 + (u')^2}$ und obigen Überlegungen ist

$$S_k\, \beta + \dot u\, S_{k-1} = \frac{1}{\beta^{k+1}\, |x|^{n+1}\, u^{k-1}} \left(\sum_{j=0}^{n-k} A_j + \dot u \sum_{j=0}^{n-k+1} B_j\right).$$

Um zu zeigen, dass dieser Ausdruck nichtnegativ ist, betrachten wir für $j \in \{0, ..., n-k\}$ die Summen $\frac{1}{2}\, A_j + \dot u\, B_{j+1}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\, A_j + \dot u\, B_{j+1} \;&=\; \frac{1}{2}\, (-1)^j\, u^j\, (u')^j\, |x|^{n-j} \Big\{ -\binom{k-1}{j}\Big(\binom{n-k}{j+1} u'\beta^2 + \binom{n-k}{j} u''|x|\Big) \\
&\qquad - 2\, u\, \dot u \binom{k-1}{j+1}\Big(\binom{n-k}{j+1} u'\beta^2 + \binom{n-k}{j} u''|x|\Big)\Big\} \\
&=\; \frac{1}{2}\binom{k-1}{j}(-u')^j\, u^j\, |x|^{n-j}\Big\{ -\, u'\beta^2 \binom{n-k}{j+1}\Big(1 + 2\, u\, \dot u\, \frac{k-j-1}{j+1}\Big) \\
&\qquad -\, u''\, |x| \binom{n-k}{j}\Big(1 + 2\, u\, \dot u\, \frac{k-j-1}{j+1}\Big)\Big\} \\
&=\; \frac{1}{2\,(j+1)}\binom{k-1}{j}(-u')^j\, u^j\, |x|^{n-j}\Big(-\, u'\beta^2 \binom{n-k}{j+1} - u''|x| \binom{n-k}{j}\Big) \\
&\qquad \cdot\Big(1 + j + 2\,(k - j - 1)\, u\, \dot u\Big)\,.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Eigenschaften ii) und iii) gilt folglich $\frac{1}{2}\,A_j + \dot u\,B_{j+1} \geq 0$ genau dann, wenn

$$\Big(1 + j + 2\,(k-j-1)\,u\,\dot u\Big) \geq 0$$

ist. Für $j \geq k$ ist $\left(\begin{smallmatrix} k-1 \\ j \end{smallmatrix} \right) = 0$ und somit $\frac{1}{2}\,A_j + \dot u\,B_{j+1} = 0$. Sei also $j \leq k-1$.
Mit $u \leq u_0$ und (17) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} 1 + j + 2\,(k-j-1)\,u\,\dot u \quad &\geq \quad 1 + j - 2\,(k-j-1)\,u_0^2\,\alpha\,t^{-\alpha-1}\exp(-u_0\,t^{-\alpha}) \\ &\qquad \cdot\Big(\cosh\Big(\frac{u_0}{2R_0}\,r\,t^{-\alpha}\Big) - \frac{r}{2R_0}\,\sinh\Big(\frac{u_0}{2R_0}\,r\,t^{-\alpha}\Big)\Big) \\ &\geq \quad 1 - 2\,(k-1)\,u_0^2\,\alpha\,t^{-\alpha-1}\exp(-u_0\,t^{-\alpha})\cosh\Big(\frac{u_0}{2R_0}\,r\,t^{-\alpha}\Big)\,. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0}\; t^{-\alpha-1}\exp(-u_0\,t^{-\alpha})\cosh\Big(\frac{u_0}{2R_0}\,r\,t^{-\alpha}\Big) \\ = \; &\lim_{t\to 0}\; \frac{1}{2}\,t^{-\alpha-1}\Big\{\exp\Big(-u_0\,t^{-\alpha}\Big(1 - \frac{r}{2\,R_0}\Big)\Big) + \exp\Big(-u_0\,t^{-\alpha}\Big(1 - \frac{r}{2\,R_0}\Big)\Big)\Big\} = 0 \end{aligned}$$

folgt, dass es ein $t_2 > 0$ gibt, so dass $\frac{1}{2}\,A_j + \dot u\,B_{j+1} \geq 0$ gilt für $r \in [\,0, R_0\,]$, $t \in [\,0, t_2\,]$ und $j \in \{0, ..., n-k\}$.
Weiter gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,A_0 + \dot u\,B_0 \quad &= \quad -\,\frac{1}{2}\,|x|^n\Big((n-k)\,u'\beta^2 + u''\,|x|\,\Big) + \dot u\,|x|^{n+1}\beta^2 \\ &= \quad -\,\frac{1}{2}\,(n-k)\,\beta^2\,|x|^n\,u' + \frac{1}{2}\,|x|^{n+1}\,(-u'' + 2\,\dot u\,\beta^2\,) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -u'' + 2\,\dot u\,\beta^2 = \; &\Big(\frac{u_0}{2R_0}\Big)^2\,t^{-2\,\alpha}\exp(-u_0\,t^{-\alpha})\,\cosh\Big(\frac{u_0}{2R_0}\,r\,t^{-\alpha}\Big) \\ &-2\,u_0\,\alpha\,t^{-\alpha-1}\Big\{1 + \Big(\frac{u_0}{2R_0}\Big)^2\,t^{-2\,\alpha}\exp(-2\,u_0\,t^{-\alpha})\,\sinh^2\Big(\frac{u_0}{2R_0}\,r\,t^{-\alpha}\Big)\Big\} \\ &\cdot\,\exp(-u_0\,t^{-\alpha})\Big\{\cosh\Big(\frac{u_0}{2R_0}\,r\,t^{-\alpha}\Big) - \frac{r}{2R_0}\,\sinh\Big(\frac{u_0}{2R_0}\,r\,t^{-\alpha}\Big)\Big\} \\ \geq \; &\Big(\frac{u_0}{2R_0}\Big)^2\,t^{-2\,\alpha}\exp(-u_0\,t^{-\alpha})\,\cosh\Big(\frac{u_0}{2R_0}\,r\,t^{-\alpha}\Big) \\ &\cdot\Bigg(1 - \frac{8\,\alpha\,R_0^2}{u_0}\,t^{\alpha-1}\Big\{1 + \Big(\frac{u_0}{2R_0}\Big)^2\,t^{-2\,\alpha}\exp(-2\,u_0\,t^{-\alpha})\,\sinh^2\Big(\frac{u_0}{2R_0}\,r\,t^{-\alpha}\Big)\Big\}\Bigg)\,. \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \exp(-2\,u_0\,t^{-\alpha})\,\sinh^2\Big(\frac{u_0}{2R_0}\,r\,t^{-\alpha}\Big) \quad &= \quad \frac{1}{4}\,\exp(-2\,u_0\,t^{-\alpha}) \\ &\qquad \cdot\Big(\exp\Big(\frac{u_0}{R_0}\,r\,t^{-\alpha}\Big) - 2 + \exp\Big(-\,\frac{u_0}{R_0}\,r\,t^{-\alpha}\Big)\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \ \frac{1}{4}\,\exp\Big(-u_0\,t^{-\alpha}\Big(2-\frac{r}{R_0}\Big)\Big)+\frac{1}{4}\,\exp\Big(-u_0\,t^{-\alpha}\Big(2-\frac{r}{R_0}\Big)\Big)\\
&\leq \ \frac{1}{4}\,\exp\Big(-u_0\,t^{-\alpha}\Big)+\frac{1}{4}\,\exp\Big(-2\,u_0\,t^{-\alpha}\Big)\\
&\leq \ \frac{1}{2}\,\exp\Big(-u_0\,t^{-\alpha}\Big)
\end{aligned}
$$

und somit folgt

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\ \Big(1+\Big(\frac{u_0}{2R_0}\Big)^2 t^{-2\alpha}\exp(-2\,u_0\,t^{-\alpha})\,\sinh^2\Big(\frac{u_0}{2R_0}\,r\,t^{-\alpha}\Big)\Big)\\
&\quad\leq\ \lim_{t\to 0}\ \Big(1+\frac{1}{2}\Big(\frac{u_0}{2R_0}\Big)^2 t^{-2\alpha}\exp(-u_0\,t^{-\alpha})\Big)=1\,.
\end{aligned}
$$

Es existiert also ein $t_3>0$, so dass

$$
\Big(1+\Big(\frac{u_0}{2R_0}\Big)^2 t^{-2\alpha}\exp(-2\,u_0\,t^{-\alpha})\,\sinh^2\Big(\frac{u_0}{2R_0}\,r\,t^{-\alpha}\Big)\Big)\leq 2
$$

gilt. Wegen $\alpha>1$ gibt es dann ein $t_4>0$, so dass $1-\frac{16\,\alpha\,R_0^2}{u_0}\,t^{\alpha-1}\geq 0$ gilt für alle $t\leq\min\{t_3,t_4\}$.

Folglich ist für $t\leq\min\{t_1,t_3,t_4\}$ und $r\in[\,0,R_0\,]$ zusammen mit Behauptung iii) des letzten Lemmas

$$
\frac{1}{2}\,A_0+\dot{u}\,B_0\geq 0\,.
$$

Insgesamt haben wir somit gezeigt, dass für $t\leq t_0:=\min\{t_1,...,t_4\}$ und $r\in[\,0,R_0\,]$

$$
S_k\,\beta+\dot{u}\,S_{k-1}\geq 0
$$

gilt, womit der Satz bewiesen ist. □

Mit Hilfe der äußeren zylindersymmetrischen Barrieren erhält man nun das strikte Maximumprinzip für die Geschwindigkeit Q_k. Es handelt sich dabei im Gegensatz zu Theorem 5.2 um eine a priori Abschätzung, und diese hängt wie bereits oben erwähnt im Vergleich zu Satz 4.1 nur von M_0 selber und nicht von $Q_k|_{M_0}$ ab.

Theorem 7.6 *Sei $F_0: M^n\to I\!R^{n+1}$ eine glatte Einbettung und M_0 eine geschlossene, schwach konvexe Hyperfläche mit $S_{k-1}>0$ auf ganz M_0. Außerdem sei $F: M^n\times[\,0,T\,)\to I\!R^{n+1}$ eine Lösung von $(\star_k)$. Dann existiert ein $t_0>0$, ein $u_0>0$ und ein $\alpha>1$, so dass*

$$
Q_k(p,t)\geq\frac{1}{2\,t}\,\exp\left(-u_0\,t^{-\alpha}\right)
$$

für alle $p\in M^n$ und $t\in[\,0,t_0\,]$ gilt. Insbesondere gilt $Q_k(p,t)>0$ für alle $p\in M^n$ und $t\in(0,T)$.

Beweis: Um die Aussage zu beweisen, approximieren wir wie im Beweis von Satz 4.14 die Fläche M_0 glatt durch eine Familie von strikt konvexen Hyperflächen M_0^ε. Diese Familie erhält man beispielsweise mit Hilfe des mittleren Krümmungsflusses. Da wegen Lemma 2.5 auf den Flächen M_0^ε dann $\frac{\partial Q_k}{\partial \lambda_i} > 0$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$ gilt, ist dort $\Box_k$ strikt elliptisch und man erhält mit [HP], Theorem 3.1 für jedes $\varepsilon > 0$ zumindest für kurze Zeiten T_ε eine glatte Lösung

$$F^\varepsilon : M_\varepsilon^n \times [\,0, T_\varepsilon\,) \to I\!R^{n+1}\,, \quad M_t^\varepsilon = F^\varepsilon(M_\varepsilon^n, t)$$

von $(\star_k)$ mit Anfangsdaten M_0^ε. Es sei bemerkt, dass man wieder wie im Beweis von Satz 4.14 wegen Satz 4.6 gleichmäßige $|A|^2$-Schranken und damit wegen Satz 4.13 eine gleichmäßige untere Schranke an T_ε erhält.

Wegen Korollar 4.12 sind alle M_t^ε strikt konvex, und es gilt auf diesen Flächen insbesondere $S_{k-1} > 0$. Folglich kann man wegen Theorem 6.1 die Flächen M_t^ε in jedem Punkt durch Zylinder der Form $S_R^{k-1} \times I\!R^{n-k+1}$ von außen berühren. Da alle M_t^ε kompakt sind, kann man dabei für festes $\varepsilon_0, t_0 > 0$ und $\varepsilon \le \varepsilon_0$, $t \le t_0$ einen festen Radius $R = u_0 > 0$ für alle Punkte $p \in M_t^\varepsilon$ gleichzeitig wählen. Außerdem gibt es ein $R_0 > 0$, so dass alle M_t^ε in einer Kugel vom Radius R_0 enthalten sind.

Sei nun $\varepsilon > 0$ fest. Zu jedem $p \in M_0^\varepsilon$ kann man jetzt die Flächen M_t^ε lokal als Graph über einer zu $T_p M_\varepsilon^n$ parallelen affinen Ebene E schreiben, so dass der Abstand von p zu E genau u_0 beträgt. Die Symmetrieachsen des Zylinders, der M_0^ε in p berührt, liegen also in E. Wegen Korollar 7.3 und Satz 7.5 existiert zu festem $\alpha > 1$ ein $t_0 > 0$, so dass der zylindersymmetrische Graph zur Radiusfunktion

$$u : [\,0, R_0\,] \times [\,0, t_0\,] \to I\!R \ \text{ mit } \ u(r,t) = u_0 - \exp(-u_0\, t^{-\alpha})\, \cosh\left(\frac{u_0}{2R_0}\, r\, t^{-\alpha}\right)$$

eine äußere Barriere an die Flächen M_t^ε ist. Dann gilt also

$$|F^\varepsilon(p,t) - F^\varepsilon(p,0)| \ge |u(0,0) - u(0,t)| = \exp(-u_0\, t^{-\alpha})\,. \tag{21}$$

Um nun aus dieser Abschätzung eine Schranke für die Geschwindigkeit zu erhalten, braucht man noch eine Harnack-Ungleichung für Lösungen von $(\star_k)$:
Nach Theorem 5.21, (2) aus [A2] gilt für $p_1, p_2 \in M_\varepsilon^n$ und $t_2 > t_1 > 0$

$$\frac{Q_k(p_2,t_2)}{Q_k(p_1,t_1)} \ge \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{c\, d^2}{4\,(t_2 - t_1)}\right), \tag{22}$$

wobei d der Abstand von p_1 zu p_2 bezüglich der Metrik zur Zeit t_1 ist, und $\frac{H}{Q_k} \le c$ auf den Flächen M_t^ε gelten muss.
Da die Fläche M_0^ε strikt konvex ist, existiert wegen Satz 4.7 ein $c_\varepsilon > 0$, so dass

tatsächlich $\frac{H}{Q_k} \le c_\varepsilon$ auf M_t^ε gilt. Aus (22) folgt also mit $p_1 = p_2$

$$\begin{aligned}\int_0^t Q_k(p,\tau)\,d\tau &\le \int_0^t Q_k(p,t)\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\ &= Q_k(p,t)\cdot t^{\frac{1}{2}} \int_0^t \tau^{-\frac{1}{2}}\,d\tau \\ &= 2\,Q_k(p,t)\cdot t\ .\end{aligned}$$

Damit gilt zusammen mit (21)

$$\begin{aligned}\exp(-u_0\,t^{-\alpha}) &\le |F^\varepsilon(p,t) - F^\varepsilon(p,0)| = |\int_0^t \frac{d}{d\tau} F^\varepsilon(p,\tau)\,d\tau| \\ &\le \int_0^t |Q_k(p,\tau)|\,d\tau = \int_0^t Q_k(p,\tau)\,d\tau \\ &\le 2\,Q_k(p,t)\cdot t\ ,\end{aligned}$$

was äquivalent ist zu

$$Q_k(p,t) \ge \frac{1}{2\,t}\exp\left(-\,u_0\,t^{-\alpha}\right)\,.$$

Da diese Abschätzung unabhängig von ε ist, kann man nun den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ betrachten und erhält somit die gewünschte Behauptung. $\square$

8 Kurzzeitexistenz

Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, dass das Problem $(\star_k)$ zumindest für kurze Zeiten eine eindeutige glatte Lösung besitzt, falls die Startfläche M_0 geschlossen und schwach konvex ist mit $S_{k-1} > 0$. Dazu sei bemerkt, dass allgemein die Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}(p) > 0 \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ und } p \in M_0$$

für das Problem $(\star_f)$ eine glatte Lösung zumindest für kurze Zeiten sichert; siehe dazu [HP], Theorem 3.1. In diesem Fall ist die Gleichung für F nämlich bis auf die Invarianz unter tangentialen Diffeomorphismen gleichmäßig parabolisch.
Im Fall $f = Q_k$ gilt nach Lemma 2.5 auf Γ_{k-1} nur

$$\frac{\partial Q_k}{\partial \lambda_i}(p) \geq 0 \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ und } p \in M_0\,,$$

das heißt das Problem $(\star_k)$ ist hier tatsächlich auch abgesehen von der Invarianz unter tangentialen Diffeomorphismen nur schwach parabolisch, außer es gilt bereits $S_k > 0$ auf M_0. Insbesondere erhält man beispielsweise für strikt konvexe Anfangsflächen sofort Kurzzeitexistenz.
Für schwach konvexe Startflächen mit $S_{k-1} > 0$ erhält man die Existenz einer Lösung erst aus der unteren Schranke an Q_k (siehe Theorem 7.6), da diese wegen Lemma 2.5 sicherstellt, dass die Evolutionsgleichung $(\star_k)$ für $t > 0$ gleichmäßig parabolisch ist.

Theorem 8.1 (Kurzzeitexistenz) *Sei $n \geq 2$ und $F_0 : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte, geschlossene, schwach konvexe Hyperfläche und es gelte $S_{k-1} > 0$ auf ganz M_0. Dann existiert ein $T > 0$, so dass das Problem $(\star_k)$ eine eindeutige glatte Lösung $F : M^n \times (0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ besitzt, die für $t \to 0$ und ein $0 < \alpha < 1$ in $C^{1,\alpha}$ gegen F_0 konvergiert.*

Beweis: Für $k = 1$ handelt es sich bei dem Problem $(\star_k)$ um den mittleren Krümmungsfluss, und die Kurzzeitexistenz folgt direkt mit [HP], Theorem 3.1. Um für $k \geq 2$ eine Lösung zu konstruieren, die für $t \to 0$ gegen M_0 konvergiert, betrachten wir wie im Beweis von Theorem 7.6 eine Familie von glatten, strikt konvexen Hyperflächen M_0^ε, die für $\varepsilon \to 0$ die Fläche M_0 glatt approximieren. Für jedes $\varepsilon > 0$ erhält man dann mit [HP], Theorem 3.1 eine glatte Lösung M_t^ε von $(\star_k)$ mit Anfangsdaten M_0^ε.
Weiter existiert wie im Beweis von Theorem 7.6 eine in ε gleichmäßige $|A|^2-$Schranke für die Flächen M_t^ε und ein gleichmäßiges Existenzintervall für die Lösungen. Insbesondere hat man also eine gleichmäßige C^2-Schranke für die Familie F_ε.
Außerdem liefert Theorem 7.6 eine von ε unabhängige untere Schranke an die Geschwindigkeit. Da die Evolutionsgleichung damit gleichmäßig parabolisch, und

die Geschwindigkeit Q_k wegen Lemma 2.4 konkav in h^i_j ist, kann man wieder die Abschätzungen von Krylov [Kry], Theorem 2, Kapitel 5.5 anwenden und bekommt wie im Beweis von Satz 4.13 aus den gleichmäßigen C^2-Schranken gleichmäßige C^∞-Schranken an die Familie F_ε.
Mit dem Theorem von Arzela-Ascoli bekommt man nun eine Teilfolge ε_i mit $\varepsilon_i \to 0$, so dass die Folge $\{M_t^{\varepsilon_i}\}$ in C^∞ gegen eine Familie von glatten Hyperflächen $\{M_t\}$ konvergiert, die die gleichen Abschätzungen erfüllen. Insbesondere löst die Familie $\{M_t\}$ das Problem $(\star_k)$ auf $(0, T)$ und die Flächen M_t konvergieren für $t \to 0$ aufgrund der gleichmäßigen $|A|^2-$Schranke in $C^{1,\alpha}$ gegen die Startfläche M_0.
Die Eindeutigkeit der Lösung folgt analog zu [A3], Theorem 14 und 15 (siehe dazu die Bemerkung zur Eindeutigkeit im Beweis von Theorem 14). $\square$

Bemerkung 8.2 Für die Barrierenkonstruktion des letzten Kapitels und somit die Kurzzeitexistenz ist offenbar nur die Tatsache von Bedeutung, dass man die Startfläche in jedem Punkt von außen durch einen Zylinder der entsprechenden Form berühren kann. Da man diese Eigenschaft in Theorem 6.1 nicht nur für glatte, sondern bereits für $C^{2,\alpha}$-Flächen erhält, kann man den Q_k-Fluss insbesondere auch mit einer schwach konvexen $C^{2,\alpha}$-Fläche starten, auf der $S_{k-1} > 0$ gilt.

Bemerkung 8.3 Falls man für die Startfläche M_0 nur fordert, dass dort $\lambda \in \Gamma_{k-1}$ und $S_k(\lambda) \geq 0$ für die Hauptkrümmungen $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gilt, kann man keine glatten Lösungen des Problems $(\star_k)$ mehr erwarten, da im Beweis der Geschwindigkeitsschranke die schwache Konvexität der Startfläche für die Barrierenkonstruktion entscheidend ist. Man erhält aber trotzdem aus der $|A|^2$-Schranke zumindest für kurze Zeiten noch eine Viskositätslösung im Sinne von [IL], welche aufgrund der $|A|^2$-Schranke sogar eine $C^{1,1}$-Lösung ist.

9 Konvergenz zu einem Punkt

In diesem Kapitel werden wir uns mit der Langzeitexistenz der Q_k-Flüsse beschäftigen und zeigen, dass jede Lösung des Anfangswertproblems $(\star_k)$ mit einer glatten, strikt konvexen Startfläche in endlicher Zeit gegen einen Punkt konvergiert. Für den Gauß-Fluss beispielsweise wurde das entsprechende Resultat von K. Tso (siehe [Tso], Theorem 4.2) bewiesen.
Bevor wir zum Haupttheorem kommen, wollen wir zeigen, dass es eine glatte Lösung von $(\star_k)$ gibt, solange die Flächen M_t noch eine Kugel vom Radius $\delta > 0$ umschließen.
Dazu benötigen wir allerdings noch eine Evolutionsgleichung für die Größe $\langle F, \nu \rangle$.

Lemma 9.1 *Es gilt für Lösungen $F : M^n \times [\,0, T) \to I\!R^{n+1}$ des Problems $(\star_k)$*

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle F, \nu \rangle = \Box_k \langle F, \nu \rangle - 2\, Q_k + \frac{\partial Q_k}{\partial h^p_q} h^p_m\, h^m_q \langle F, \nu \rangle\, .$$

Beweis: Mit Lemma 3.1 erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle F, \nu \rangle = -\, Q_k \langle \nu, \nu \rangle + \left\langle F, \frac{\partial \nu}{\partial t} \right\rangle = -\, Q_k + \langle F, \nabla Q_k \rangle\, ,$$

und in einem adaptierten orthonormalen n-Bein ist

$$\begin{aligned}
\Box_k \langle F, \nu \rangle &= \frac{\partial Q_k}{\partial h^i_j} \nabla^i \nabla_j \langle F, \nu \rangle = \frac{\partial Q_k}{\partial h^i_j} \nabla^i (h^l_j \langle F, e_l \rangle) \\
&= \frac{\partial Q_k}{\partial h^i_j} \Big(\nabla^i h^l_j \langle F, e_l \rangle + h^i_j - h^i_l\, h^l_j \langle F, \nu \rangle \Big) \\
&= \frac{\partial Q_k}{\partial h^i_j} \nabla^l h^i_j \langle F, e_l \rangle + Q_k - \frac{\partial Q_k}{\partial h^i_j} h^i_l\, h^l_j \langle F, \nu \rangle \\
&= \langle F, \nabla Q_k \rangle + Q_k - \frac{\partial Q_k}{\partial h^i_j} h^i_l\, h^l_j \langle F, \nu \rangle\, ,
\end{aligned}$$

wobei man im vorletzten Schritt die Codazzi-Gleichungen benutzt hat. Die Behauptung folgt dann direkt. □

Lemma 9.2 *Sei $F : M^n \times [\,0, T) \to I\!R^{n+1}$ eine Lösung von $(\star_k)$ für $k \in \{2, ..., n\}$ und M_0 eine glatte, geschlossene, schwach konvexe Fläche mit $S_{k-1} > 0$. Außerdem bezeichne V_t das von M_t im $I\!R^{n+1}$ berandete Volumen und es gelte für ein $\delta > 0$ und ein $x_0 \in I\!R^{n+1}$, dass $B_\delta(x_0) \subset V_t$ für alle $t \in [\,0, T)$. Dann existiert ein $0 < C < \infty$, so dass*

$$Q_k(p, t) \leq C(\delta, k, n) \quad \text{für alle} \quad (p, t) \in M^n \times [\,0, T)\, .$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $x_0 = 0$. Da wegen Satz 4.14 alle M_t schwach konvex sind, und somit immer ganz auf einer Seite eines Tangentialraumes liegen, gibt es wegen $B_\delta(x_0) \subset V_t$ ein $\alpha(\delta) > 0$, so dass

$$\langle F, \nu \rangle - \alpha \geq \frac{\alpha}{2} > 0 \quad \text{für alle} \quad (p,t) \in M^n \times [\,0, T)$$

gilt. Sei also

$$v := \frac{Q_k}{\langle F, \nu \rangle - \alpha}\,.$$

Dann gilt mit den Evolutionsgleichungen für $\langle F, \nu \rangle$ und Q_k (Lemma 9.1 und 3.1)

$$\frac{\partial}{\partial t}\, v = \Box_k\, v + 2\, \frac{1}{(\langle F, \nu \rangle - \alpha)}\, \frac{\partial Q_k}{\partial h^p_q}\, \nabla^p v \nabla_q \langle F, \nu \rangle + \frac{Q_k}{(\langle F, \nu \rangle - \alpha)^2} \Big(2\, Q_k - \alpha\, \frac{\partial Q_k}{\partial h^p_q}\, h^p_m\, h^m_q \Big)$$

beziehungsweise mit $c(k)$ wie in Satz 4.1

$$\frac{\partial}{\partial t}\, v \leq \Box_k\, v + 2\, \frac{v}{Q_k}\, \frac{\partial Q_k}{\partial h^p_q}\, \nabla^p v \nabla_q \langle F, \nu \rangle + v^2 \left(2 - \alpha\, c(k)\, Q_k \right).$$

Angenommen, v nehme nun in (p_0, t_0) zum ersten Mal ein Maximum $C > 0$ an, dann gilt dort

$$\alpha\, c(k)\, Q_k(p_0, t_0) \leq 2 \quad \text{und} \quad Q_k(p_0, t_0) = C\, (\langle F, \nu \rangle - \alpha) \geq C \cdot \frac{\alpha}{2}\,,$$

also

$$C \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot c(k) \leq 2\,,$$

was einen Widerspruch ergibt, falls $C > \frac{4}{\alpha\, c(k)}$ ist. □

Korollar 9.3 *Für glatte, geschlossene, schwach konvexe Anfangsflächen M_0 mit $S_{k-1} > 0$ existiert eine glatte Lösung von $(\star_k)$ für $k \in \{2, ..., n\}$ mindestens solange, wie M_t ein nichtverschwindendes Volumen berandet.*

Beweis: Da M_0 eingebettet ist, gibt es ein $t_0 > 0$, so dass die Flächen M_t für $t \in [0, t_0]$ ein nichtverschwindendes Volumen beranden und dort ist aufgrund der Kompaktheit auch $|A|^2$ beschränkt. Wegen Theorem 7.6 ist aber für $t \geq t_0$ auch $Q_k > 0$ und somit existiert wegen Satz 4.7 ein $C > 0$, so dass $H \leq C \cdot Q_k$ gilt. Weiterhin ist wie im Beweis von Satz 4.4 wegen $Q_k > 0$ auch $|A| \leq H$ und die Behauptung folgt aus dem vorangehenden Lemma und Satz 4.13. □

Als abschließendes Ergebnis ergibt sich nun für konvexe Startflächen:

Theorem 9.4 *Sei $n \geq 2$ und M_0 eine glatte, geschlossene, strikt konvexe Fläche. Dann hat das Anfangswertproblem $(\star_k)$ eine glatte Lösung auf einem endlichen Zeitintervall $0 \leq t < T$ und die Flächen M_t konvergieren für $t \to T$ gegen einen Punkt im $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Beweis: Für $k = 1$ erhält man wieder den mittleren Krümmungsfluss, und das Ergebnis wurde von G. Huisken in [H84] gezeigt. Sei also $k \geq 2$. Aufgrund des letzten Korollars kann der Fluss solange fortgesetzt werden, wie die Flächen M_t ein nichtverschwindendes Volumen beranden, das heißt für $t \to T$ muss für das Hausdorffmaß $\mathcal{H}^n(V_t) \to 0$ gelten, wobei wieder V_t das von M_t berandete Volumen ist.
Nehmen wir nun an, es existieren zwei verschiedene Punkte $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $x, y \in V_t$ für alle $t \in [0, T)$. Dann schneidet jede 2-dimensionale Ebene E durch x und y die Flächen M_t in einer regulären Kurve $\gamma_t(E)$. Sei $E_t = E \cap V_t$. Wegen $\mathcal{H}^n(V_t) \to 0$ für $t \to T$ muss dann ein E existieren mit $\mathcal{H}^2(E_t) \to 0$, was bedeuten würde, dass es Punkte auf $\gamma_t(E)$ mit beliebig kleiner Krümmung gibt. Das kann aber wegen Korollar 4.12 nicht sein. $\square$

Literatur

[Alt] S. ALTSCHULER, *A geometric heat flow for one-forms on three dimensional manifolds*, Illinois J. Math. **39** (1995), 98-118.

[A1] B. ANDREWS, *Contraction of convex hypersurfaces in Euclidian space*, Calc. Var. **2**, 151-171 (1994).

[A2] B. ANDREWS, *Harnack inequalities for evolving hypersurfaces*, Math. Z. **217**, 179-197 (1994).

[A3] B. ANDREWS, *Motion of hypersurfaces by Gauss curvature*, Pacific J. of Math., Vol. **195**, No. 1 (2000).

[AC] S.M. ALLEN, J.W. CAHN, *Microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening*, Acta Metallurgica **27** (1979), 1085-1095.

[AGLM] L. ALVAREZ, F. GUICHARD, P.L. LIONS, J.M. MOREL, *Axioms and fundamental equations of image processing*, Arch. Rat. Mech. Anal. **123** (1993), 199-257.

[Bon] J.M. BONY, *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les operateurs elliptiques dégénérés*, Ann. Inst. Fourier **19** (1969), 277-304.

[Cho] B. CHOW, *Deforming convex hypersurfaces by the nth root of the Gaussian curvature*, J. Diff. Geom. **22** (1985), 117-138.

[DH] P. DASKALOPOULOS, R. HAMILTON, *The free boundary in the Gauss curvature flow with flat sides*, J. Reine Angew. Math. **510** (1999), 187-227.

[EH1] K. ECKER, G. HUISKEN, *Mean curvature evolution of entire graphs*, Ann. of Math. **130** (1989), 453-471.

[EH2] K. ECKER, G. HUISKEN, *Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature*, Invent. Math. **105** (1991), 547-569.

[Fir] W.J. FIREY, *On the shapes of worn stones*, Mathematika **21** (1974), 1-11.

[Ger] C. GERHARDT, *Closed Weingarten hypersurfaces in Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. **43** (1996), 612-641.

[Gra] M. GRAYSON, *The heat equation shrinks embedded closed curves to round points*, J. Diff. Geom. **26** (1987), 285-314.

[GH] M.E. GAGE, R.S. HAMILTON , *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Diff. Geom. **23** (1986), 69-96.

[Ha1] R.S. HAMILTON, *Three-manifolds with positive ricci curvature*, J. Diff. Geom. **17**, 255-306 (1982).

[Ha2] R. HAMILTON, *Worn stones with flat sides*, Discourses Math. Appl. **3** (1994), 69-78.

[HLP] G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD, G. PÓLYA, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, 1934.

[H84] G. HUISKEN, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Diff. Geom. **20** (1984), 237-266.

[HK] G. HUISKEN, W. KLINGENBERG, *Flow of real hypersurfaces by the trace of the Levi form*, Mathematical Research Letters **6**, 645-661 (1999).

[HP] G. HUISKEN, A. POLDEN, *Geometric evolution equations for hypersurfaces*, Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems, CIME Lectures of Cetraro of 1996, Springer.

[HS] G. HUISKEN, C. SINESTRARI, *Convexity estimates for mean curvature flow and singularities of mean convex surfaces*, Calc. Var. Partial Diff. Equ. **8**(1), 1-14 (1999).

[IL] H. ISHII, P.L. LIONS, *Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations*, J. Diff. Equations **83**, 26-78 (1990).

[Kry] N.V. KRYLOV, *Nonlinear elliptic and parabolic equations of second order*, D. Reidel, 1978.

[Lie] G.M. LIEBERMAN, *Second order parabolic differential equations*, World Scientific, 1996.

[PW] M.H. PROTTER, H.F. WEINBERGER, *Maximum principles in differential equations*, Prentice Hall, 1967.

[Tai] K. TAIRA, *Diffusion processes and partial differential equations*, Academic Press, 1988.

[Tso] K. TSO, *Deforming a hypersurface by its Gauss-Kronecker curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **38**, 867-882 (1985).

Lebenslauf

	Sabine Dieter geb. Schöttle verheiratet mit Matthias Joachim Dieter, ein Sohn
30.07.1973	geboren in Tübingen
1979 - 1983	Grundschule in Nehren
1983 - 1992	Quenstedt-Gymnasium in Mössingen
05/92	Abitur
WS 1992/93 - SS 1997	Studium der Mathematik an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen
07/97	Diplom in Mathematik
08/1997 - 11/1998	Doktorandin an der Universität Tübingen
12/1998 - 03/1999	Allianz Lebensversicherungs-AG Stuttgart
seit 04/1999	wissenschaftliche Angestellte an der Universität Tübingen (seit 04/2002 im Rahmen des SFB 382)
09/1999 - 10/1999	Princeton University, Princeton NJ, USA
SS 2000 - WS 2000/2001	Lehramtsstudium der Mathematik und Physik an der Universität Tübingen
05/2002	Erstes Staatsexamen in Mathematik und Physik