Krümmungsflüsse
auf
Mannigfaltigkeiten mit Rand

Dissertation
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen
zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Simon Brendle
aus Tübingen

2001

Tag der mündlichen Prüfung:	22. 02. 2001
Dekan:	Prof. Dr. Christian Lubich
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. Gerhard Huisken
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. Michael Struwe

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Ein wichtiges Problem der Differentialgeometrie besteht darin, auf einer Mannigfaltigkeit Metriken konstanter Krümmung zu konstruieren. Der Uniformisierungssatz besagt beispielsweise, daß auf einer geschlossenen Fläche in jeder konformen Klasse eine Metrik konstanter Gauß-Krümmung existiert.

Die Yamabe-Vermutung [43] ist ein Versuch, den Uniformisierungssatz auf Mannigfaltigkeiten höherer Dimension zu verallgemeinern. Sie besagt, daß auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M der Dimension $n \geq 3$ in jeder konformen Klasse eine Metrik konstanter Skalarkrümmung existiert. Spezialfälle der Yamabe-Vermutung wurden von N. Trudinger [42] und T. Aubin [3, 4] bewiesen. Diese Methode erforderte jedoch die zusätzliche Voraussetzung, daß der Sobolev-Quotient von M kleiner als der von S^n ist. R. Schoen [33] konnte mit Hilfe des Satzes von der Positivität der Masse zeigen, daß der Sobolev-Quotient einer Mannigfaltigkeit M, die nicht konform äquivalent zu S^n ist, stets kleiner als der von S^n ist. Auf diese Weise gelang es ihm, die Yamabe-Vermutung in voller Allgemeinheit zu beweisen. Spezielle Lösungen der Yamabe-Gleichung wurden von R. Schoen [34] sowie von R. Mazzeo, D. Pollack und K. Uhlenbeck [24] angegeben.

Während jede Mannigfaltigkeit eine Metrik konstanter Skalarkrümmung besitzt, gibt es Mannigfaltigkeiten, die keine Metrik konstanter Schnittkrümmung zulassen. Um Metriken zu konstruieren, die diese stärkere Bedingung erfüllen, hat R. Hamilton [17] den Ricci-Fluß eingeführt. Er konnte zeigen, daß in Dimension 3 jede Metrik mit positiver Ricci-Krümmung zu einer Metrik konstanter Schnittkrümmung deformiert werden kann. Auf diese Weise war es möglich, alle Mannigfaltigkeiten der Dimension 3 zu klassifizieren, die eine Metrik mit positiver Ricci-Krümmung besitzen. Später bewies Hamilton ein ähnliches Resultat in Dimension 4 [18]. G. Huisken [22] gelang es zu zeigen, daß jede Metrik, deren Schnittkrümmungen genügend nahe bei 1 liegen, zu einer Metrik konstanter Schnittkrümmung deformiert werden kann. Dieses Resultat gilt in beliebiger Dimension und liefert einen neuen Beweis für eine Variante des Sphärensatzes.

Ein Spezialfall des oben erwähnten Problems ist die Frage, ob eine vorgegebene Kähler-Mannigfaltigkeit M eine Kähler-Einstein-Metrik besitzt. Eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Kähler-Einstein-Metrik ist, daß die erste Chern-Klasse ein Vielfaches der Kähler-Klasse ist. Ist die erste Chern-Klasse nicht-positiv, so ist diese Bedingung nach einem Satz von S.T. Yau [44] auch hinreichend. Ist dagegen die erste Chern-Klasse positiv, so gibt es weitere Hindernisse. Ein solches Hindernis für die Existenz einer Kähler-Einstein-Metrik ist die Futaki-Invariante, die in [15] eingeführt wurde. Ist die Futaki-Invariante von 0 verschieden, so besitzt M keine Kähler-Einstein-Metrik. Neben der Futaki-Invariante gibt es jedoch noch andere Hindernisse für die Existenz einer Kähler-Einstein-Metrik. So hat G. Tian [40] Kähler-Mannigfaltigkeiten konstruiert, die kein holomorphes Vektorfeld besitzen, aber dennoch keine Kähler-Einstein-Metrik zulassen. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer Kähler-Einstein-Metrik wurde von S. Mori [27] sowie von Y.T. Siu und S.T. Yau [37] angegeben. Sie konnten zeigen, daß jede Kähler-Mannigfaltigkeit mit positiver holomorpher Bischnittkrümmung biholomorph zu $\mathbb{CP}^n$ ist, insbesondere also eine Kähler-Einstein-Metrik besitzt.

In Kapitel 2 benutzen wir eine Evolutionsgleichung, um einen neuen Beweis des Uniformisierungssatzes für Flächen mit Rand zu geben. In Abschnitt 2.2 betrachten wir eine Anfangsmetrik, für die der Rand ∂M geodätisch ist. Wir deformieren die Metrik gemäß

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -(R - \overline{R})g$$

in M, wobei ∂M geodätisch gehalten wird. Wir zeigen, daß diese Gleichung eine eindeutige Lösung besitzt, die für alle Zeiten $t \geq 0$ definiert ist. Für $t \to \infty$ konvergiert die Metrik exponentiell gegen eine Metrik mit konstanter Gauß-Krümmung im Innern und verschwindender geodätischer Krümmung am Rand. In Abschnitt 2.3 betrachten wir eine Anfangsmetrik, für die M flach ist. In diesem Fall deformieren wir die Metrik gemäß

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2(H - \overline{H})g$$

auf ∂M, wobei M flach gehalten wird. Auch in diesem Fall zeigen wir, daß die Gleichung eine eindeutige Lösung besitzt, die für alle Zeiten $t \geq 0$ definiert ist. Für $t \to \infty$ konvergiert die Metrik exponentiell gegen eine Metrik mit konstanter geodätischer Krümmung am Rand und verschwindender Gauß-Krümmung im Innern.

Der Beweis besteht aus folgenden Schritten: Zuerst beweisen wir, daß die Gleichung eine Lösung für kurze Zeiten besitzt. Im zweiten Schritt zeigen wir, daß der Konformfaktor beschränkt ist. Dies gelingt im Fall $\chi(M) \leq 0$ mit Hilfe des Maximumprinzips, im Fall $\chi(M) > 0$ mit dem Spiegelungsprinzip von Alexandrov (siehe auch [5]). Im nächsten Schritt leiten wir eine L^2-Schranke für die Krümmung her. Dieses Ergebnis kann man benutzen, um L^p-Abschätzungen für die Krümmung zu beweisen. Daraus folgt, daß die Lösung für alle Zeiten $t \geq 0$ existiert. Daneben erhalten wir einen neuen Beweis einer Ungleichung von N. Trudinger [41] und J. Moser [28]. Im letzten Schritt zeigen wir, daß die Lösung exponentiell konvergiert. Dies ist im Fall $\chi(M) \leq 0$ einfach. Der Fall $\chi(M) > 0$ ist komplizierter, da die linearisierte Gleichung einen verschwindenden Eigenwert besitzt. Es stellt sich jedoch heraus, daß die Lösung nach genügend langer Zeit näherungsweise orthogonal auf diesem Eigenraum steht. Dieser Umstand ermöglicht es, die exponentielle Konvergenz der Lösung auch im Fall $\chi(M) > 0$ zu beweisen.

In Kapitel 3 erweitern wir die Methoden aus Kapitel 2 auf den höherdimensionalen Fall. Auf diese Weise zeigen wir zwei Verallgemeinerungen der Yamabe-Vermutung für Mannigfaltigkeiten mit Rand. Während das statische Problem bereits von J.F. Escobar [13, 14] untersucht wurde, sind wir vor allem an dem zugehörigen dynamischen Problem interessiert. In Abschnitt 3.3 beginnen wir mit einer Anfangsmetrik, für die ∂M verschwindende mittlere Krümmung hat. Wir deformieren die Metrik gemäß

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -(R - \overline{R})g$$

in M, wobei die mittlere Krümmung von ∂M gleich 0 gehalten wird. Ähnlich wie in Kapitel 2 zeigen wir, daß die Gleichung eine eindeutige Lösung besitzt, die für alle Zeiten $t \geq 0$ definiert ist. Wir können außerdem zeigen, daß die Metrik für $t \to \infty$ gegen eine Metrik mit konstanter Skalarkrümmung und verschwindender mittlerer Krümmung konvergiert. In Abschnitt 3.4 beginnen wir mit einer Anfangsmetrik, für die M verschwindende Skalarkrümmung hat. In diesem Fall deformieren wir die Metrik gemäß

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2(H - \overline{H})g$$

auf ∂M, wobei die Skalarkrümmung von M gleich 0 gehalten wird. Auch in diesem Fall kann man zeigen, daß die Gleichung eine eindeutige Lösung besitzt, die für alle Zeiten $t \geq 0$ definiert ist. Wir können außerdem zeigen, daß die Metrik für $t \to \infty$ gegen eine Metrik mit konstanter mittlerer Krümmung und verschwindender Skalarkrümmung konvergiert. In Abschnitt 3.5 versuchen wir, die Ergebnisse von Abschnitt 3.4 auf den asymptotisch flachen Fall zu übertragen (vgl. [7]).

Die Beweise lehnen sich an die aus Kapitel 2 an. Der Fall $n \geq 3$ unterscheidet sich von dem Fall $n = 2$ dadurch, daß die Integrale

$$\int_M R\,dV$$

bzw.

$$\int_{\partial M} H\,dA$$

nicht konstant sind. Es stellt sich heraus, daß die beiden Evolutionsgleichungen im wesentlichen die Gradientenflüsse zu diesen Funktionalen sind.

In Kapitel 4 schließlich diskutieren wir den Ricci-Fluß auf Kähler-Flächen mit positiver holomorpher Bischnittkrümmung. Unter einer Annahme über den Injektivitätsradius von M zeigen wir, daß die Lösungen exponentiell gegen eine Kähler-Einstein-Metrik konvergieren.

Nicht nur die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Herrn Professor Huisken. Er hat sich viel Zeit für zahllose Gespräche genommen, aus denen ich viel gelernt habe. Seine Hinweise und Ratschläge waren von größtem Wert für mich. Vor allem im Anfangsstadium der Arbeit, als Herr Huisken längere Zeit in Amerika war, hat mir Herr Dr. Loose viel geholfen. Auch ihm möchte ich daher sehr danken. Herrn Professor Chen bin ich für mehrere Diskussionen während seines Besuchs in Tübingen zu Dank verpflichtet.

Diese Arbeit hätte ich nicht so früh vorlegen können, wenn ich nicht von vielen Leuten oft sehr intensiv gefördert worden wäre. Einige davon möchte ich an dieser Stelle namentlich nennen: meinen Lehrer Dr. J. Nill, der mir die Augen für die Schönheit der Mathematik geöffnet hat, sowie die Professoren und Dozenten G. Betsch, W. Dittrich, P. Grabmayr, C. Hering, R. Nagel, U. Schlotterbeck, P. Schmid, M. Voit und M. Wolff, die es mir gestattet haben, schon während der Schulzeit an ihren Übungen und Seminaren teilzunehmen. Herr Professor Nagel hat mich außerdem schon früh in seine Arbeitsgruppe aufgenommen und bei meiner Diplomarbeit betreut. Sehr viel Zeit hat mir Herr Professor Dittrich gewidmet. Er hat das Interesse an der Theoretischen Physik bei mir geweckt. Herr Dr. Stangler hat mir geholfen, manche bürokratische Hürde zu überwinden. Ihnen allen danke ich sehr.

Für finanzielle Förderung danke ich der Studienstiftung des deutschen Volkes und der Deutschen Forschungsgemeinschaft.

Kapitel 2

Krümmungsflüsse auf Flächen

2.1 Die Evolutionsgleichungen

Es sei M eine kompakte Fläche mit einer Riemannschen Metrik g. Wir bezeichnen mit R die Skalarkrümmung von M und mit $\overline{R}$ den Mittelwert der Skalarkrümmung von M. In Dimension 2 ist die Skalarkrümmung das Doppelte der Gauß-Krümmung von M. Für eine Fläche mit Rand bezeichnen wir mit H die geodätische Krümmung von ∂M und mit $\overline{H}$ ihren Mittelwert. Der Ricci-Fluß ist dann gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -(R - \overline{R}) g. \tag{2.1}$$

Dann gilt:

2.1 Theorem. *Es sei M eine geschlossene Fläche. Dann besitzt das Anfangswertproblem (2.1) für jede Anfangsmetrik eine eindeutige Lösung, die für alle $t \geq 0$ definiert ist. Für $t \to \infty$ konvergiert die Lösung gegen eine Metrik konstanter Gauß-Krümmung.*

Dieses Resultat wurde von R. Hamilton [19] und B. Chow [11] bewiesen. Andere Beweise wurden von J. Bartz, M. Struwe und R. Ye [5] sowie von M. Struwe [38] vorgelegt. Auf geschlossenen Flächen versucht man, Metriken konstanter Gauß-Krümmung zu konstruieren. Auf Flächen mit Rand kann man verlangen, daß die Gauß-Krümmung im Innern konstant ist und die geodätische Krümmung am Rand verschwindet. Alternativ kann man fordern, daß die geodätische Krümmung am Rand konstant ist und die Gauß-Krümmung im Innern verschwindet.

Die entsprechenden Evolutionsgleichungen sind

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -(R - \overline{R})g \tag{2.2}$$

in M und

$$H = 0$$

auf ∂M bzw.

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2(H - \overline{H})g \tag{2.3}$$

auf ∂M und

$$R = 0$$

in M. Dann gilt:

2.2 Theorem. *Es sei M eine kompakte Fläche mit Rand ∂M. Dann besitzt das Anfangsrandwertproblem (2.2) für jede Anfangsmetrik eine eindeutige Lösung, die für alle $t \geq 0$ definiert ist. Für $t \to \infty$ konvergiert die Lösung gegen eine Metrik mit konstanter Gauß-Krümmung und verschwindender geodätischer Krümmung. Ebenso besitzt das Anfangsrandwertproblem (2.3) für jede Anfangsmetrik eine eindeutige Lösung, die für alle $t \geq 0$ definiert ist. Für $t \to \infty$ konvergiert die Lösung gegen eine Metrik mit konstanter geodätischer Krümmung und verschwindender Gauß-Krümmung.*

Zwischen den Gleichungen (2.2) und (2.3) besteht eine interessante Analogie. Dies wird deutlich, wenn man die Gauß-Bonnet-Formel

$$\int_M R \, dA + 2 \int_{\partial M} H \, ds = 4\pi\chi(M)$$

betrachtet. Im ersten Fall trägt nur die Gauß-Krümmung von M zu der Summe bei, im zweiten Fall nur die geodätische Krümmung von ∂M. Wir werden versuchen, diese Analogie auch in den Beweisen zum Ausdruck zu bringen.

Wir weisen darauf hin, daß ähnliche Evolutionsgleichungen von B. Osgood, R. Phillips und P. Sarnak [30] untersucht wurden. Die dort betrachteten Evolutionsgleichungen besitzen eine schwächere Nichtlinearität. Dieser Vorteil wird jedoch mit dem Nachteil erkauft, daß man eine Hintergrundmetrik einführen muß und dadurch die Invarianz unter Diffeomorphismen verliert.

2.2 Der Fall verschwindender geodätischer Krümmung

Es sei M eine kompakte Fläche mit Rand ∂M. Wir zeigen zunächst, daß es in jeder konformen Klasse eine Metrik mit verschwindender geodätischer Krümmung gibt, deren Gauß-Krümmung überall dasselbe Vorzeichen hat. Um dies zu zeigen, beginnen wir mit einer beliebigen Metrik g_0. Es sei u eine Lösung des Randwertproblems

$$\Delta_0 u = \frac{R_0}{2} - \frac{2\pi\chi(M)}{A_0}$$

in M und

$$\frac{\partial}{\partial\nu_0} u = -H_0$$

auf ∂M. Da nach der Gauß-Bonnet-Formel

$$\int_M \Big(\frac{R_0}{2} - \frac{2\pi\chi(M)}{A_0}\Big)\, dA_0 = -\int_{\partial M} H_0\, ds_0$$

ist, besitzt diese Gleichung eine Lösung. Setzt man $g = e^{2u} g_0$, so ergibt sich

$$R = e^{-2u}(-2\,\Delta_0 u + R_0) = e^{-2u}\,\frac{4\pi\chi(M)}{A_0}$$

in M und

$$H = e^{-u}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu_0} u + H_0\Big) = 0$$

auf ∂M (siehe auch Proposition 3.5). Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir studieren im folgenden das Anfangsrandwertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -(R - \overline{R}) g$$

in M mit der Randbedingung

$$H = 0$$

auf ∂M. Wir zeigen zunächst, daß diese Gleichung eine Lösung für kurze Zeiten besitzt. Der Einfachheit halber betrachten wir die unnormalisierte Gleichung.

2.3 Proposition. *Das Anfangsrandwertproblem*

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -Rg$$

in M und

$$H = 0$$

auf ∂M besitzt eine Lösung auf einem kleinen Zeitintervall.

Beweis: Wir schreiben $g = e^{2u} g_0$, wobei g_0 die Anfangsmetrik bezeichnet. Auf diese Weise erhält man das Anfangsrandwertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t} u = e^{-2u} \Delta_0 u - e^{-2u} \frac{R_0}{2}$$

in M,

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0} u = 0$$

auf ∂M und

$$u = 0$$

für $t = 0$. Diese Gleichung ist parabolisch, und besitzt daher eine Lösung auf einem kleinen Zeitintervall.

2.4 Lemma. *Der Konformfaktor ist beschränkt.*

Beweis: Wir unterscheiden drei Fälle:

(a) Ist $\chi(M) < 0$, so gibt es eine Metrik g_0 in der konformen Klasse mit $R_0 < 0$ und $H_0 = 0$. Setzt man $g = e^{2u} g_0$, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} u = e^{-2u} \Delta_0 u - (e^{-2u} \frac{R_0}{2} - \frac{\overline{R}}{2})$$

in M und

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0} u = 0$$

auf ∂M. Da $R_0 < 0$ ist, folgt aus dem Maximumprinzip, daß die Funktion u beschränkt ist.

(b) Ist $\chi(M) = 0$, so gibt es eine Metrik g_0 in der konformen Klasse mit $R_0 = 0$ und $H_0 = 0$. Setzt man $g = e^{2u} g_0$, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} u = e^{-2u} \Delta_0 u$$

in M und

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0} u = 0$$

auf ∂M. Nach dem Maximumprinzip ist u beschränkt.

(c) Ist schließlich $\chi(M) > 0$, so ist M konform äquivalent zu S^2_+. Durch eine Spiegelung kann man die Metrik auf ganz S^2 fortsetzen. Wir schreiben $g = e^{2u} g_0$, wobei g_0 die Standardmetrik auf S^2 bezeichnet. Wir zeigen mit Hilfe des Spiegelungsprinzips von Alexandrov (siehe [16]), daß u beschränkt ist. Dazu betrachten wir einen beliebigen Punkt auf S^2. Wir wählen eine konforme Abbildung von S^2 nach R^2, unter der dieser Punkt ins Unendliche abgebildet wird. Die Funktion e^{2u} besitzt eine asymptotische Entwicklung der Form

$$e^{2u} = a + \sum_i \frac{b_i x_i}{|x|^2} + \dots$$

für $x \to \infty$, wobei a eine positive reelle Zahl ist. Schreibt man $g_{ij} = e^{2w} \delta_{ij}$, so gilt

$$e^{2w} = \frac{4a}{|x|^4} + \sum_i \frac{4 b_i x_i}{|x|^6} + \dots$$

für $|x| \to \infty$. Wir spiegeln die Funktion w an der Geraden $\{x_1 = \lambda\}$, und erhalten eine Funktion w_λ. Die Funktion w erfüllt die Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} w = e^{-2w} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} w + \frac{\overline{R}}{2}.$$

Ebenso erfüllt die Funktion w_λ die Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} w_\lambda = e^{-2w_\lambda} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} w_\lambda + \frac{\overline{R}}{2}.$$

Wir wählen nun λ so groß, daß zur Zeit $t = 0$

$$w \geq w_\lambda$$

für alle $x_1 \leq \lambda$ ist. Die asymptotische Entwicklung für w garantiert, daß es ein λ mit dieser Eigenschaft gibt. Nach dem Maximumprinzip bleibt diese Beziehung richtig für alle Zeiten $t \geq 0$. Somit gilt

$$w \geq w_\lambda$$

für alle $x_1 \leq \lambda$ und alle $t \geq 0$. Insbesondere gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} e^{2w} \leq 0$$

für $x_1 = \lambda$ und alle $t \geq 0$. Aus der asymptotischen Entwicklung für e^{2w} folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} e^{2w} = -\frac{16 a x_1}{|x|^6} + \frac{4 b_1}{|x|^6} - \sum_i \frac{24 b_i x_i x_1}{|x|^8} + \ldots$$

für $|x| \to \infty$. Für $x_1 = \lambda$ gilt daher

$$\frac{\partial}{\partial x_1} e^{2w} = -\frac{16 a \lambda}{|x|^6} + \frac{4 b_1}{|x|^6} - \sum_i \frac{24 b_i x_i \lambda}{|x|^8} + \ldots$$

für $|x| \to \infty$. Folglich ist

$$-4a\lambda + b_1 \leq 0,$$

und damit

$$\frac{b_1}{a} \leq 4\lambda.$$

Für den Gradienten von u im Unendlichen gilt daher

$$\overset{0}{\nabla}_1 u \leq 2\lambda.$$

Somit gilt

$$\overset{0}{\nabla}_i u \leq C$$

für $i = 1, 2$. Folglich ist die Funktion u beschränkt auf S^2.

Wir betrachten nun das folgende Energiefunktional, das in [30] eingeführt wurde. Wir schreiben $g = e^{2u} g_0$, wobei g_0 eine Metrik mit $H_0 = 0$ sein soll. Wir definieren ein Funktional $E[u]$ durch

$$E[u] = \frac{1}{2} \int_M |\overset{0}{\nabla} u|^2 \, dA_0 + \frac{1}{2} \int_M R_0 u \, dA_0 - \pi \chi(M) \log \int_M e^{2u} \, dA_0.$$

Das Funktional $E[u]$ stimmt bis auf eine additive Konstante mit $\log\det\Delta$ überein, wobei $\Delta = e^{-2u}\Delta_0$ der Laplace-Operator mit Dirichlet-Randbedingung ist. Es stellt sich heraus, daß das Funktional $E[u]$ unter der Evolutionsgleichung (2.2) monoton fallend ist.

2.5 Lemma. *Für das Funktional $E[u]$ gilt*

$$\frac{d}{dt}E[u] = -\frac{1}{4}\int_M (R-\overline{R})^2\,dA.$$

Beweis: Wir berechnen zunächst die erste Variation von $E[u]$. Mit Hilfe der Gauß-Bonnet-Formel erhält man

$$\begin{aligned}
\delta E[u] &= \int_M \overset{0}{\nabla} u\cdot \overset{0}{\nabla}\delta u\,dA_0 + \frac{1}{2}\int_M R_0\,\delta u\,dA_0 - \frac{2\pi\chi(M)}{A}\int_M \delta u\,dA \\
&= \int_M \overset{0}{\nabla} u\cdot \overset{0}{\nabla}\delta u\,dA_0 + \frac{1}{2}\int_M R_0\,\delta u\,dA_0 - \frac{1}{2}\int_M \overline{R}\,\delta u\,dA \\
&= -\int_M \Delta_0 u\,\delta u\,dA_0 + \frac{1}{2}\int_M R_0\,\delta u\,dA_0 - \frac{1}{2}\int_M \overline{R}\,\delta u\,dA \\
&= -\int_M e^{-2u}\Delta_0 u\,\delta u\,dA + \frac{1}{2}\int_M e^{-2u}R_0\,\delta u\,dA - \frac{1}{2}\int_M \overline{R}\,\delta u\,dA \\
&= \frac{1}{2}\int_M R\,\delta u\,dA - \frac{1}{2}\int_M \overline{R}\,\delta u\,dA \\
&= \frac{1}{2}\int_M (R-\overline{R})\,\delta u\,dA.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, daß

$$\frac{\partial}{\partial\nu_0}u = 0$$

auf ∂M ist. Unter der Evolutionsgleichung (2.2) ändert sich $E[u]$ also gemäß

$$\frac{d}{dt}E[u] = -\frac{1}{4}\int_M (R-\overline{R})^2\,dA.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

2.6 Lemma. *Die Gauß-Krümmung erfüllt die Evolutionsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t}R = \Delta R + R(R-\overline{R})$$

in M mit der Randbedingung

$$\frac{\partial}{\partial \nu} R = 0$$

auf ∂M.

Beweis: Es sei g_0 eine feste Metrik mit $H_0 = 0$. Wir schreiben $g = e^{2u} g_0$. Dann gilt

$$R = e^{-2u}(-2\,\Delta_0 u + R_0)$$

in M und

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0} u = 0$$

auf ∂M. Differenziert man beide Gleichungen nach t, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \Delta R + R(R - \overline{R})$$

in M und

$$\frac{\partial}{\partial \nu} R = 0$$

auf ∂M.

2.7 Lemma. *Die Gauß-Krümmung ist beschränkt in $L^2(M)$.*

Beweis: Im folgenden setzen wir $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p(M)}$ und $\|\cdot\|_{r,p} = \|\cdot\|_{W^{r,p}(M)}$. Nach Lemma 2.5 gilt

$$\frac{d}{dt} E[u] = -\frac{1}{4} \int_M (R - \overline{R})^2 \, dA.$$

Da die Funktion u nach Lemma 2.4 beschränkt ist, folgt aus der Formel für $E[u]$

$$E[u] \geq -C.$$

Also ist

$$\int_{T-1}^{T} \int_M (R - \overline{R})^2 \, dA \, dt \leq C,$$

und damit

$$\int_{T-1}^{T} \int_M R^2 \, dA \, dt \leq C.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\int_M |R|^p \, dA\right] &= p \int_M \operatorname{sign}(R)\, |R|^{p-1} \frac{\partial}{\partial t} R \, dA \\
&\quad - \int_M |R|^p \,(R - \overline{R})\, dA \\
&= -p \int_M \operatorname{sign}(R)\, |R|^{p-1}\, \Delta R \, dA \\
&\quad + (p-1) \int_M |R|^p \,(R - \overline{R})\, dA \\
&= -p(p-1) \int_M |R|^{p-2}\, |\nabla R|^2 \, dA \\
&\quad + (p-1) \int_M |R|^p \,(R - \overline{R})\, dA \\
&= -\frac{4(p-1)}{p} \int_M \left|\nabla |R|^{\frac{p}{2}}\right|^2 dA \\
&\quad + (p-1) \int_M |R|^p \,(R - \overline{R})\, dA
\end{aligned}$$

für alle $p \geq 2$. Wir verwenden nun die Abschätzung

$$\left\| |R|^{\frac{p}{2}} \right\|_{1,2}^2 \leq C \int_M \left|\nabla |R|^{\frac{p}{2}}\right|^2 dA + \left\| |R|^{\frac{p}{2}} \right\|_2^2.$$

Mit der Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung (siehe [2], p. 60) erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|R\|_p^p &\leq -\frac{1}{C}\left\| |R|^{\frac{p}{2}} \right\|_{1,2}^2 + C\|R\|_{p+1}^{p+1} + C \\
&\leq -\frac{1}{C}\left\| |R|^{\frac{p}{2}} \right\|_{1,2}^2 + C\left\| |R|^{\frac{p}{2}} \right\|_{\frac{2(p+1)}{p}}^{\frac{2(p+1)}{p}} + C \\
&\leq -\frac{1}{C}\left\| |R|^{\frac{p}{2}} \right\|_{1,2}^2 + C\left\| |R|^{\frac{p}{2}} \right\|_{1,2}^{2-\frac{2(q-1)}{p}} \left\| |R|^{\frac{p}{2}} \right\|_{\frac{2q}{p}}^{\frac{2q}{p}} + C \\
&\leq -\frac{1}{C}\left\| |R|^{\frac{p}{2}} \right\|_{1,2}^2 + C\left\| |R|^{\frac{p}{2}} \right\|_{1,2}^{2-\frac{2(q-1)}{p}} \|R\|_q^q + C,
\end{aligned}$$

und damit

$$\frac{d}{dt}\|R\|_p^p \leq C\|R\|_q^{\frac{qp}{q-1}} + C$$

für alle $q \leq p \leq 2q$. Wir setzen nun $p = q = 2$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\|R\|_2^2 \leq C\|R\|_2^4 + C.$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dt}\log(\|R\|_2^2 + 1) \leq C\|R\|_2^2 + C.$$

Andererseits gilt

$$\int_{T-1}^{T} \|R\|_2^2 \, dt \leq C.$$

Folglich ist

$$\|R\|_2^2 \leq C$$

zur Zeit T. Da T beliebig war, ist die Behauptung bewiesen.

2.8 Lemma. *Die Gauß-Krümmung ist beschränkt in $L^p(M)$ für alle $p \geq 2$.*

Beweis: Für alle $q \leq p \leq 2q$ gilt

$$\frac{d}{dt}\|R\|_p^p \leq -\frac{1}{C}\left\||R|^{\frac{p}{2}}\right\|_{1,2}^2 + C\left\||R|^{\frac{p}{2}}\right\|_{1,2}^{2-\frac{2(q-1)}{p}} \|R\|_q^q + C.$$

Ist $\|R\|_q$ beschränkt, so erhält man

$$\frac{d}{dt}\|R\|_p^p \leq -\frac{1}{C}\left\||R|^{\frac{p}{2}}\right\|_{1,2}^2 + C\left\||R|^{\frac{p}{2}}\right\|_{1,2}^{2-\frac{2(q-1)}{p}} + C.$$

Folglich ist auch $\|R\|_p$ beschränkt. Ist also $\|R\|_q$ beschränkt, so ist auch $\|R\|_p$ beschränkt für alle $q \leq p \leq 2q$. Die Behauptung folgt nun durch Induktion.

Wie in Abschnitt 3.3 kann man Abschätzungen für die höheren Ableitungen von u beweisen:

2.9 Proposition. *Die Funktion u ist beschränkt in $W^{2r,p}(M)$ für alle $r \geq 0$ und $p \geq 2$.*

Hieraus folgt unmittelbar:

2.10 Korollar. *Die Evolutionsgleichung (2.2) besitzt eine eindeutige Lösung, die für alle $t \geq 0$ definiert ist.*

Wir untersuchen nun das Verhalten der Lösung für $t \to \infty$.

2.11 Proposition. *Die Differenz $R - \overline{R}$ konvergiert gegen 0 in $W^{2r,2}(M)$ für alle $r \geq 0$.*

Beweis: Es gilt

$$\int_0^\infty \int_M (R - \overline{R})^2 \, dA \, dt \leq C.$$

Zusammen mit der Schranke an die höheren Ableitungen folgt daraus, daß der Ausdruck

$$\int_M (R - \overline{R})^2 \, dA$$

gegen 0 konvergiert. Also konvergiert $R - \overline{R}$ gegen 0 in $L^2(M)$. Weiterhin gilt

$$\|R - \overline{R}\|_{2r,2} \leq C \, \|R - \overline{R}\|_{2s,2}^{\frac{r}{s}} \, \|R - \overline{R}\|_2^{1-\frac{r}{s}}$$

für alle $0 \leq r \leq s$. Folglich konvergiert $R - \overline{R}$ auch in $W^{2r,2}(M)$ gegen 0.

Als Folgerung erhalten wir einen neuen Beweis für eine Ungleichung von N. Trudinger [41] und J. Moser [28] (siehe auch E. Onofris Arbeit [29]).

2.12 Korollar. *Das Funktional $E[u]$ ist minimal, wenn die Metrik $g = e^{2u} g_0$ konstante Gauß-Krümmung besitzt. Insbesondere ist das Funktional $E[u]$ nach unten beschränkt.*

Beweis: Für das Funktional $E[u]$ gilt

$$\delta E[u] = \frac{1}{2} \int_M (R - \overline{R}) \, \delta u \, dA.$$

Insbesondere gilt

$$\delta E[u] = 0,$$

wenn $g = e^{2u} g_0$ konstante Gauß-Krümmung hat. Andererseits ist aber der Raum der Metriken auf S^2_+ mit konstanter Gauß-Krümmung wegzusammenhängend. Folglich nimmt das Funktional $E[u]$ für jede Metrik $g = e^{2u} g_0$

mit konstanter Gauß-Krümmung den gleichen Wert an. Dieser Wert werde mit α bezeichnet.

Wir betrachten nun eine beliebige Metrik in der konformen Klasse. Diese Metrik verwenden wir als Anfangsmetrik in der Evolutionsgleichung (2.2). Nach Proposition 2.9 ist die Funktion u beschränkt in $W^{2r,2}(M)$ für alle $r \geq 0$. Es gibt daher eine Folge von Zeitpunkten t_k sowie eine glatte Funktion v, so daß

$$\lim_{k \to \infty} t_k = \infty$$

und

$$\lim_{k \to \infty} u(t_k) = v$$

in $W^{2,2}(M)$ ist. Daraus folgt

$$\lim_{k \to \infty} E[u(t_k)] = E[v].$$

Aus Proposition 2.11 folgt, daß die Metrik $h = e^{2v} g_0$ konstante Gauß-Krümmung besitzt. Also ist $E[v] = \alpha$, und damit

$$\lim_{k \to \infty} E[u(t_k)] = \alpha.$$

Nach Lemma 2.5 ist das Funktional $E[u]$ unter der Evolutionsgleichung (2.2) monoton fallend. Für die Anfangsmetrik gilt daher

$$E[u(0)] \geq \alpha.$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn die Anfangsmetrik konstante Gauß-Krümmung besitzt.

Wir zeigen schließlich, daß die Differenz $R - \overline{R}$ sogar exponentiell gegen 0 konvergiert. Im Fall $\chi(M) \leq 0$ ist dies trivial. Der Fall $\chi(M) > 0$ ist allerdings komplizierter, da die linearisierte Gleichung einen verschwindenden Eigenwert besitzt. Wir nehmen im folgenden immer an, daß $\chi(M) > 0$ ist. Wir beweisen zunächst einige Hilfssätze:

2.13 Lemma. *Für jede Metrik g in der konformen Klasse und jedes holomorphe Vektorfeld X mit $X \cdot \nu = 0$ auf ∂M gilt*

$$\int_M (R - \overline{R}) \, \nabla \cdot X \, dA = 0.$$

Beweis: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = (\varphi_t)_* X$$

mit der Anfangsbedingung

$$\varphi_0 = \mathrm{id}.$$

Diese Differentialgleichung kann als eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Lie-Gruppe der konformen Diffeomorphismen von M aufgefaßt werden. Insbesondere besitzt sie eine Lösung, die für kleine t definiert ist. Man kann leicht zeigen, daß sich diese Lösung zu einer Lösung fortsetzen läßt, die für alle t definiert ist. Wir bezeichnen diese Lösung mit φ_t. Wir setzen außerdem $\widetilde{X}_t = (\varphi_t)_* X$ und $\widetilde{g}_t = (\varphi_t)_* g$. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{g} = -L_{\widetilde{X}}\widetilde{g}.$$

Also ist

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{g}_{ij} = -\widetilde{\nabla}_i \widetilde{X}_j - \widetilde{\nabla}_j \widetilde{X}_i.$$

Da die Abbildungen φ_t konforme Diffeomorphismen sind, sind die Metriken $\widetilde{g}$ alle konform äquivalent. Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{g} = -(\widetilde{\nabla}\cdot\widetilde{X})\,\widetilde{g}.$$

Schreibt man $\widetilde{g} = e^{2\widetilde{u}} g_0$, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{u} = -\frac{1}{2}\,(\widetilde{\nabla}\cdot\widetilde{X}).$$

Für das Funktional $E[\widetilde{u}]$ gilt

$$\frac{d}{dt}E[\widetilde{u}] = \frac{1}{2}\int_M (\widetilde{R} - \overline{R})\,\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{u}\,d\widetilde{A}.$$

Also ist

$$\frac{d}{dt}E[\widetilde{u}] = -\frac{1}{4}\int_M (\widetilde{R} - \overline{R})\,\widetilde{\nabla}\cdot\widetilde{X}\,d\widetilde{A}.$$

Da $\widetilde{X}_t = (\varphi_t)_* X$ und $\widetilde{g}_t = (\varphi_t)_* g$ ist, bekommt man schließlich

$$\frac{d}{dt}E[\widetilde{u}] = -\frac{1}{4}\int_M (R - \overline{R})\,\nabla\cdot X\,dA.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite hängt nicht von t ab. Da $E[\widetilde{u}]$ nach unten beschränkt ist, muß

$$\int_M (R - \overline{R})\, \nabla\cdot X \, dA = 0$$

sein.

2.14 Lemma. *Es sei g eine Metrik in der konformen Klasse und ψ eine Funktion mit*

$$\Delta\psi = \lambda\psi$$

in M und

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\psi = 0$$

auf ∂M. Wir nehmen an, daß die Funktion $R - \overline{R}$ und ihre Ableitungen genügend klein sind. Wir nehmen außerdem an, daß λ nahe bei $-\overline{R}$ ist. Dann gibt es ein holomorphes Vektorfeld X mit $X \cdot \nu = 0$ auf ∂M und

$$\int_M (\psi - \nabla\cdot X)^2 \, dA \leq \delta \int_M \psi^2 \, dA.$$

Beweis: Wir dürfen ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\overline{R} = 2$ ist. Angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es eine Folge von Metriken g_k und eine Folge von Funktionen ψ_k mit folgenden Eigenschaften: Für die Metriken g_k gilt

$$\lim_{k\to\infty} R_k = 2.$$

Die Funktionen ψ_k erfüllen die Gleichung

$$\Delta_k \psi_k = \lambda_k \psi_k$$

in M und

$$\frac{\partial}{\partial\nu_k}\psi = 0$$

auf ∂M. Für jedes holomorphe Vektorfeld X mit $X \cdot \nu = 0$ auf ∂M gilt

$$\int_M (\psi_k - \nabla\cdot X)^2 \, dA_k \geq \delta \int_M \psi_k^2 \, dA_k.$$

Durch Umskalierung erhält man Funktionen ψ_k mit

$$\int_M \psi_k \, dA_k = 0,$$
$$\int_M \psi_k^2 \, dA_k = 1,$$
$$\int_M |\nabla \psi_k|^2 \, dA_k = -\lambda_k.$$

Für jedes holomorphe Vektorfeld X mit $X \cdot \nu = 0$ auf ∂M gilt dann

$$\int_M (\psi_k - \nabla \cdot X)^2 \, dA_k \geq \delta.$$

Durch Übergang zu einer Teilfolge kann man erreichen, daß die Metriken g_k gegen eine Metrik g konvergieren. Wir dürfen außerdem annehmen, daß die Funktionen ψ_k gegen eine Funktion ψ stark in $L^2(M)$ und schwach in $W^{1,2}(M)$ konvergieren. Für die Metrik g gilt

$$R = 2.$$

Für die Funktion ψ gilt

$$\int_M \psi \, dA = 0,$$
$$\int_M \psi^2 \, dA = 1,$$
$$\int_M |\nabla \psi|^2 \, dA \leq 2.$$

Schließlich gilt

$$\int_M (\psi - \nabla \cdot X)^2 \, dA \geq \delta$$

für jedes holomorphe Vektorfeld X mit $X \cdot \nu = 0$ auf ∂M. Da $R = 2$ ist, ist die Mannigfaltigkeit M isometrisch zu S^2_+. In einem geeigneten Koordinatensystem gilt also

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

und

$$g = \begin{pmatrix} \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Die Funktion ψ läßt sich dann in der Form

$$\psi = -\frac{8ax}{1+x^2+y^2} - \frac{8by}{1+x^2+y^2}$$

darstellen, wobei a und b geeignete reelle Zahlen sind. Setzt man

$$X = a \begin{pmatrix} 1-x^2+y^2 \\ -2xy \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2xy \\ 1+x^2-y^2 \end{pmatrix},$$

so ist X ein holomorphes Vektorfeld mit $X \cdot \nu = 0$ auf ∂M und

$$\nabla \cdot X = \psi.$$

Das ist ein Widerspruch!

2.15 Lemma. *Es sei g eine Metrik in der konformen Klasse und ψ eine Funktion mit*

$$\Delta \psi = \lambda \psi$$

in M und

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \psi = 0$$

auf ∂M. Wir nehmen an, daß die Funktion $R - \overline{R}$ und ihre Ableitungen genügend klein sind. Wir nehmen außerdem an, daß λ nahe bei $-\overline{R}$ ist. Dann gilt

$$\left[\int_M (R-\overline{R})\, \psi \, dA\right]^2 \leq \delta \left[\int_M (R-\overline{R})^2 \, dA\right] \left[\int_M \psi^2 \, dA\right].$$

Beweis: Nach Lemma 2.14 gibt es ein holomorphes Vektorfeld X mit $X \cdot \nu = 0$ auf ∂M, so daß

$$\int_M (\psi - \nabla \cdot X)^2 \, dA \leq \delta \int_M \psi^2 \, dA$$

ist. Aufgrund von Lemma 2.13 gilt dann

$$\begin{aligned} \left[\int_M (R-\overline{R})\, \psi \, dA\right]^2 &= \left[\int_M (R-\overline{R})\, (\psi - \nabla \cdot X) \, dA\right]^2 \\ &\leq \left[\int_M (R-\overline{R})^2 \, dA\right] \left[\int_M (\psi - \nabla \cdot X)^2 \, dA\right] \\ &\leq \delta \left[\int_M (R-\overline{R})^2 \, dA\right] \left[\int_M \psi^2 \, dA\right]. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Nach diesen Vorbereitungen zeigen wir nun, daß jede Lösung der Evolutionsgleichung (2.2) exponentiell gegen eine Metrik mit konstanter Gauß-Krümmung konvergiert.

2.16 Proposition. *Die Differenz $R - \overline{R}$ konvergiert exponentiell gegen* 0 *in* $W^{2r,2}(M)$ *für alle* $r \geq 0$.

Beweis: Es genügt, den Fall $\chi(M) > 0$ zu betrachten. Nach Proposition 2.11 konvergiert die Differenz $R - \overline{R}$ gegen 0. Um die exponentielle Konvergenz zu beweisen, betrachten wir die Evolutionsgleichung für $R - \overline{R}$. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}(R - \overline{R}) = \Delta(R - \overline{R}) + \overline{R}(R - \overline{R}) + (R - \overline{R})^2$$

in M und

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(R - \overline{R}) = 0$$

auf ∂M. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\int_M (R - \overline{R})^2 \, dA\right] = 2 \int_M (R - \overline{R}) \, \Delta(R - \overline{R}) \, dA \\ + 2\overline{R} \int_M (R - \overline{R})^2 \, dA \\ + \int_M (R - \overline{R})^3 \, dA.\end{aligned}$$

Ist t genügend groß, so ist die Funktion $R - \overline{R}$ ebenso wie ihre Ableitungen sehr klein. Folglich liegt der erste Eigenwert des Laplace-Operators nahe bei $-\overline{R}$ und der zweite nahe bei $-3\overline{R}$. Wir schreiben $R - \overline{R} = \psi + \sigma$, wobei ψ die orthogonale Projektion von $R - \overline{R}$ auf den ersten Eigenraum des Laplace-Operators bezeichnet. Nach Lemma 2.15 gilt

$$\left[\int_M (R - \overline{R}) \, \psi \, dA\right]^2 \leq \delta \left[\int_M (R - \overline{R})^2 \, dA\right] \left[\int_M \psi^2 \, dA\right].$$

Also ist

$$\left[\int_M \psi^2 \, dA\right]^2 \leq \delta \left[\int_M (R - \overline{R})^2 \, dA\right] \left[\int_M \psi^2 \, dA\right],$$

und damit

$$\int_M \psi^2 \, dA \leq \delta \int_M (R - \overline{R})^2 \, dA.$$

Folglich ist

$$\int_M \sigma^2 \, dA \geq (1 - \delta) \int_M (R - \overline{R})^2 \, dA.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\int_M (R - \overline{R}) \, \Delta(R - \overline{R}) \, dA &= \int_M \psi \, \Delta\psi \, dA + \int_M \sigma \, \Delta\sigma \, dA \\
&\leq \int_M \sigma \, \Delta\sigma \, dA \\
&\leq -(3 - \delta)\overline{R} \int_M \sigma^2 \, dA \\
&\leq -(3 - 4\delta)\overline{R} \int_M (R - \overline{R})^2 \, dA.
\end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis oben ein, so erhält man

$$\frac{d}{dt}\left[\int_M (R - \overline{R})^2 \, dA\right] \leq -(4 - 8\delta)\overline{R} \int_M (R - \overline{R})^2 \, dA.$$

Folglich konvergiert der Ausdruck

$$\int_M (R - \overline{R})^2 \, dA$$

exponentiell gegen 0. Also konvergiert $R - \overline{R}$ exponentiell gegen 0 in $L^2(M)$. Weiterhin gilt

$$\|R - \overline{R}\|_{2r,2} \leq C \, \|R - \overline{R}\|_{2s,2}^{\frac{r}{s}} \, \|R - \overline{R}\|_2^{1-\frac{r}{s}}$$

für alle $0 \leq r \leq s$. Folglich konvergiert $R - \overline{R}$ auch in $W^{2r,2}(M)$ exponentiell gegen 0.

2.3 Der Fall verschwindender Gauß-Krümmung

Es sei M eine kompakte Fläche mit Rand ∂M. Wir zeigen zunächst, daß es in jeder konformen Klasse eine Metrik mit verschwindender Gauß-Krümmung gibt, deren geodätische Krümmung überall dasselbe Vorzeichen hat. Um dies zu zeigen, beginnen wir mit einer beliebigen Metrik g_0. Es sei u eine Lösung des Randwertproblems

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0} u = -H_0 + \frac{2\pi\chi(M)}{L_0}$$

auf ∂M und

$$\Delta_0 u = \frac{R_0}{2}$$

in M. Da nach der Gauß-Bonnet-Formel

$$\int_{\partial M} \Big(- H_0 + \frac{2\pi\chi(M)}{L_0} \Big)\, ds_0 = \int_M \frac{R_0}{2}\, dA_0$$

ist, besitzt diese Gleichung eine Lösung. Setzt man $g = e^{2u} g_0$, so ergibt sich

$$H = e^{-u} \Big(\frac{\partial}{\partial \nu_0} u + H_0 \Big) = e^{-u}\, \frac{2\pi\chi(M)}{L_0}$$

auf ∂M und

$$R = e^{-2u} (-2\, \Delta_0 u + R_0) = 0$$

in M (siehe auch Proposition 3.5). Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir studieren im folgenden das Anfangsrandwertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2(H - \overline{H}) g$$

auf ∂M und

$$R = 0$$

in M. Wir zeigen zunächst, daß diese Gleichung eine Lösung für kurze Zeiten besitzt. Der Einfachheit halber betrachten wir die unnormalisierte Gleichung.

2.17 Proposition. *Das Anfangsrandwertproblem*

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2Hg$$

auf ∂M *und*

$$R = 0$$

in M *besitzt eine Lösung auf einem kleinen Zeitintervall.*

Beweis: Wir schreiben $g = e^{2u} g_0$, wobei g_0 die Anfangsmetrik bezeichnet. Auf diese Weise erhält man das Anfangsrandwertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t} u = -e^{-u} \, \frac{\partial}{\partial \nu_0} u - e^{-u} \, H_0$$

auf ∂M,

$$\Delta_0 u = 0$$

in M und

$$u = 0$$

für $t = 0$. Wir zeigen, daß diese Gleichung eine Lösung auf einem kleinen Zeitintervall besitzt (vgl. [31]). Dazu setzen wir $W^m = W^{m,2}(\partial M \times [0,1])$. Wir definieren eine Abbildung $\mathcal{F} : W^{m+1} \to W^m$ durch

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\partial}{\partial t} u + e^{-u} \, \frac{\partial}{\partial \nu_0} u + e^{-u} \, H_0$$

auf ∂M. Dabei sei

$$\Delta_0 u = 0$$

in M und

$$u = 0$$

für $t = 0$. Wir wählen eine glatte Funktion w mit der Eigenschaft, daß die Zeitableitungen der Funktion $\mathcal{F}(w)$ an der Stelle $t = 0$ bis zur Ordnung m verschwinden. Das Differential von $\mathcal{F}$ in w ist gegeben durch

$$D\mathcal{F}_w(v) = \frac{\partial}{\partial t} v + e^{-w} \, \frac{\partial}{\partial \nu_0} v - e^{-w} (\frac{\partial}{\partial \nu_0} w + H_0) v$$

auf ∂M, wobei

$$\Delta_0 v = 0$$

in M und

$$v = 0$$

für $t = 0$ sein soll. Wir behaupten, daß die Abbildung $D\mathcal{F}_w : W^{m+1} \to W^m$ bijektiv ist. Die Injektivität ist klar. Um die Surjektivität zu zeigen, betrachten wir eine beliebige Funktion $g \in W^m$. Wir suchen eine Funktion $v \in W^{m+1}$

mit $D\mathfrak{F}_w(v) = g$. Die Funktion v muß also das lineare Anfangsrandwertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -e^{-w}\frac{\partial}{\partial \nu_0}v + e^{-w}(\frac{\partial}{\partial \nu_0}w + H_0)v + g$$

auf ∂M,

$$\Delta_0 v = 0$$

in M und

$$v = 0$$

für $t = 0$ erfüllen. Mit Hilfe der Variationsmethode kann man zeigen, daß diese Gleichung eine schwache Lösung besitzt. Wir zeigen, daß $v \in W^{m+1}$ und

$$\|v\|_{W^{m+1}} \leq C\|g\|_{W^m}$$

ist. Dazu nehmen wir an, daß $v \in W^m$ und

$$\|v\|_{W^m} \leq C\|g\|_{W^{m-1}}$$

ist. Wir definieren einen linearen Operator T durch

$$T\phi = e^{-w}\frac{\partial}{\partial \nu_0}\phi$$

auf ∂M, wobei

$$\Delta_0 \phi = 0$$

in M sein soll. Dann gilt

$$\|\frac{\partial}{\partial t}v + Tv\|_{W^m} \leq C\|g\|_{W^m}.$$

Daraus folgt

$$\|\frac{\partial}{\partial t}T^m(1+aT)^{-1}v + T^{m+1}(1+aT)^{-1}v\|_{W^0} \leq C\|g\|_{W^m}.$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$v_a = (1+aT)^{-1}v.$$

Dann gilt

$$\|\frac{\partial}{\partial t}T^m v_a + T^{m+1}v_a\|_{W^0} \leq C\|g\|_{W^m}.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_{\partial M} e^w \, \frac{\partial}{\partial t}T^m v_a \, T^{m+1}v_a \, dA_0 \, dt \\
&= \int_0^1 \int_{\partial M} \frac{\partial}{\partial t}T^m v_a \, \frac{\partial}{\partial \nu_0}T^m v_a \, dA_0 \, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{\partial M} T^m v_a \, \frac{\partial}{\partial \nu_0}T^m v_a \, dA_0 \, dt \Big|_{t=0}^{t=1} \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_{\partial M} e^w (T^{m+1}v_a)^2 \, dA_0 \, dt \\
&\leq \int_0^1 \int_{\partial M} e^w (\frac{\partial}{\partial t}T^m v_a + T^{m+1}v_a) \, T^{m+1}v_a \, dA_0 \, dt.
\end{aligned}$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_{\partial M} e^w (T^{m+1}v_a)^2 \, dA_0 \, dt \\
&\leq \int_0^\infty \int_{\partial M} e^w (\frac{\partial}{\partial t}T^m v_a + T^{m+1}v_a)^2 \, dA_0 \, dt,
\end{aligned}$$

und damit

$$\|T^{m+1}v_a\|_{W^0} \leq \|\frac{\partial}{\partial t}T^m v_a + T^{m+1}v_a\|_{W^0}.$$

Kombiniert man die beiden Abschätzungen, so bekommt man

$$\|T^{m+1}v_a\|_{W^0} \leq C\|g\|_{W^m}.$$

Läßt man $a \to 0$ gehen, so erhält man $T^{m+1}v \in W^0$ und

$$\|T^{m+1}v\|_{W^0} \leq C\|g\|_{W^m}.$$

Hieraus kann man schließen, daß $v \in W^{m+1}$ und

$$\|v\|_{W^{m+1}} \leq C\|g\|_{W^m}$$

ist. Damit ist die Surjektivität gezeigt.

Nach dem Satz über inverse Funktionen ist $\mathcal{F}$ eine bijektive Abbildung von einer Umgebung von v auf eine Umgebung von g. Da die Zeitableitungen von $\mathcal{F}(w)$ an der Stelle $t = 0$ bis zur Ordnung m verschwinden, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $f \in W^m$ mit $f = 0$ für $0 \leq t \leq \delta$ und $\|\mathcal{F}(w) - f\|_{W^m} \leq \varepsilon$. Da die Abbildung $\mathcal{F}$ bijektiv ist, gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $u \in W^{m+1}$ mit $\|\mathcal{F}(u) - f\|_{W^m} = 0$. Die Funktion u ist dann eine Lösung des Anfangsrandwertproblems für $0 \leq t \leq \delta$. Wenn wir m genügend groß wählen, dann folgt aus $u \in W^{m+1}$ bereits die Glattheit von u.

2.18 Lemma. *Der Konformfaktor ist beschränkt.*

Beweis: Wir unterscheiden drei Fälle:

(a) Ist $\chi(M) < 0$, so gibt es eine Metrik g_0 in der konformen Klasse mit $H_0 < 0$ und $R_0 = 0$. Setzt man $g = e^{2u} g_0$, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} u = -e^{-u} \frac{\partial}{\partial \nu_0} u - (e^{-u} H_0 - \overline{H})$$

auf ∂M und

$$\Delta_0 u = 0$$

in M. Da $H_0 < 0$ ist, folgt aus dem Maximumprinzip, daß die Funktion u beschränkt ist.

(b) Ist $\chi(M) = 0$, so gibt es eine Metrik g_0 in der konformen Klasse mit $H_0 = 0$ und $R_0 = 0$. Setzt man $g = e^{2u} g_0$, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} u = -e^{-u} \frac{\partial}{\partial \nu_0} u$$

auf ∂M und

$$\Delta_0 u = 0$$

in M. Nach dem Maximumprinzip ist u beschränkt.

(c) Ist schließlich $\chi(M) > 0$, so ist M konform äquivalent zu B^2. Wir schreiben $g = e^{2u} g_0$, wobei g_0 die Standardmetrik auf B^2 bezeichnet. Wir zeigen mit Hilfe des Spiegelungsprinzips von Alexandrov (siehe [16]), daß u beschränkt ist. Dazu betrachten wir einen beliebigen Punkt auf dem Rand von B^2. Wir wählen eine konforme Abbildung von B^2 nach $H^2 = \{x_2 \geq 0\}$, unter der dieser Punkt ins Unendliche abgebildet wird. Die Funktion e^{2u} besitzt eine asymptotische Entwicklung der Form

$$e^{2u} = a + \sum_i \frac{b_i x_i}{|x|^2} + \dots$$

für $x \to \infty$, wobei a eine positive reelle Zahl ist. Schreibt man $g_{ij} = e^{2w}\delta_{ij}$, so gilt

$$e^{2w} = \frac{4a}{|x|^4} + \sum_i \frac{4b_i x_i}{|x|^6} + \dots$$

für $|x| \to \infty$. Wir spiegeln die Funktion w an der Geraden $\{x_1 = \lambda\}$, und erhalten eine Funktion w_λ. Die Funktion w erfüllt die Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} w = e^{-w} \frac{\partial}{\partial x_2} w + \overline{H}$$

auf ∂H^2 und

$$\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} w = 0$$

in H^2. Ebenso erfüllt die Funktion w_λ die Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} w_\lambda = e^{-w_\lambda} \frac{\partial}{\partial x_2} w_\lambda + \overline{H}$$

auf ∂H^2 und

$$\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} w_\lambda = 0$$

in H^2. Wir wählen nun λ so groß, daß zur Zeit $t = 0$

$$w \geq w_\lambda$$

für alle $x_1 \leq \lambda$ ist. Die asymptotische Entwicklung für w garantiert, daß es ein λ mit dieser Eigenschaft gibt. Nach dem Maximumprinzip bleibt diese Beziehung richtig für alle Zeiten $t \geq 0$. Somit gilt

$$w \geq w_\lambda$$

für alle $x_1 \leq \lambda$ und alle $t \geq 0$. Insbesondere gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} e^{2w} \leq 0$$

für $x_1 = \lambda$ und alle $t \geq 0$. Aus der asymptotischen Entwicklung für e^{2w} folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} e^{2w} = -\frac{16 a x_1}{|x|^6} + \frac{4 b_1}{|x|^6} - \sum_i \frac{24 b_i x_i x_1}{|x|^8} + \dots$$

für $|x| \to \infty$. Für $x_1 = \lambda$ gilt daher

$$\frac{\partial}{\partial x_1} e^{2w} = -\frac{16 a \lambda}{|x|^6} + \frac{4 b_1}{|x|^6} - \sum_i \frac{24 b_i x_i \lambda}{|x|^8} + \dots$$

für $|x| \to \infty$. Folglich ist

$$-4a\lambda + b_1 \leq 0,$$

und damit

$$\frac{b_1}{a} \leq 4\lambda.$$

Für den Gradienten von u im Unendlichen gilt daher

$$\overset{0}{\nabla}_1 u \leq 2\lambda.$$

Folglich ist die Funktion u beschränkt auf ∂B^2.

Wir betrachten nun das folgende Energiefunktional, das in [30] eingeführt wurde. Wir schreiben $g = e^{2u} g_0$, wobei g_0 eine Metrik mit $R_0 = 0$ sein soll. Wir definieren ein Funktional $E[u]$ durch

$$E[u] = \frac{1}{2} \int_M |\overset{0}{\nabla} u|^2 \, dA_0 + \int_{\partial M} H_0 u \, ds_0 - 2\pi \chi(M) \, \log \int_{\partial M} e^u \, ds_0.$$

Das Funktional $E[u]$ stimmt bis auf eine additive Konstante mit $\log \det \Delta$ überein, wobei $\Delta = e^{-2u} \Delta_0$ der Laplace-Operator mit Dirichlet-Randbedingung ist. Es stellt sich heraus, daß das Funktional $E[u]$ unter der Evolutionsgleichung (2.3) monoton fallend ist.

2.19 Lemma. *Für das Funktional $E[u]$ gilt*

$$\frac{d}{dt}E[u] = -\int_{\partial M}(H-\overline{H})^2\,ds.$$

Beweis: Wir berechnen zunächst die erste Variation von $E[u]$. Mit Hilfe der Gauß-Bonnet-Formel erhält man

$$\begin{aligned}
\delta E[u] &= \int_M \overset{0}{\nabla} u\cdot\overset{0}{\nabla}\delta u\,dA_0 + \int_{\partial M} H_0\,\delta u\,ds_0 - \frac{2\pi\chi(M)}{L}\int_{\partial M}\delta u\,ds \\
&= \int_M \overset{0}{\nabla} u\cdot\overset{0}{\nabla}\delta u\,dA_0 + \int_{\partial M} H_0\,\delta u\,ds_0 - \int_{\partial M}\overline{H}\,\delta u\,ds \\
&= \int_{\partial M}\frac{\partial}{\partial\nu_0}u\,\delta u\,ds_0 + \int_{\partial M} H_0\,\delta u\,ds_0 - \int_{\partial M}\overline{H}\,\delta u\,ds \\
&= \int_{\partial M} e^{-u}\frac{\partial}{\partial\nu_0}u\,\delta u\,ds + \int_{\partial M} e^{-u}H_0\,\delta u\,ds - \int_{\partial M}\overline{H}\,\delta u\,ds \\
&= \int_{\partial M} H\,\delta u\,ds - \int_{\partial M}\overline{H}\,\delta u\,ds \\
&= \int_{\partial M}(H-\overline{H})\,\delta u\,ds.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, daß

$$\Delta_0 u = 0$$

in M ist. Unter der Evolutionsgleichung (2.3) ändert sich $E[u]$ also gemäß

$$\frac{d}{dt}E[u] = -\int_{\partial M}(H-\overline{H})^2\,ds.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

2.20 Lemma. *Die geodätische Krümmung erfüllt die Evolutionsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t}H = -\frac{\partial}{\partial\nu}H + H(H-\overline{H})$$

auf ∂M. Dabei muß die Funktion H so fortgesetzt werden, daß

$$\Delta H = 0$$

in M gilt.

Beweis: Es sei g_0 eine feste Metrik mit $R_0 = 0$. Wir schreiben $g = e^{2u} g_0$. Dann gilt

$$H = e^{-u}(\frac{\partial}{\partial \nu_0} u + H_0)$$

auf ∂M und

$$\Delta_0 u = 0$$

in M. Differenziert man beide Gleichungen nach t, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} H = -\frac{\partial}{\partial \nu} H + H(H - \overline{H})$$

auf ∂M und

$$\Delta H = 0$$

in M.

2.21 Lemma. *Die geodätische Krümmung ist beschränkt in $L^2(\partial M)$.*

Beweis: Im folgenden setzen wir $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p(\partial M)}$ und $\|\cdot\|_{r,p} = \|\cdot\|_{W^{r,p}(\partial M)}$. Nach Lemma 2.19 gilt

$$\frac{d}{dt} E[u] = -\int_{\partial M} (H - \overline{H})^2 \, ds.$$

Da die Funktion u nach Lemma 2.18 beschränkt ist, folgt aus der Formel für $E[u]$

$$E[u] \geq -C.$$

Also ist

$$\int_{T-1}^{T} \int_{\partial M} (H - \overline{H})^2 \, ds \, dt \leq C,$$

und damit

$$\int_{T-1}^{T} \int_{\partial M} H^2 \, ds \, dt \leq C.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\int_{\partial M} |H|^p \, ds\right] &= p\int_{\partial M} \operatorname{sign}(H)\,|H|^{p-1}\,\frac{\partial}{\partial t} H\,ds \\
&\quad - \int_{\partial M} |H|^p\,(H-\overline{H})\,ds \\
&= -p\int_{\partial M} \operatorname{sign}(H)\,|H|^{p-1}\,\frac{\partial}{\partial \nu_0} H\,ds \\
&\quad + (p-1)\int_{\partial M} |H|^p\,(H-\overline{H})\,ds \\
&= -p(p-1)\int_{M} |H|^{p-2}\,|\nabla H|^2\,dA \\
&\quad + (p-1)\int_{\partial M} |H|^p\,(H-\overline{H})\,ds \\
&= -\frac{4(p-1)}{p}\int_{M} \left|\nabla |H|^{\frac{p}{2}}\right|^2 dA \\
&\quad + (p-1)\int_{\partial M} |H|^p\,(H-\overline{H})\,ds
\end{aligned}$$

für alle $p \geq 2$. Wir verwenden nun die Abschätzung

$$\left\||H|^{\frac{p}{2}}\right\|_{\frac{1}{2},2}^2 \leq C\int_M \left|\nabla |H|^{\frac{p}{2}}\right|^2 dA + \left\||H|^{\frac{p}{2}}\right\|_2^2$$

(siehe [39], p. 27). Mit der Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung (siehe [2], p. 60) erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|H\|_p^p &\leq -\frac{1}{C}\left\||H|^{\frac{p}{2}}\right\|_{\frac{1}{2},2}^2 + C\|H\|_{p+1}^{p+1} + C \\
&\leq -\frac{1}{C}\left\||H|^{\frac{p}{2}}\right\|_{\frac{1}{2},2}^2 + C\left\||H|^{\frac{p}{2}}\right\|_{\frac{2(p+1)}{p}}^{\frac{2(p+1)}{p}} + C \\
&\leq -\frac{1}{C}\left\||H|^{\frac{p}{2}}\right\|_{\frac{1}{2},2}^2 + C\left\||H|^{\frac{p}{2}}\right\|_{\frac{1}{2},2}^{2-\frac{2(q-1)}{p}}\left\||H|^{\frac{p}{2}}\right\|_{\frac{2q}{p}}^{\frac{2q}{p}} + C \\
&\leq -\frac{1}{C}\left\||H|^{\frac{p}{2}}\right\|_{\frac{1}{2},2}^2 + C\left\||H|^{\frac{p}{2}}\right\|_{\frac{1}{2},2}^{2-\frac{2(q-1)}{p}}\|H\|_q^q + C,
\end{aligned}$$

und damit

$$\frac{d}{dt}\|H\|_p^p \leq C\|H\|_q^{\frac{qp}{q-1}} + C$$

für alle $q \leq p \leq 2q$. Wir setzen nun $p = q = 2$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\|H\|_2^2 \leq C\|H\|_2^4 + C.$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dt}\log(\|H\|_2^2+1) \leq C\|H\|_2^2 + C.$$

Andererseits gilt

$$\int_{T-1}^{T} \|H\|_2^2\,dt \leq C.$$

Folglich ist

$$\|H\|_2^2 \leq C$$

zur Zeit T. Da T beliebig war, ist die Behauptung bewiesen.

2.22 Lemma. *Die geodätische Krümmung ist beschränkt in $L^p(\partial M)$ für alle $p \geq 2$.*

Beweis: Für alle $q \leq p \leq 2q$ gilt

$$\frac{d}{dt}\|H\|_p^p \leq -\frac{1}{C}\left\||H|^{\frac{p}{2}}\right\|_{\frac{1}{2},2}^2 + C\left\||H|^{\frac{p}{2}}\right\|_{\frac{1}{2},2}^{2-\frac{2(q-1)}{p}} \|H\|_q^q + C.$$

Ist $\|H\|_q$ beschränkt, so erhält man

$$\frac{d}{dt}\|H\|_p^p \leq -\frac{1}{C}\left\||H|^{\frac{p}{2}}\right\|_{\frac{1}{2},2}^2 + C\left\||H|^{\frac{p}{2}}\right\|_{\frac{1}{2},2}^{2-\frac{2(q-1)}{p}} + C.$$

Folglich ist auch $\|H\|_p$ beschränkt. Ist also $\|H\|_q$ beschränkt, so ist auch $\|H\|_p$ beschränkt für alle $q \leq p \leq 2q$. Die Behauptung folgt nun durch Induktion.

Wie in Abschnitt 3.4 kann man Abschätzungen für die höheren Ableitungen von u beweisen:

2.23 Proposition. *Die Funktion u ist beschränkt in $W^{r,p}(\partial M)$ für alle $r \geq 0$ und $p \geq 2$.*

Hieraus folgt unmittelbar:

2.24 Korollar. *Die Evolutionsgleichung (2.3) besitzt eine eindeutige Lösung, die für alle $t \geq 0$ definiert ist.*

Wir untersuchen nun das Verhalten der Lösung für $t \to \infty$.

2.25 Proposition. *Die Differenz* $H - \overline{H}$ *konvergiert gegen* 0 *in* $W^{r,2}(\partial M)$ *für alle* $r \geq 0$.

Beweis: Es gilt

$$\int_0^\infty \int_{\partial M} (H - \overline{H})^2 \, ds \, dt \leq C.$$

Zusammen mit der Schranke an die höheren Ableitungen folgt daraus, daß der Ausdruck

$$\int_{\partial M} (H - \overline{H})^2 \, ds$$

gegen 0 konvergiert. Also konvergiert $H - \overline{H}$ gegen 0 in $L^2(\partial M)$. Weiterhin gilt

$$\|H - \overline{H}\|_{r,2} \leq C \, \|H - \overline{H}\|_{s,2}^{\frac{r}{s}} \, \|H - \overline{H}\|_2^{1-\frac{r}{s}}$$

für alle $0 \leq r \leq s$. Folglich konvergiert $H - \overline{H}$ auch in $W^{r,2}(\partial M)$ gegen 0.

Als Folgerung erhalten wir die folgende Aussage.

2.26 Korollar. *Das Funktional* $E[u]$ *ist minimal, wenn die Metrik* $g = e^{2u} g_0$ *konstante geodätische Krümmung besitzt. Insbesondere ist das Funktional* $E[u]$ *nach unten beschränkt.*

Beweis: Für das Funktional $E[u]$ gilt

$$\delta E[u] = \int_{\partial M} (H - \overline{H}) \, \delta u \, ds.$$

Insbesondere gilt

$$\delta E[u] = 0,$$

wenn $g = e^{2u} g_0$ konstante geodätische Krümmung hat. Andererseits ist aber der Raum der Metriken auf B^2 mit konstanter geodätischer Krümmung wegzusammenhängend. Folglich nimmt das Funktional $E[u]$ für jede Metrik $g = e^{2u} g_0$ mit konstanter geodätischer Krümmung den gleichen Wert an.

Dieser Wert werde mit α bezeichnet.

Wir betrachten nun eine beliebige Metrik in der konformen Klasse. Diese Metrik verwenden wir als Anfangsmetrik in der Evolutionsgleichung (2.3). Nach Proposition 2.23 ist die Funktion u beschränkt in $W^{r,2}(\partial M)$ für alle $r \geq 0$. Es gibt daher eine Folge von Zeitpunkten t_k sowie eine glatte Funktion v, so daß

$$\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$$

und

$$\lim_{k\to\infty} u(t_k) = v$$

in $W^{1,2}(\partial M)$ ist. Daraus folgt

$$\lim_{k\to\infty} E[u(t_k)] = E[v].$$

Aus Proposition 2.25 folgt, daß die Metrik $h = e^{2v} g_0$ konstante geodätische Krümmung besitzt. Also ist $E[v] = \alpha$, und damit

$$\lim_{k\to\infty} E[u(t_k)] = \alpha.$$

Nach Lemma 2.19 ist das Funktional $E[u]$ unter der Evolutionsgleichung (2.3) monoton fallend. Für die Anfangsmetrik gilt daher

$$E[u(0)] \geq \alpha.$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn die Anfangsmetrik konstante geodätische Krümmung besitzt.

Wir zeigen schließlich, daß die Differenz $H - \overline{H}$ sogar exponentiell gegen 0 konvergiert. Im Fall $\chi(M) \leq 0$ ist dies trivial. Der Fall $\chi(M) > 0$ ist allerdings komplizierter, da die linearisierte Gleichung einen verschwindenden Eigenwert besitzt. Wir nehmen im folgenden immer an, daß $\chi(M) > 0$ ist. Wir beweisen zunächst einige Hilfssätze:

2.27 Lemma. *Für jede Metrik g in der konformen Klasse und jedes holomorphe Vektorfeld X mit $X \cdot \nu = 0$ auf ∂M gilt*

$$\int_{\partial M} (H - \overline{H})\, \nabla \cdot X \, ds = 0.$$

Beweis: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = (\varphi_t)_* X$$

mit der Anfangsbedingung

$$\varphi_0 = \mathrm{id}.$$

Diese Differentialgleichung kann als eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Lie-Gruppe der konformen Diffeomorphismen von M aufgefaßt werden. Insbesondere besitzt sie eine Lösung, die für kleine t definiert ist. Man kann leicht zeigen, daß sich diese Lösung zu einer Lösung fortsetzen läßt, die für alle t definiert ist. Wir bezeichnen diese Lösung mit φ_t. Wir setzen außerdem $\widetilde{X}_t = (\varphi_t)_* X$ und $\widetilde{g}_t = (\varphi_t)_* g$. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{g} = -L_{\widetilde{X}}\widetilde{g}.$$

Also ist

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{g}_{ij} = -\widetilde{\nabla}_i\widetilde{X}_j - \widetilde{\nabla}_j\widetilde{X}_i.$$

Da die Abbildungen φ_t konforme Diffeomorphismen sind, sind die Metriken $\widetilde{g}$ alle konform äquivalent. Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{g} = -(\widetilde{\nabla}\cdot\widetilde{X})\,\widetilde{g}.$$

Schreibt man $\widetilde{g} = e^{2\widetilde{u}}g_0$, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{u} = -\frac{1}{2}\,(\widetilde{\nabla}\cdot\widetilde{X}).$$

Für das Funktional $E[\widetilde{u}]$ gilt

$$\frac{d}{dt}E[\widetilde{u}] = \int_{\partial M}(\widetilde{H} - \overline{H})\,\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{u}\,d\widetilde{s}.$$

Also ist

$$\frac{d}{dt}E[\widetilde{u}] = -\frac{1}{2}\int_{\partial M}(\widetilde{H} - \overline{H})\,\widetilde{\nabla}\cdot\widetilde{X}\,d\widetilde{s}.$$

Da $\widetilde{X}_t = (\varphi_t)_* X$ und $\widetilde{g}_t = (\varphi_t)_* g$ ist, bekommt man schließlich

$$\frac{d}{dt}E[\widetilde{u}] = -\frac{1}{2}\int_{\partial M}(H - \overline{H})\,\nabla\cdot X\,ds.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite hängt nicht von t ab. Da $E[\widetilde{u}]$ nach unten beschränkt ist, muß

$$\int_{\partial M} (H - \overline{H})\, \nabla \cdot X \, ds = 0$$

sein.

2.28 Lemma. *Es sei g eine Metrik in der konformen Klasse und ψ eine Funktion mit*

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \psi = \lambda \psi$$

auf ∂M und

$$\Delta \psi = 0$$

in M. Wir nehmen an, daß die Funktion $H - \overline{H}$ und ihre Ableitungen genügend klein sind. Wir nehmen außerdem an, daß λ nahe bei $\overline{H}$ ist. Dann gibt es ein holomorphes Vektorfeld X mit $X \cdot \nu = 0$ auf ∂M und

$$\int_{\partial M} (\psi - \nabla \cdot X)^2 \, ds \leq \delta \int_{\partial M} \psi^2 \, ds.$$

Beweis: Wir dürfen ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\overline{H} = 1$ ist. Angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es eine Folge von Metriken g_k und eine Folge von Funktionen ψ_k mit folgenden Eigenschaften: Für die Metriken g_k gilt

$$\lim_{k \to \infty} H_k = 1.$$

Die Funktionen ψ_k erfüllen die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \nu_k} \psi_k = \lambda_k \psi_k$$

auf ∂M und

$$\Delta_k \psi_k = 0$$

in M. Für jedes holomorphe Vektorfeld X mit $X \cdot \nu = 0$ auf ∂M gilt

$$\int_{\partial M} (\psi_k - \nabla \cdot X)^2 \, ds_k \geq \delta \int_{\partial M} \psi_k^2 \, ds_k.$$

Durch Umskalierung erhält man Funktionen ψ_k mit

$$\int_{\partial M} \psi_k \, ds_k = 0,$$
$$\int_{\partial M} \psi_k^2 \, ds_k = 1,$$
$$\int_M |\nabla \psi_k|^2 \, dA_k = \lambda_k.$$

Für jedes holomorphe Vektorfeld X mit $X \cdot \nu = 0$ auf ∂M gilt dann

$$\int_{\partial M} (\psi_k - \nabla \cdot X)^2 \, ds_k \geq \delta.$$

Durch Übergang zu einer Teilfolge kann man erreichen, daß die Metriken g_k gegen eine Metrik g konvergieren. Wir dürfen außerdem annehmen, daß die Funktionen ψ_k gegen eine Funktion ψ stark in $L^2(\partial M)$ und schwach in $W^{1,2}(M)$ konvergieren. Für die Metrik g gilt

$$H = 1.$$

Für die Funktion ψ gilt

$$\int_{\partial M} \psi \, ds = 0,$$
$$\int_{\partial M} \psi^2 \, ds = 1,$$
$$\int_M |\nabla \psi|^2 \, dA \leq 1.$$

Schließlich gilt

$$\int_{\partial M} (\psi - \nabla \cdot X)^2 \, ds \geq \delta$$

für jedes holomorphe Vektorfeld X mit $X \cdot \nu = 0$ auf ∂M. Da $H = 1$ ist, ist die Mannigfaltigkeit M isometrisch zu B^2. In einem geeigneten Koordinatensystem gilt also

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

und

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Funktion ψ läßt sich dann in der Form

$$\psi = -4ax - 4by$$

darstellen, wobei a und b geeignete reelle Zahlen sind. Setzt man

$$X = a \begin{pmatrix} 1 - x^2 + y^2 \\ -2xy \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2xy \\ 1 + x^2 - y^2 \end{pmatrix},$$

so ist X ein holomorphes Vektorfeld mit $X \cdot \nu = 0$ auf ∂M und

$$\nabla \cdot X = \psi.$$

Das ist ein Widerspruch!

2.29 Lemma. *Es sei g eine Metrik in der konformen Klasse und ψ eine Funktion mit*

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \psi = \lambda \psi$$

auf ∂M und

$$\Delta \psi = 0$$

in M. Wir nehmen an, daß die Funktion $H - \overline{H}$ und ihre Ableitungen genügend klein sind. Wir nehmen außerdem an, daß λ nahe bei $\overline{H}$ ist. Dann gilt

$$\left[\int_{\partial M} (H - \overline{H})\, \psi \, ds \right]^2 \leq \delta \left[\int_{\partial M} (H - \overline{H})^2 \, ds \right] \left[\int_{\partial M} \psi^2 \, ds \right].$$

Beweis: Nach Lemma 2.28 gibt es ein holomorphes Vektorfeld X mit $X \cdot \nu = 0$ auf ∂M, so daß

$$\int_{\partial M} (\psi - \nabla \cdot X)^2 \, ds \leq \delta \int_{\partial M} \psi^2 \, ds$$

ist. Aufgrund von Lemma 2.27 gilt dann

$$\begin{aligned} \left[\int_{\partial M} (H - \overline{H})\, \psi \, ds \right]^2 &= \left[\int_{\partial M} (H - \overline{H})\, (\psi - \nabla \cdot X) \, ds \right]^2 \\ &\leq \left[\int_{\partial M} (H - \overline{H})^2 \, ds \right] \left[\int_{\partial M} (\psi - \nabla \cdot X)^2 \, ds \right] \\ &\leq \delta \left[\int_{\partial M} (H - \overline{H})^2 \, ds \right] \left[\int_{\partial M} \psi^2 \, ds \right]. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Nach diesen Vorbereitungen zeigen wir nun, daß jede Lösung der Evolutionsgleichung (2.3) exponentiell gegen eine Metrik mit konstanter geodätischer Krümmung konvergiert.

2.30 Proposition. *Die Differenz $H - \overline{H}$ konvergiert exponentiell gegen* 0 *in* $W^{r,2}(\partial M)$ *für alle* $r \geq 0$.

Beweis: Es genügt, den Fall $\chi(M) > 0$ zu betrachten. Nach Proposition 2.25 konvergiert die Differenz $H - \overline{H}$ gegen 0. Um die exponentielle Konvergenz zu beweisen, betrachten wir die Evolutionsgleichung für $H - \overline{H}$. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}(H - \overline{H}) = -\frac{\partial}{\partial \nu}(H - \overline{H}) + \overline{H}(H - \overline{H}) + (H - \overline{H})^2$$

auf ∂M und

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(H - \overline{H}) = 0$$

in M. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\bigg[\int_{\partial M} (H - \overline{H})^2\, ds\bigg] &= -2\int_{\partial M} (H - \overline{H})\,\frac{\partial}{\partial \nu}(H - \overline{H})\, ds \\ &\quad + 2\overline{H}\int_{\partial M} (H - \overline{H})^2\, ds \\ &\quad + \int_{\partial M} (H - \overline{H})^3\, ds.\end{aligned}$$

Ist t genügend groß, so ist die Funktion $H - \overline{H}$ ebenso wie ihre Ableitungen sehr klein. Folglich liegt der erste Eigenwert des Operators $\frac{\partial}{\partial \nu}$ nahe bei $\overline{H}$ und der zweite nahe bei $2\overline{H}$. Wir schreiben $H - \overline{H} = \psi + \sigma$, wobei ψ die orthogonale Projektion von $H - \overline{H}$ auf den ersten Eigenraum des Operators $\frac{\partial}{\partial \nu}$ bezeichnet. Nach Lemma 2.29 gilt

$$\bigg[\int_{\partial M} (H - \overline{H})\,\psi\, ds\bigg]^2 \leq \delta\bigg[\int_{\partial M} (H - \overline{H})^2\, ds\bigg]\bigg[\int_{\partial M} \psi^2\, ds\bigg].$$

Also ist

$$\bigg[\int_{\partial M} \psi^2\, ds\bigg]^2 \leq \delta\bigg[\int_{\partial M} (H - \overline{H})^2\, ds\bigg]\bigg[\int_{\partial M} \psi^2\, ds\bigg],$$

und damit

$$\int_{\partial M} \psi^2 \, ds \leq \delta \int_{\partial M} (H - \overline{H})^2 \, ds.$$

Folglich ist

$$\int_{\partial M} \sigma^2 \, ds \geq (1 - \delta) \int_{\partial M} (H - \overline{H})^2 \, ds.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} (H - \overline{H}) \frac{\partial}{\partial \nu} (H - \overline{H}) \, ds &= \int_{\partial M} \psi \frac{\partial}{\partial \nu} \psi \, ds + \int_{\partial M} \sigma \frac{\partial}{\partial \nu} \sigma \, ds \\
&\geq \int_{\partial M} \sigma \frac{\partial}{\partial \nu} \sigma \, ds \\
&\geq (2 - \delta) \overline{H} \int_{\partial M} \sigma^2 \, ds \\
&\geq (2 - 3\delta) \overline{H} \int_{\partial M} (H - \overline{H})^2 \, ds.
\end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis oben ein, so erhält man

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\partial M} (H - \overline{H})^2 \, ds \right] \leq -(2 - 6\delta) \overline{H} \int_{\partial M} (H - \overline{H})^2 \, ds.$$

Folglich konvergiert der Ausdruck

$$\int_{\partial M} (H - \overline{H})^2 \, ds$$

exponentiell gegen 0. Also konvergiert $H - \overline{H}$ exponentiell gegen 0 in $L^2(\partial M)$. Weiterhin gilt

$$\|H - \overline{H}\|_{r,2} \leq C \, \|H - \overline{H}\|_{s,2}^{\frac{r}{s}} \, \|H - \overline{H}\|_2^{1 - \frac{r}{s}}$$

für alle $0 \leq r \leq s$. Folglich konvergiert $H - \overline{H}$ auch in $W^{r,2}(\partial M)$ exponentiell gegen 0.

Kapitel 3

Der Yamabe-Fluß

3.1 Definition des Yamabe-Flusses

Es sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ mit einer Riemannschen Metrik g. Wir bezeichnen wieder mit R die Skalarkrümmung von M und mit $\overline{R}$ den Mittelwert der Skalarkrümmung von M. Für eine Mannigfaltigkeit mit Rand bezeichnen wir mit H die mittlere Krümmung von ∂M und mit $\overline{H}$ ihren Mittelwert. Wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, besagt die Yamabe-Vermutung, daß in jeder konformen Klasse eine Metrik konstanter Skalarkrümmung existiert. Um eine solche Metrik zu konstruieren betrachten wir den Yamabe-Fluß

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -(R - \overline{R}) g. \tag{3.1}$$

Dann gilt:

3.1 Theorem. *Es sei M eine geschlossene Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$. Dann besitzt das Anfangswertproblem (3.1) eine eindeutige Lösung, die für alle $t \geq 0$ definiert ist.*

Um das asymptotische Verhalten der Lösungen zu untersuchen, unterscheidet man drei Fälle:

(a) In der konformen Klasse existiert eine Metrik mit negativer Skalarkrümmung.
(b) In der konformen Klasse existiert eine Metrik mit verschwindender Skalarkrümmung.

(c) In der konformen Klasse existiert eine Metrik mit positiver Skalarkrümmung.

Dann gilt:

3.2 Theorem. *Es sei M eine geschlossene Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$. Im Fall (c) nehmen wir zusätzlich an, daß M lokal konform flach ist. Dann konvergiert jede Lösung des Anfangswertproblems (3.1) gegen eine Metrik konstanter Skalarkrümmung.*

Beide Resultate wurden von R. Ye [45] bewiesen. Für Mannigfaltigkeiten mit Rand gibt es zwei natürliche Verallgemeinerungen des Yamabe-Problems. Einerseits kann man versuchen, in jeder konformen Klasse eine Metrik mit konstanter Skalarkrümmung im Innern und verschwindender mittlerer Krümmung am Rand zu finden. Andererseits kann man in jeder konformen Klasse eine Metrik mit konstanter mittlerer Krümmung am Rand und verschwindender Skalarkrümmung im Innern suchen. Diese Verallgemeinerungen des statischen Yamabe-Problems wurden von J.F. Escobar [13, 14] studiert.

Wir betrachten im folgenden das zugehörige dynamische Problem. Im ersten Fall bekommt man das Anfangsrandwertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -(R - \overline{R}) g \tag{3.2}$$

in M und

$$H = 0$$

auf ∂M. Im zweiten Fall gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2(H - \overline{H}) g \tag{3.3}$$

auf ∂M und

$$R = 0$$

in M. Wir beweisen das folgende Resultat:

3.3 Theorem. *Es sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ mit Rand ∂M. Dann besitzt das Anfangsrandwertproblem (3.2) eine eindeutige Lösung, die für alle $t \geq 0$ definiert ist. Ebenso besitzt das Anfangsrandwertproblem (3.3) eine eindeutige Lösung, die für alle $t \geq 0$ definiert ist.*

Um das asymptotische Verhalten zu analysieren, führen wir eine Fallunterscheidung durch. Im Fall von Gleichung (3.2) gibt es drei Möglichkeiten:

(Ia) In der konformen Klasse existiert eine Metrik mit negativer Skalarkrümmung und verschwindender mittlerer Krümmung.
(Ib) In der konformen Klasse existiert eine Metrik mit verschwindender Skalarkrümmung und verschwindender mittlerer Krümmung.
(Ic) In der konformen Klasse existiert eine Metrik mit positiver Skalarkrümmung und verschwindender mittlerer Krümmung.

Im Fall von Gleichung (3.3) gibt es ebenfalls drei Möglichkeiten:

(IIa) In der konformen Klasse existiert eine Metrik mit negativer mittlerer Krümmung und verschwindender Skalarkrümmung.
(IIb) In der konformen Klasse existiert eine Metrik mit verschwindender mittlerer Krümmung und verschwindender Skalarkrümmung.
(IIc) In der konformen Klasse existiert eine Metrik mit positiver mittlerer Krümmung und verschwindender Skalarkrümmung.

In Abschnitt 3.2 zeigen wir, daß stets eine der Aussagen (Ia), (Ib), (Ic) und eine der Aussagen (IIa), (IIb), (IIc) zutrifft. Es ist nicht schwer zu sehen, daß sich die Fälle (Ia), (Ib), (Ic) sowie die Fälle (IIa), (IIb), (IIc) gegenseitig ausschließen. Ein ähnliches Argument zeigt, daß die Aussagen (Ia) und (IIa) sowie (Ic) und (IIc) äquivalent sind.

3.4 Theorem. *Es sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ mit Rand ∂M. In den Fällen (Ic) und (IIc) nehmen wir zusätzlich an, daß M lokal konform flach und ∂M umbilisch ist. In diesen Fällen nehmen wir außerdem an, daß der Rand der universellen Überlagerung von M zusammenhängend ist. Dann konvergiert jede Lösung des Anfangsrandwertproblems (3.2) gegen eine Metrik mit konstanter Skalarkrümmung und verschwindender mittlerer Krümmung. Weiterhin konvergiert jede Lösung des Anfangsrandwertproblems (3.3) gegen eine Metrik mit konstanter mittlerer Krümmung und verschwindender Skalarkrümmung.*

Die Bedingung, daß ∂M umbilisch ist, besagt, daß der spurfreie Anteil der zweiten Fundamentalform verschwindet. Diese Bedingung hängt nur von der konformen Struktur ab.

Die Evolutionsgleichung (3.2) ist bis auf einen konstanten Faktor der Gradientenfluß zu dem Funktional

$$V^{-\frac{n-2}{n}} \int_M R\, dV,$$

während die Evolutionsgleichung (3.3) bis auf einen konstanten Faktor der Gradientenfluß zu dem Funktional

$$A^{-\frac{n-2}{n-1}} \int_{\partial M} H\, dA$$

ist.

3.2 Die Fallunterscheidung

Wir untersuchen zunächst, wie sich die Skalarkrümmung von M und die mittlere Krümmung von ∂M unter einer konformen Deformation der Metrik ändern.

3.5 Proposition. *Ist $g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$, so gilt*

$$R = u^{-\frac{n+2}{n-2}} \left(-\frac{4(n-1)}{n-2}\, \Delta_0 u + R_0 u \right)$$

in M und

$$H = u^{-\frac{n}{n-2}} \left(\frac{2(n-1)}{n-2}\, \frac{\partial}{\partial \nu_0} u + H_0 u \right)$$

auf ∂M.

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus [4], p. 125. Um die zweite Behauptung zu beweisen, betrachten wir zwei Vektorfelder X und Y, die tangential längs ∂M sind. Für die zweite Fundamentalform bezüglich der Metrik g gilt

$$h(X,Y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} g(X,Y) + g([X,\nu],Y) + g(X,[Y,\nu]) \right).$$

Ebenso gilt für die zweite Fundamentalform bezüglich der Metrik g_0

$$h_0(X,Y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_0} g_0(X,Y) + g_0([X,\nu_0],Y) + g_0(X,[Y,\nu_0]) \right).$$

Nach Voraussetzung gilt $g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$, und damit $\nu = u^{-\frac{2}{n-2}} \nu_0$. Daraus folgt

$$h(X,Y) = u^{-\frac{n-4}{n-2}} \left(\frac{2}{n-2} \frac{\partial}{\partial \nu_0} u \, g_0(X,Y) + u \, h_0(X,Y) \right).$$

Bildet man die Spur, so erhält man

$$H = u^{-\frac{n}{n-2}} \left(\frac{2(n-1)}{n-2} \frac{\partial}{\partial \nu_0} u + H_0 u \right).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir zeigen nun, daß jede konforme Klasse eine der Bedingungen (Ia), (Ib), (Ic) sowie eine der Bedingungen (IIa), (IIb), (IIc) erfüllt. Der Beweis lehnt sich an den Beweis von Lemma 1.1 in [35] an. Die gleiche Methode wird in [13] und [14] verwendet.

3.6 Proposition. *Für jede konforme Klasse trifft eine der Aussagen (Ia), (Ib) und (Ic) zu.*

Beweis: Wir betrachten eine beliebige Metrik g_0. Wir definieren eine lineare Abbildung L_0 durch

$$L_0 \phi = \Delta_0 \phi - \frac{n-2}{4(n-1)} R_0 \phi$$

in M mit der Randbedingung

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0} \phi + \frac{n-2}{2(n-1)} \, H_0 \phi = 0$$

auf ∂M. Sei λ der erste Eigenwert von L_0, und ψ eine Eigenfunktion von L_0 zum Eigenwert λ. Indem man ψ durch $|\psi|$ ersetzt, kann man erreichen, daß $\psi \geq 0$ in M ist. Nach dem Maximumprinzip gilt sogar $\psi > 0$ in M. Setzt man $g = \psi^{\frac{4}{n-2}} g_0$, so gilt

$$R = \psi^{-\frac{n+2}{n-2}} \left(- \frac{4(n-1)}{n-2} \, \Delta_0 \psi + R_0 \psi \right) = -\frac{4(n-1)}{n-2} \, \lambda \, \psi^{-\frac{4}{n-2}}$$

in M und

$$H = \psi^{-\frac{n}{n-2}} \left(\frac{2(n-1)}{n-2} \frac{\partial}{\partial \nu_0} \psi + H_0 \psi \right) = 0$$

auf ∂M. Am Vorzeichen von λ kann man ablesen, welcher der Fälle (Ia), (Ib) und (Ic) vorliegt.

3.7 Lemma. *Sei g_0 eine beliebige Metrik auf M. Dann besitzt jede Funktion ϕ auf ∂M eine eindeutige Fortsetzung mit*

$$\Delta_0 \phi - \frac{n-2}{4(n-1)} R_0 \phi = 0$$

in M.

Beweis: Wir konstruieren zunächst eine Metrik g in der konformen Klasse von g_0, deren Skalarkrümmung überall positiv ist. Dazu definieren wir eine lineare Abbildung B_0 durch

$$B_0 \phi = \frac{\partial}{\partial \nu_0} \phi + \frac{n-2}{2(n-1)} H_0 \phi$$

auf ∂M, wobei die Funktion ϕ so fortgesetzt wird, daß

$$\Delta_0 \phi - \frac{n-2}{4(n-1)} R_0 \phi = a \phi$$

in M ist. Man kann $a < 0$ so wählen, daß jede Funktion ϕ auf ∂M eine eindeutige Fortsetzung besitzt, die diese Bedingung erfüllt. Wir bezeichnen mit ψ die erste Eigenfunktion von B_0. Indem man ψ durch $|\psi|$ ersetzt, kann man erreichen, daß $\psi \geq 0$ in M ist. Nach dem Maximumprinzip gilt sogar $\psi > 0$ in M. Für die Metrik $g = \psi^{\frac{4}{n-2}} g_0$ gilt dann

$$R = \psi^{-\frac{n+2}{n-2}} \left(-\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_0 \psi + R_0 \psi \right) = -\frac{4(n-1)}{n-2} \, a \, \psi^{-\frac{4}{n-2}}$$

in M. Da $a < 0$ ist, hat die Metrik g positive Skalarkrümmung. Die Behauptung ist daher richtig für die Metrik g. Da g_0 konform äquivalent zu g ist, gilt die Behauptung auch für g_0.

3.8 Proposition. *Für jede konforme Klasse trifft eine der Aussagen (IIa), (IIb) und (IIc) zu.*

Beweis: Wir betrachten eine beliebige Metrik g_0. Wir definieren eine lineare Abbildung B_0 durch

$$B_0 \phi = \frac{\partial}{\partial \nu_0} \phi + \frac{n-2}{2(n-1)} H_0 \phi$$

auf ∂M, wobei ϕ so fortgesetzt werden muß, daß

$$\Delta_0 \phi - \frac{n-2}{4(n-1)} R_0 \phi = 0$$

in M ist. Sei λ der erste Eigenwert von B_0, und ψ eine Eigenfunktion von B_0 zum Eigenwert λ. Indem man ψ durch $|\psi|$ ersetzt, kann man erreichen, daß $\psi \geq 0$ in M ist. Nach dem Maximumprinzip gilt sogar $\psi > 0$ in M. Setzt man $g = \psi^{\frac{4}{n-2}} g_0$, so gilt

$$H = \psi^{-\frac{n}{n-2}} \left(\frac{2(n-1)}{n-2} \frac{\partial}{\partial \nu_0} \psi + H_0 \psi \right) = \frac{2(n-1)}{n-2} \lambda \, \psi^{-\frac{2}{n-2}}$$

auf ∂M und

$$R = \psi^{-\frac{n+2}{n-2}} \left(-\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_0 \psi + R_0 \psi \right) = 0$$

in M. Am Vorzeichen von λ kann man ablesen, welcher der Fälle (IIa), (IIb) und (IIc) vorliegt.

3.3 Der Fall verschwindender mittlerer Krümmung

Es sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M. Wir untersuchen das Anfangsrandwertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -(R - \overline{R}) g$$

in M mit der Randbedingung

$$H = 0$$

auf ∂M. Wir zeigen zunächst, daß diese Gleichung eine Lösung für kurze Zeiten besitzt. Der Einfachheit halber betrachten wir die unnormalisierte Gleichung.

3.9 Proposition. *Das Anfangsrandwertproblem*

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -Rg$$

in M und

$$H = 0$$

auf ∂M besitzt eine Lösung auf einem kleinen Zeitintervall.

Beweis: Wir schreiben $g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$, wobei g_0 die Anfangsmetrik bezeichnet. Auf diese Weise erhält man das Anfangsrandwertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t} u = (n-1)\, u^{-\frac{4}{n-2}}\, \Delta_0 u - \frac{n-2}{4}\, u^{\frac{n-6}{n-2}}\, R_0$$

in M,

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0} u = 0$$

auf ∂M und

$$u = 1$$

für $t = 0$. Diese Gleichung ist parabolisch, und besitzt daher eine Lösung auf einem kleinen Zeitintervall.

Für spätere Zwecke beweisen wir noch eine Variante eines Satzes von R. Schoen und S.T. Yau [35].

3.10 Theorem. *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit positiver Skalarkrümmung im Innern und verschwindender mittlerer Krümmung am Rand. Wir nehmen an, daß M lokal konform flach und ∂M umbilisch ist. Ferner sei M einfach zusammenhängend und ∂M zusammenhängend. Dann ist M konform äquivalent zu einer dichten offenen Teilmenge Ω von S^n_+.*

Beweis: Da ∂M umbilisch ist und verschwindende mittlere Krümmung besitzt, ist ∂M totalgeodätisch. Wir können daher M verdoppeln. Die resultierende Mannigfaltigkeit $\tilde{M}$ ist lokal konform flach und besitzt positive Skalarkrümmung. Da M einfach zusammenhängend ist und ∂M zusammenhängend ist, ist $\tilde{M}$ einfach zusammenhängend. Nach einem Satz von R. Schoen und S.T. Yau (siehe [35], Theorem 4.5) ist $\tilde{M}$ konform äquivalent zu einer dichten offenen Teilmenge $\tilde{\Omega}$ von S^n. Da ∂M umbilisch ist, dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß ∂M in der Äquatorebene liegt. Folglich ist M konform äquivalent zu einer dichten offenen Teilmenge Ω von S^n_+. Damit ist die Behauptung bewiesen.

3.11 Lemma. *Der Konformfaktor ist beschränkt.*

Beweis: Wir unterscheiden drei Fälle:

(a) Es existiert eine Metrik g_0 in der konformen Klasse mit $R_0 < 0$ und $H_0 = 0$. Setzt man $g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} u = (n-1)\, u^{-\frac{4}{n-2}}\, \Delta_0 u - \frac{n-2}{4}\, (R_0 u^{-\frac{4}{n-2}} - \overline{R}) u$$

in M und

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0} u = 0$$

auf ∂M. Da $R_0 < 0$ ist, folgt aus dem Maximumprinzip, daß der Quotient

$$\max_{x \in M} u / \min_{x \in M} u$$

beschränkt ist. Da das Volumen von M konstant ist, ist u beschränkt.

(b) Es existiert eine Metrik g_0 in der konformen Klasse mit $R_0 = 0$ und $H_0 = 0$. Setzt man $g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} u = (n-1)\, u^{-\frac{4}{n-2}}\, \Delta_0 u + \frac{n-2}{4}\, \overline{R} u$$

in M und

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0} u = 0$$

auf ∂M. Nach dem Maximumprinzip ist der Quotient

$$\max_{x \in M} u / \min_{x \in M} u$$

beschränkt. Da das Volumen von M konstant ist, ist u beschränkt.

(c) Wir betrachten nun den Fall, daß es in der konformen Klasse eine Metrik mit positiver Skalarkrümmung und verschwindender mittlerer Krümmung gibt. Nach Voraussetzung ist M lokal konform flach und ∂M umbilisch. Durch Übergang zur universellen Überlagerung kann man erreichen, daß M einfach zusammenhängend ist. Außerdem ist ∂M zusammenhängend. Nach Theorem 3.10 ist M konform äquivalent zu einer dichten offenen Teilmenge von S^n_+. Durch eine Spiegelung kann man die Metrik auf eine dichte offene Teilmenge von S^n fortsetzen.
Wir schreiben $g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$, wobei g_0 die Standardmetrik auf S^n bezeichnet. Da M vollständig ist, gilt $u \to \infty$ für $x \to S^n \setminus \Omega$. Wir zeigen mit Hilfe des Spiegelungsprinzips von Alexandrov (siehe [16]), daß u beschränkt ist. Dazu

betrachten wir einen beliebigen Punkt auf S^n. Wir wählen eine konforme Abbildung von S^n nach R^n, unter der dieser Punkt ins Unendliche abgebildet wird. Die Funktion u besitzt eine asymptotische Entwicklung der Form

$$u = a + \sum_i \frac{b_i x_i}{|x|^2} + \dots$$

für $|x| \to \infty$, wobei a eine positive reelle Zahl ist. Wir schreiben nun $g_{ij} = w^{\frac{4}{n-2}} \delta_{ij}$ für eine geeignete Funktion w. Dann gilt

$$w = \frac{2^{\frac{n-2}{2}}\, a}{|x|^{n-2}} + \sum_i \frac{2^{\frac{n-2}{2}}\, b_i x_i}{|x|^n} + \dots$$

für $|x| \to \infty$. Wir spiegeln die Funktion w an der Hyperebene $\{x_1 = \lambda\}$, und erhalten eine Funktion w_λ. Die Funktion w erfüllt die Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} w = (n-1)\, w^{-\frac{4}{n-2}} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} w + \frac{n-2}{4} \overline{R} w.$$

Ebenso erfüllt die Funktion w_λ die Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} w_\lambda = (n-1)\, w_\lambda^{-\frac{4}{n-2}} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} w_\lambda + \frac{n-2}{4} \overline{R} w_\lambda.$$

Wir wählen nun λ so groß, daß zur Zeit $t = 0$

$$w \geq w_\lambda$$

für alle $x_1 \leq \lambda$ ist. Die asymptotische Entwicklung für w garantiert, daß es ein λ mit dieser Eigenschaft gibt. Nach dem Maximumprinzip bleibt diese Beziehung richtig für alle Zeiten $t \geq 0$. Somit gilt

$$w \geq w_\lambda$$

für alle $x_1 \leq \lambda$ und alle $t \geq 0$. Insbesondere gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} w \leq 0$$

für $x_1 = \lambda$ und alle $t \geq 0$. Aus der asymptotischen Entwicklung für w folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} w = -\frac{(n-2)\, 2^{\frac{n-2}{2}}\, a x_1}{|x|^n} + \frac{2^{\frac{n-2}{2}}\, b_1}{|x|^n} - \sum_i \frac{n\, 2^{\frac{n-2}{2}}\, b_i x_i x_1}{|x|^{n+2}} + \dots$$

für $|x| \to \infty$. Für $x_1 = \lambda$ gilt daher

$$\frac{\partial}{\partial x_1} w = -\frac{(n-2)\, 2^{\frac{n-2}{2}}\, a\lambda}{|x|^n} + \frac{2^{\frac{n-2}{2}}\, b_1}{|x|^n} - \sum_i \frac{n\, 2^{\frac{n-2}{2}}\, b_i x_i \lambda}{|x|^{n+2}} + \dots$$

für $|x| \to \infty$. Folglich ist

$$-(n-2)\, a\lambda + b_1 \leq 0,$$

und damit

$$\frac{b_1}{a} \leq (n-2)\lambda.$$

Für den Gradienten von u im Unendlichen gilt daher

$$\frac{\overset{0}{\nabla}_1 u}{u} \leq (n-2)\lambda.$$

Somit gilt

$$\frac{|\overset{0}{\nabla}_i u|}{u} \leq C$$

für $i = 1, \dots, n$. Folglich ist der Ausdruck

$$\frac{|\overset{0}{\nabla} u|}{u}$$

beschränkt auf jeder kompakten Teilmenge von M. Damit ist auch die Funktion u beschränkt auf jeder kompakten Teilmenge von M. Daraus folgt die Behauptung.

3.12 Lemma. *Die Skalarkrümmung erfüllt die Evolutionsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t} R = (n-1)\, \Delta R + R(R - \overline{R})$$

in M mit der Randbedingung

$$\frac{\partial}{\partial \nu} R = 0$$

auf ∂M.

Beweis: Es sei g_0 eine feste Metrik mit $H_0 = 0$. Wir schreiben $g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$. Dann gilt

$$R = u^{-\frac{4}{n-2}} \left(-\frac{4(n-1)}{n-2}\, u^{-1}\, \Delta_0 u + R_0 \right)$$

in M und

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0} u = 0$$

auf ∂M. Differenziert man beide Gleichungen nach t, so bekommt man

$$\frac{\partial}{\partial t} R = (n-1)\, u^{-\frac{4}{n-2}}\, (\Delta_0 R + 2u^{-1} \overset{0}{\nabla} u \cdot \overset{0}{\nabla} R) + R(R - \overline{R})$$

in M und

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0} R = 0$$

auf ∂M. Setzt man $g_0 = g$, so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} R = (n-1)\, \Delta R + R(R - \overline{R})$$

in M und

$$\frac{\partial}{\partial \nu} R = 0$$

auf ∂M.

3.13 Lemma. *Die Skalarkrümmung ist beschränkt in* $L^{\frac{n}{2}}(M)$.

Beweis: Für $n \geq 4$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\int_M |R|^{\frac{n}{2}}\, dV \right] &= \frac{n}{2} \int_M \operatorname{sign}(R)\, |R|^{\frac{n-2}{2}}\, \frac{\partial}{\partial t} R\, dV \\
&\quad - \frac{n}{2} \int_M |R|^{\frac{n}{2}}\, (R - \overline{R})\, dV \\
&= \frac{n(n-1)}{2} \int_M \operatorname{sign}(R)\, |R|^{\frac{n-2}{2}}\, \Delta R\, dV \\
&= -\frac{n(n-1)(n-2)}{4} \int_M |R|^{\frac{n-4}{2}}\, |\nabla R|^2\, dV \\
&= -\frac{4(n-1)(n-2)}{n} \int_M \left|\nabla |R|^{\frac{n}{4}}\right|^2 dV.
\end{aligned}$$

Im Fall $n = 3$ wählen wir eine Folge η_k von regulären Werten von R, die gegen 0 konvergiert. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\int_M |R|^{\frac{3}{2}}\, dV\right] &= \frac{3}{2}\int_M \operatorname{sign}(R)\, |R|^{\frac{1}{2}}\, \frac{\partial}{\partial t} R\, dV \\
&\quad - \frac{3}{2}\int_M |R|^{\frac{3}{2}}\, (R - \overline{R})\, dV \\
&= 3\int_M \operatorname{sign}(R)\, |R|^{\frac{1}{2}}\, \Delta R\, dV \\
&= -\frac{3}{2}\lim_{k\to\infty}\int_M |R-\eta_k|^{-\frac{1}{2}}\, |\nabla R|^2\, dV \\
&= -\frac{8}{3}\lim_{k\to\infty}\int_M \left|\nabla |R-\eta_k|^{\frac{3}{4}}\right|^2 dV.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\int_M |R|^{\frac{n}{2}}\, dV$$

monoton fallend, und damit beschränkt.

3.14 Lemma. *Die Skalarkrümmung ist beschränkt in* $L^{\frac{n^2}{2n-4}}(M)$.

Beweis: Zur Abkürzung sei $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p(M)}$ und $\|\cdot\|_{r,p} = \|\cdot\|_{W^{r,p}(M)}$. Aus dem Beweis von Lemma 3.13 folgt

$$\int_{T-1}^{T}\int_M \left|\nabla |R|^{\frac{n}{4}}\right|^2 dV\, dt \leq C.$$

Daraus folgt

$$\int_{T-1}^{T} \left\| |R|^{\frac{n}{4}} \right\|_{1,2}^2 dt \leq \int_{T-1}^{T} \left\| |R|^{\frac{n}{4}} \right\|_{2}^2 dt + C.$$

Da R in $L^{\frac{n}{2}}(M)$ beschränkt ist, gilt

$$\int_{T-1}^{T} \left\| |R|^{\frac{n}{4}} \right\|_{1,2}^2 dt \leq C.$$

Die Sobolev-Ungleichung liefert

$$\int_{T-1}^{T} \left\| |R|^{\frac{n}{4}} \right\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 dt \leq C,$$

und damit

$$\int_{T-1}^{T} \|R\|_{\frac{n^2}{2n-4}}^{\frac{n}{2}} \, dt \leq C.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\int_M |R|^p \, dV\right] &= p \int_M \operatorname{sign}(R)\, |R|^{p-1} \frac{\partial}{\partial t} R \, dV \\
&\quad - \frac{n}{2} \int_M |R|^p \, (R - \overline{R}) \, dV \\
&= (n-1)\, p \int_M \operatorname{sign}(R)\, |R|^{p-1} \, \Delta R \, dV \\
&\quad + (p - \frac{n}{2}) \int_M |R|^p \, (R - \overline{R}) \, dV \\
&= -(n-1)\, p(p-1) \int_M |R|^{p-2} \, |\nabla R|^2 \, dV \\
&\quad + (p - \frac{n}{2}) \int_M |R|^p \, (R - \overline{R}) \, dV \\
&= -(n-1) \, \frac{4(p-1)}{p} \int_M \left|\nabla |R|^{\frac{p}{2}}\right|^2 dV \\
&\quad + (p - \frac{n}{2}) \int_M |R|^p \, (R - \overline{R}) \, dV
\end{aligned}$$

für alle $p \geq 2$. Wir verwenden nun die Abschätzung

$$\left\| |R|^{\frac{p}{2}} \right\|_{1,2}^2 \leq C \int_M \left|\nabla |R|^{\frac{p}{2}}\right|^2 dV + \left\| |R|^{\frac{p}{2}} \right\|_2^2.$$

Mit der Sobolev-Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|R\|_p^p &\leq -\frac{1}{C} \left\| |R|^{\frac{p}{2}} \right\|_{1,2}^2 + C \|R\|_{p+1}^{p+1} + C \\
&\leq -\frac{1}{C} \left\| |R|^{\frac{p}{2}} \right\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 + C \|R\|_{p+1}^{p+1} + C \\
&\leq -\frac{1}{C} \|R\|_{\frac{pn}{n-2}}^p + C \|R\|_{p+1}^{p+1} + C \\
&\leq -\frac{1}{C} \|R\|_{\frac{pn}{n-2}}^p + C \|R\|_q^{\theta(p+1)} \|R\|_{\frac{pn}{n-2}}^{(1-\theta)(p+1)} + C,
\end{aligned}$$

und damit

$$\frac{d}{dt} \|R\|_p^p \leq C \|R\|_q^{\frac{\theta(p+1)p}{\theta(p+1)-1}} + C$$

für $q \geq 2$. Dabei ist sicherzustellen, daß $\theta(p+1) > 1$ ist. Die Zahl θ ist definiert durch

$$\theta\left(\frac{p}{q} - \frac{n-2}{n}\right) = \frac{p}{p+1} - \frac{n-2}{n}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\theta(p+1) > 1 \iff & \theta(p+1)\left(\frac{p}{q} - \frac{n-2}{n}\right) > \frac{p}{q} - \frac{n-2}{n} \\
\iff & (p+1)\left(\frac{p}{p+1} - \frac{n-2}{n}\right) > \frac{p}{q} - \frac{n-2}{n} \\
\iff & p - p\frac{n-2}{n} > \frac{p}{q} \\
\iff & \frac{2p}{n} > \frac{p}{q} \\
\iff & q > \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Wir setzen nun $p = q = \frac{n^2}{2n-4}$. Dann gilt

$$\theta(p+1) = \frac{2n-2}{n-2},$$

und damit

$$\frac{\theta(p+1)p}{\theta(p+1)-1} = \frac{n(n-1)}{n-2}.$$

Also ist

$$\frac{d}{dt}\|R\|_{\frac{n^2}{2n-4}}^{\frac{n^2}{2n-4}} \leq C\|R\|_{\frac{n^2}{2n-4}}^{\frac{n(n-1)}{n-2}} + C.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$y = \|R\|_{\frac{n^2}{2n-4}}^{\frac{n^2}{2n-4}},$$

so bekommt man

$$\frac{d}{dt}y \leq Cy^{\frac{2n-2}{n}} + C.$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dt}\log(y+1) \leq Cy^{\frac{n-2}{n}} + C.$$

Andererseits gilt

$$\int_{T-1}^{T} y^{\frac{n-2}{n}}\, dt \leq C.$$

Folglich ist

$$y \leq C$$

zur Zeit T. Da T beliebig war, ist die Behauptung bewiesen.

3.15 Lemma. *Die Skalarkrümmung ist beschränkt in $L^p(M)$ für alle $p \geq 2$.*

Beweis: Für alle $p, q \geq 2$ gilt

$$\frac{d}{dt}\|R\|_p^p \leq -\frac{1}{C}\|R\|_{\frac{pn}{n-2}}^p + C\|R\|_q^{\theta(p+1)}\|R\|_{\frac{pn}{n-2}}^{(1-\theta)(p+1)} + C.$$

Für $q = \frac{n^2}{2n-4}$ gilt nach Lemma 3.14

$$\|R\|_q \leq C.$$

Setzt man dies oben ein, so bekommt man

$$\frac{d}{dt}\|R\|_p^p \leq -\frac{1}{C}\|R\|_{\frac{pn}{n-2}}^p + C\|R\|_{\frac{pn}{n-2}}^{(1-\theta)(p+1)} + C.$$

Da $q > \frac{n}{2}$ ist, ist $\theta(p+1) > 1$, und damit $(1-\theta)(p+1) < p$. Ist also $\|R\|_p$ sehr groß, so ist $\frac{d}{dt}\|R\|_p \leq 0$. Folglich ist $\|R\|_p$ beschränkt.

Wir beweisen nun Abschätzungen für die höheren Ableitungen von u. Wir betrachten zuerst die Zeitableitungen.

3.16 Proposition. *Die Zeitableitungen von u sind beschränkt in $L^p(M)$ für alle $p \geq 2$.*

Beweis: Wir bezeichnen die Zeitableitung von u der Ordnung m mit $u^{(m)}$. Wir zeigen durch Induktion über m, daß $\|u^{(m)}\|_p \leq C$ für alle $p \geq 2$ gilt. Für $m = 1$ ist die Behauptung richtig. Wir nehmen nun an, daß die Behauptung für alle $l \leq m-1$ richtig ist. Dann gilt $\|u^{(l)}\|_p \leq C$ für alle $p \geq 2$ und alle $l \leq m-1$. Die Funktion u erfüllt die Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u = (n-1)\, u^{-\frac{4}{n-2}}\, \Delta_0 u - \frac{n-2}{4}\, (R_0 u^{-\frac{4}{n-2}} - \overline{R})u$$

in M mit der Randbedingung

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0} u = 0$$

auf ∂M. Wir differenzieren diese Gleichung l-mal nach t. Für $l \leq m-2$ ergibt sich

$$\|\Delta_0 u^{(l)}\|_p \leq C$$

für alle $p \geq 2$. Für $l = m-1$ erhält man

$$\|u^{(m)} - (n-1)\, u^{-\frac{4}{n-2}}\, \Delta_0 u^{(m-1)}\|_p \leq C$$

für alle $p \geq 2$. Für $l = m$ bekommt man schließlich

$$\|u^{(m+1)} - (n-1)\, u^{-\frac{4}{n-2}}\, \Delta_0 u^{(m)}\|_p \leq C\|u^{(m)}\|_q + C,$$

wobei $p < q < \frac{pn}{n-2}$ sein soll. Eine ähnliche Rechnung wie oben ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\int_M u^{\frac{4}{n-2}}\, |u^{(m)}|^p\, dV_0\right] &\leq -\frac{1}{C}\big\||u^{(m)}|^{\frac{p}{2}}\big\|_{1,2}^2 + C\|u^{(m)}\|_q^p + C \\
&\leq -\frac{1}{C}\big\||u^{(m)}|^{\frac{p}{2}}\big\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 + C\|u^{(m)}\|_q^p + C \\
&\leq -\frac{1}{C}\|u^{(m)}\|_{\frac{pn}{n-2}}^p + C\|u^{(m)}\|_q^p + C,
\end{aligned}$$

wobei $p < q < \frac{pn}{n-2}$ sein muß. Wir behaupten, daß $\|u^{(m)}\|_p$ beschränkt ist. Wir zeigen zunächst, daß $\|u^{(m)}\|_2$ beschränkt ist. Dazu benutzen wir die Abschätzung

$$\frac{d}{dt}\left[\int_M u^{\frac{4}{n-2}}\, |u^{(m)}|^2\, dV_0\right] \leq -\frac{1}{C}\|u^{(m)}\|_{1,2}^2 + C\|u^{(m)}\|_q^2 + C$$

mit $2 < q < \frac{2n}{n-2}$. Wäre $\|u^{(m)}\|_2$ nicht beschränkt, so gäbe es eine Folge von Zeitpunkten t_k mit

$$\|u^{(m)}\|_q \to \infty$$

und

$$\|u^{(m)}\|_{1,2} \leq C\|u^{(m)}\|_q.$$

Darüberhinaus gilt

$$\|u^{(m-1)}\|_q \leq C$$

und

$$\|u^{(m)} - (n-1)\, u^{-\frac{4}{n-2}}\, \Delta_0 u^{(m-1)}\|_q \leq C.$$

Durch Umskalierung erhält man Funktionen ϕ_k und ψ_k mit

$$\|\psi_k\|_q = 1$$

und

$$\|\psi_k\|_{1,2} \leq C\|\psi_k\|_q$$

sowie

$$\|\phi_k\|_q \to 0$$

und

$$\|\psi_k - (n-1)\, u^{-\frac{4}{n-2}}\, \Delta_0 \phi_k\|_q \to 0.$$

Durch Übergang zu einer Teilfolge kann man erreichen, daß die Funktionen ψ_k in $L^q(M)$ gegen eine Funktion ψ konvergieren. Dann gilt

$$\|\psi\|_q = 1.$$

Ferner gilt

$$\|\phi_k\|_q \to 0$$

und

$$\|\psi - (n-1)\, u^{-\frac{4}{n-2}}\, \Delta_0 \phi_k\|_q \to 0.$$

Daraus folgt

$$\psi = 0.$$

Das ist ein Widerspruch. Also ist $\|u^{(m)}\|_2$ beschränkt. Folglich ist auch $\|u^{(m)}\|_p$ beschränkt.

Wir zeigen nun, daß u beschränkt ist in $W^{2r,p}(M)$. Dazu verwenden wir die Abschätzung

$$\|\phi\|_{2r,p} \leq C\|\Delta_0 \phi\|_{2r-2,p} + C\|\phi\|_{2r-2,p}$$

für alle ϕ mit $\frac{\partial}{\partial \nu_0}\phi = 0$. Einen Beweis dieser Abschätzung findet man in [1].

3.17 Proposition. *Die Zeitableitungen von u sind beschränkt in $W^{2r,p}(M)$ für alle $r \geq 0$ und $p \geq 2$.*

Beweis: Für $r = 0$ ist die Behauptung richtig. Sei nun $\|u^{(m)}\|_{2r-2,p} \leq C$ für alle $m \geq 0$ und $p \geq 2$. Durch Induktion über m folgt

$$\|\Delta_0 u^{(m)}\|_{2r-2,p} \leq C$$

für alle $m \geq 0$ und $p \geq 2$. Also ist

$$\|u^{(m)}\|_{2r,p} \leq C$$

für alle $m \geq 0$ und $p \geq 2$.

Als Folgerung erhält man:

3.18 Korollar. *Die Evolutionsgleichung (3.2) besitzt eine eindeutige Lösung, die für alle $t \geq 0$ definiert ist.*

Wir untersuchen noch das asymptotische Verhalten der Lösung.

3.19 Theorem. *Die Metrik konvergiert für $t \to \infty$ gegen eine Metrik konstanter Skalarkrümmung.*

Beweis: Wir definieren ein Funktional $E[u]$ durch

$$E[u] = V^{-\frac{n-2}{n}} \int_M R \, dV,$$

wobei $g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$ ist. Dann gilt

$$\delta E[u] = 2\, V^{-\frac{n-2}{n}} \int_M (R - \overline{R}) \, \frac{\delta u}{u} \, dV.$$

Unter der Evolutionsgleichung (3.2) ändert sich $E[u]$ also gemäß

$$\frac{d}{dt} E[u] = -\frac{n-2}{2} \, V^{-\frac{n-2}{n}} \int_M (R - \overline{R})^2 \, dV.$$

Wir setzen nun

$$\lim_{t \to \infty} E[u] = \alpha.$$

Da das Funktional $E[u]$ reell-analytisch ist, können wir die Lojasiewicz-Simon-Ungleichung anwenden (siehe [36], Theorem 3 oder [21], Proposition 3.3). Es gibt daher eine reelle Zahl θ mit $0 < \theta < \frac{1}{2}$ und

$$(E[u] - \alpha)^{2(1-\theta)} \leq C \int_M (R - \overline{R})^2 \, dV$$

für alle $t \geq t_0$. Wir setzen nun

$$z^2 = \int_M (R - \overline{R})^2 \, dV.$$

Dann gilt

$$\left(\int_T^\infty z(t)^2 \, dt \right)^{2(1-\theta)} \leq C z(T)^2$$

für alle $T \geq t_0$. Nach Lemma 4.1 in [21] gilt

$$\int_0^\infty z(t) \, dt < \infty.$$

Folglich existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = v$$

in $L^2(M)$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir zeigen schließlich noch, daß die Langzeitexistenz auch ohne zusätzliche Voraussetzungen an die konforme Klasse gilt.

3.20 Theorem. *Die Evolutionsgleichung (3.2) besitzt eine eindeutige Lösung, die für alle $t \geq 0$ definiert ist. Dieses Resultat gilt ohne zusätzliche Voraussetzungen an die konforme Klasse.*

Beweis: Wir nehmen an, daß die Lösung auf dem Zeitintervall $0 \leq t < T$ existiert. Aus der Evolutionsgleichung für u folgt

$$u \leq C$$

für alle $0 \leq t < T$. Weiterhin gilt

$$\int_M |\overset{0}{\nabla} u|^2 \, dV_0 \leq C$$

für alle $0 \leq t < T$. Nach Resultaten von P. Sacks (siehe [32], p. 389) und E. DiBenedetto (siehe [12], p. 115) ist die Funktion $u(x,t)$ gleichmäßig stetig. Wir betrachten nun eine Folge von Zeitpunkten t_k, die gegen T konvergiert. Da das Integral

$$\int_M u^{\frac{2n}{n-2}}\, dV_0 > 0$$

konstant ist, gibt es eine Folge von Punkten $x_k \in M$ mit

$$u(x_k, t_k) \geq 2\delta$$

für ein geeignetes $\delta > 0$. Da die Funktion $u(x,t)$ gleichmäßig stetig ist, existiert eine positive reelle Zahl r, so daß

$$u(x, t_k) \geq \delta$$

für alle $x \in B_{2r}(x_k)$ ist. Da M kompakt ist, gibt es einen Punkt $x_0 \in M$, so daß

$$u(x, t_k) \geq \delta$$

für alle $x \in B_r(x_0)$ ist. Durch Verkleinerung von δ kann man erreichen, daß

$$u(x, t) \geq \delta$$

für alle $x \in B_r(x_0)$ und alle $0 \leq t < T$ ist.

Sei nun f eine Funktion mit

$$\Delta_0 f = \frac{n-2}{4(n-1)}\, R_0$$

außerhalb von $B_r(x_0)$ und

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0} f = 0$$

auf ∂M. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{-f} u) \geq (n-1)\, u^{-\frac{4}{n-2}} \left(e^{-f}\, \Delta_0 u - e^{-f} u\, \Delta_0 f\right)$$

außerhalb von $B_r(x_0)$ und

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0}(e^{-f} u) = 0$$

auf ∂M. Umformung ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{-f}u) \geq (n-1)\, u^{-\frac{4}{n-2}} \left(\Delta_0(e^{-f}u) + 2\,\overset{0}{\nabla}(e^{-f}u) \cdot \overset{0}{\nabla} f + e^{-f}u\,|\overset{0}{\nabla} f|^2\right)$$

außerhalb von $B_r(x_0)$ und

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0}(e^{-f}u) = 0$$

auf ∂M. Wendet man das Maximumprinzip an, so erhält man

$$e^{-f}u \geq \eta$$

außerhalb von $B_r(x_0)$. Also ist

$$u \geq \eta e^f$$

außerhalb von $B_r(x_0)$. Folglich ist die Funktion u nach unten beschränkt.

Sobald wir wissen, daß der Konformfaktor beschränkt ist, können wir wie oben zeigen, daß die Funktion u in allen Sobolev-Räumen $W^{r,p}(M)$ beschränkt ist. Folglich läßt sich die Lösung über den Zeitpunkt T hinaus fortsetzen. Das ist ein Widerspruch.

3.4 Der Fall verschwindender Skalarkrümmung

Sei wieder M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M. Wir untersuchen nun das Anfangsrandwertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2(H - \overline{H})g$$

auf ∂M und

$$R = 0$$

in M. Wir zeigen zunächst, daß diese Gleichung eine Lösung für kurze Zeiten besitzt. Der Einfachheit halber betrachten wir die unnormalisierte Gleichung.

3.21 Proposition. *Das Anfangsrandwertproblem*

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2Hg$$

auf ∂M *und*

$$R = 0$$

in M *besitzt eine Lösung auf einem kleinen Zeitintervall.*

Beweis: Wir schreiben $g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$, wobei g_0 die Anfangsmetrik bezeichnet. Auf diese Weise erhält man das Anfangsrandwertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t} u = -(n-1)\, u^{-\frac{2}{n-2}} \, \frac{\partial}{\partial \nu_0} u - \frac{n-2}{2}\, u^{\frac{n-4}{n-2}}\, H_0$$

auf ∂M,

$$\Delta_0 u = 0$$

in M und

$$u = 1$$

für $t = 0$. Wir zeigen, daß diese Gleichung eine Lösung auf einem kleinen Zeitintervall besitzt (vgl. [31]). Dazu setzen wir $W^m = W^{m,2}(\partial M \times [0,1])$. Wir definieren eine Abbildung $\mathcal{F} : W^{m+1} \to W^m$ durch

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\partial}{\partial t} u + (n-1)\, u^{-\frac{2}{n-2}} \, \frac{\partial}{\partial \nu_0} u + \frac{n-2}{2}\, u^{\frac{n-4}{n-2}}\, H_0$$

auf ∂M. Dabei sei

$$\Delta_0 u = 0$$

in M und

$$u = 1$$

für $t = 0$. Wir wählen eine glatte Funktion w mit der Eigenschaft, daß die Zeitableitungen der Funktion $\mathcal{F}(w)$ an der Stelle $t = 0$ bis zur Ordnung m verschwinden. Das Differential von $\mathcal{F}$ in w ist gegeben durch

$$\begin{aligned} D\mathcal{F}_w(v) = {} & \frac{\partial}{\partial t} v + (n-1)\, w^{-\frac{2}{n-2}} \, \frac{\partial}{\partial \nu_0} v \\ & - \bigg(\frac{2(n-1)}{n-2}\, w^{-\frac{n}{n-2}} \, \frac{\partial}{\partial \nu_0} w - \frac{n-4}{2}\, w^{-\frac{2}{n-2}}\, H_0 \bigg) v \end{aligned}$$

auf ∂M, wobei

$$\Delta_0 v = 0$$

in M und

$$v = 0$$

für $t = 0$ sein soll. Wir behaupten, daß die Abbildung $D\mathfrak{F}_w : W^{m+1} \to W^m$ bijektiv ist. Die Injektivität ist klar. Um die Surjektivität zu zeigen, betrachten wir eine beliebige Funktion $g \in W^m$. Wir suchen eine Funktion $v \in W^{m+1}$ mit $D\mathfrak{F}_w(v) = g$. Die Funktion v muß also das lineare Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} v = &-(n-1)\, w^{-\frac{2}{n-2}} \frac{\partial}{\partial \nu_0} v \\ &+ \left(\frac{2(n-1)}{n-2}\, w^{-\frac{n}{n-2}} \frac{\partial}{\partial \nu_0} w - \frac{n-4}{2}\, w^{-\frac{2}{n-2}}\, H_0\right) v + g\end{aligned}$$

auf ∂M,

$$\Delta_0 v = 0$$

in M und

$$v = 0$$

für $t = 0$ erfüllen. Mit Hilfe der Variationsmethode kann man zeigen, daß diese Gleichung eine schwache Lösung besitzt. Wir zeigen, daß $v \in W^{m+1}$ und

$$\|v\|_{W^{m+1}} \leq C \|g\|_{W^m}$$

ist. Dazu nehmen wir an, daß $v \in W^m$ und

$$\|v\|_{W^m} \leq C \|g\|_{W^{m-1}}$$

ist. Wir definieren einen linearen Operator T durch

$$T\phi = (n-1)\, w^{-\frac{2}{n-2}} \frac{\partial}{\partial \nu_0} \phi$$

auf ∂M, wobei

$$\Delta_0 \phi = 0$$

in M sein soll. Dann gilt

$$\|\frac{\partial}{\partial t}v + Tv\|_{W^m} \leq C\|g\|_{W^m}.$$

Daraus folgt

$$\|\frac{\partial}{\partial t}T^m(1+aT)^{-1}v + T^{m+1}(1+aT)^{-1}v\|_{W^0} \leq C\|g\|_{W^m}.$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$v_a = (1+aT)^{-1}v.$$

Dann gilt

$$\|\frac{\partial}{\partial t}T^m v_a + T^{m+1}v_a\|_{W^0} \leq C\|g\|_{W^m}.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_{\partial M} w^{\frac{2}{n-2}}\, \frac{\partial}{\partial t}T^m v_a\, T^{m+1}v_a\, dA_0\, dt \\
&= (n-1)\int_0^1 \int_{\partial M} \frac{\partial}{\partial t}T^m v_a\, \frac{\partial}{\partial \nu_0}T^m v_a\, dA_0\, dt \\
&= \frac{(n-1)}{2}\int_{\partial M} T^m v_a\, \frac{\partial}{\partial \nu_0}T^m v_a\, dA_0\, dt\Big|_{t=0}^{t=1} \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_{\partial M} w^{\frac{2}{n-2}}\, (T^{m+1}v_a)^2\, dA_0\, dt \\
&\leq \int_0^1 \int_{\partial M} w^{\frac{2}{n-2}}\, (\frac{\partial}{\partial t}T^m v_a + T^{m+1}v_a)\, T^{m+1}v_a\, dA_0\, dt.
\end{aligned}$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_{\partial M} w^{\frac{2}{n-2}}\, (T^{m+1}v_a)^2\, dA_0\, dt \\
&\leq \int_0^\infty \int_{\partial M} w^{\frac{2}{n-2}}\, (\frac{\partial}{\partial t}T^m v_a + T^{m+1}v_a)^2\, dA_0\, dt,
\end{aligned}$$

und damit

$$\|T^{m+1}v_a\|_{W^0} \leq \|\frac{\partial}{\partial t}T^m v_a + T^{m+1}v_a\|_{W^0}.$$

Kombiniert man die beiden Abschätzungen, so bekommt man

$$\|T^{m+1}v_a\|_{W^0} \leq C\|g\|_{W^m}.$$

Läßt man $a \to 0$ gehen, so erhält man $T^{m+1}v \in W^0$ und

$$\|T^{m+1}v\|_{W^0} \leq C\|g\|_{W^m}.$$

Hieraus kann man schließen, daß $v \in W^{m+1}$ und

$$\|v\|_{W^{m+1}} \leq C\|g\|_{W^m}$$

ist. Damit ist die Surjektivität gezeigt.

Nach dem Satz über inverse Funktionen ist $\mathcal{F}$ eine bijektive Abbildung von einer Umgebung von v auf eine Umgebung von g. Da die Zeitableitungen von $\mathcal{F}(w)$ bis zur Ordnung m verschwinden, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $f \in W^m$ mit $f = 0$ für $0 \leq t \leq \delta$ und $\|\mathcal{F}(w) - f\|_{W^m} \leq \varepsilon$. Da die Abbildung $\mathcal{F}$ bijektiv ist, gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $u \in W^{m+1}$ mit $\|\mathcal{F}(u) - f\|_{W^m} = 0$. Die Funktion u ist dann eine Lösung des Anfangsrandwertproblems für $0 \leq t \leq \delta$. Wenn wir m genügend groß wählen, dann folgt aus $u \in W^{m+1}$ bereits die Glattheit von u.

Für spätere Zwecke beweisen wir noch eine Variante eines Satzes von R. Schoen und S.T. Yau [35].

3.22 Theorem. *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit positiver mittlerer Krümmung am Rand und verschwindender Skalarkrümmung im Innern. Wir nehmen an, daß M lokal konform flach und ∂M umbilisch ist. Ferner sei M einfach zusammenhängend und ∂M zusammenhängend. Dann ist M konform äquivalent zu einer dichten offenen Teilmenge Ω von B^n.*

Beweis: Durch eine konforme Änderung der Metrik kann man erreichen, daß die Mannigfaltigkeit positive Skalarkrümmung im Innern und verschwindende mittlere Krümmung am Rand besitzt. Nach Theorem 3.10 ist M konform äquivalent zu einer dichten offenen Teilmenge von S^n_+. Daraus folgt die Behauptung.

3.23 Lemma. *Der Konformfaktor ist beschränkt.*

Beweis: Wir unterscheiden drei Fälle:

(a) Es existiert eine Metrik g_0 in der konformen Klasse mit $H_0 < 0$ und $R_0 = 0$. Setzt man $g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} u = -(n-1)\, u^{-\frac{2}{n-2}} \frac{\partial}{\partial \nu_0} u - \frac{n-2}{2} (H_0 u^{-\frac{2}{n-2}} - \overline{H}) u$$

auf ∂M und

$$\Delta_0 u = 0$$

in M. Da $H_0 < 0$ ist, folgt aus dem Maximumprinzip, daß der Quotient

$$\max_{x \in \partial M} u / \min_{x \in \partial M} u$$

beschränkt ist. Da der Flächeninhalt von ∂M konstant ist, ist u beschränkt.

(b) Es existiert eine Metrik g_0 in der konformen Klasse mit $H_0 = 0$ und $R_0 = 0$. Setzt man $g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} u = -(n-1)\, u^{-\frac{2}{n-2}} \frac{\partial}{\partial \nu_0} u + \frac{n-2}{2} \overline{H} u$$

auf ∂M und

$$\Delta_0 u = 0$$

in M. Nach dem Maximumprinzip ist der Quotient

$$\max_{x \in \partial M} u / \min_{x \in \partial M} u$$

beschränkt. Da der Flächeninhalt von ∂M konstant ist, ist u beschränkt.

(c) Wir betrachten nun den Fall, daß es in der konformen Klasse eine Metrik mit positiver mittlerer Krümmung und verschwindender Skalarkrümmung gibt. Nach Voraussetzung ist M lokal konform flach und ∂M umbilisch. Durch Übergang zur universellen Überlagerung kann man erreichen, daß M einfach zusammenhängend ist. Außerdem ist ∂M zusammenhängend. Nach Theorem 3.22 ist M konform äquivalent zu einer dichten offenen Teilmenge Ω von B^n. Wir schreiben $g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$, wobei g_0 die Standardmetrik auf B^n bezeichnet. Da M vollständig ist, gilt $u \to \infty$ für $x \to B^n \setminus \Omega$. Wir zeigen mit Hilfe des Spiegelungsprinzips von Alexandrov (siehe [16]), daß u beschränkt ist. Dazu betrachten wir einen beliebigen Punkt auf dem Rand von B^n. Wir wählen eine konforme Abbildung von B^n nach $H^n = \{x_n \geq 0\}$, unter der dieser Punkt ins Unendliche abgebildet wird. Die Funktion u besitzt eine asymptotische Entwicklung der Form

$$u = a + \sum_i \frac{b_i x_i}{|x|^2} + \ldots$$

für $|x| \to \infty$, wobei a eine positive reelle Zahl ist. Wir schreiben nun $g_{ij} = w^{\frac{4}{n-2}} \delta_{ij}$ für eine geeignete Funktion w. Dann gilt

$$w = \frac{2^{\frac{n-2}{2}} a}{|x|^{n-2}} + \sum_i \frac{2^{\frac{n-2}{2}} b_i x_i}{|x|^n} + \ldots$$

für $|x| \to \infty$. Wir spiegeln die Funktion w an der Hyperebene $\{x_1 = \lambda\}$, und erhalten eine Funktion w_λ. Die Funktion w erfüllt die Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} w = (n-1)\, w^{-\frac{2}{n-2}} \frac{\partial}{\partial x_n} w + \frac{n-2}{2} \overline{H} w$$

auf ∂H^n und

$$\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} w = 0$$

in H^n. Ebenso erfüllt die Funktion w_λ die Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} w_\lambda = (n-1)\, w_\lambda^{-\frac{2}{n-2}} \frac{\partial}{\partial x_n} w_\lambda + \frac{n-2}{2} \overline{H} w_\lambda$$

auf ∂H^n und

$$\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} w_\lambda = 0$$

in H^n. Wir wählen nun λ so groß, daß zur Zeit $t = 0$

$$w \geq w_\lambda$$

für alle $x_1 \leq \lambda$ ist. Die asymptotische Entwicklung für w garantiert, daß es ein λ mit dieser Eigenschaft gibt. Nach dem Maximumprinzip bleibt diese Beziehung richtig für alle Zeiten $t \geq 0$. Somit gilt

$$w \geq w_\lambda$$

für alle $x_1 \leq \lambda$ und alle $t \geq 0$. Insbesondere gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} w \leq 0$$

für $x_1 = \lambda$ und alle $t \geq 0$. Aus der asymptotischen Entwicklung für w folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} w = -\frac{(n-2)\, 2^{\frac{n-2}{2}}\, a x_1}{|x|^n} + \frac{2^{\frac{n-2}{2}} b_1}{|x|^n} - \sum_i \frac{n\, 2^{\frac{n-2}{2}}\, b_i x_i x_1}{|x|^{n+2}} + \ldots$$

für $|x| \to \infty$. Für $x_1 = \lambda$ gilt daher

$$\frac{\partial}{\partial x_1} w = -\frac{(n-2)\, 2^{\frac{n-2}{2}}\, a \lambda}{|x|^n} + \frac{2^{\frac{n-2}{2}} b_1}{|x|^n} - \sum_i \frac{n\, 2^{\frac{n-2}{2}}\, b_i x_i \lambda}{|x|^{n+2}} + \ldots$$

für $|x| \to \infty$. Folglich ist

$$-(n-2)\, a\lambda + b_1 \leq 0,$$

und damit

$$\frac{b_1}{a} \leq (n-2)\lambda.$$

Für den Gradienten von u im Unendlichen gilt daher

$$\frac{\overset{0}{\nabla}_1 u}{u} \leq (n-2)\lambda.$$

Somit gilt

$$\frac{|\overset{0}{\nabla}_i u|}{u} \leq C$$

für $i = 1, \ldots, n-1$. Folglich ist der Ausdruck

$$\frac{|\overset{0}{\nabla} u|}{u}$$

beschränkt auf jeder kompakten Teilmenge von ∂M. Damit ist auch die Funktion u beschränkt auf jeder kompakten Teilmenge von ∂M. Daraus folgt die Behauptung.

3.24 Lemma. *Die mittlere Krümmung erfüllt die Evolutionsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t} H = -(n-1)\,\frac{\partial}{\partial \nu} H + H(H - \overline{H})$$

auf ∂M. Dabei muß die Funktion H so fortgesetzt werden, daß

$$\Delta H = 0$$

in M gilt.

Beweis: Es sei g_0 eine feste Metrik mit $R_0 = 0$. Wir schreiben $g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$. Dann gilt

$$H = u^{-\frac{2}{n-2}} \left(\frac{2(n-1)}{n-2}\, u^{-1}\, \frac{\partial}{\partial \nu_0} u + H_0 \right)$$

auf ∂M und

$$\Delta_0 u = 0$$

in M. Differenziert man beide Gleichungen nach t, so bekommt man

$$\frac{\partial}{\partial t} H = -(n-1)\, u^{-\frac{2}{n-2}}\, \frac{\partial}{\partial \nu_0} H + H(H - \overline{H})$$

in M und

$$\Delta_0 H + 2u^{-1} \overset{0}{\nabla} u \cdot \overset{0}{\nabla} H = 0$$

auf ∂M. Setzt man $g_0 = g$, so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} H = -(n-1)\,\frac{\partial}{\partial \nu} H + H(H - \overline{H})$$

auf ∂M und

$$\Delta H = 0$$

in M.

3.25 Lemma. *Die mittlere Krümmung ist beschränkt in $L^{n-1}(\partial M)$.*

Beweis: Es gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\int_{\partial M} |H|^{n-1}\, dA\right] &= (n-1)\int_{\partial M} \operatorname{sign}(H)\, |H|^{n-2}\, \frac{\partial}{\partial t} H\, dA \\
&\quad - (n-1)\int_{\partial M} |H|^{n-1}\, (H - \overline{H})\, dA \\
&= -(n-1)^2 \int_{\partial M} \operatorname{sign}(H)\, |H|^{n-2}\, \frac{\partial}{\partial \nu} H\, dA \\
&= -(n-1)^2 (n-2)\int_M |H|^{n-3}\, |\nabla H|^2\, dV \\
&= -4(n-2)\int_M \left|\nabla |H|^{\frac{n-1}{2}}\right|^2 dV.
\end{aligned}
$$

Also ist

$$
\int_{\partial M} |H|^{n-1}\, dA
$$

monoton fallend, und damit beschränkt.

3.26 Lemma. *Die mittlere Krümmung ist beschränkt in* $L^{\frac{(n-1)^2}{n-2}}(\partial M)$.

Beweis: Zur Abkürzung sei $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p(\partial M)}$ und $\|\cdot\|_{r,p} = \|\cdot\|_{W^{r,p}(\partial M)}$. Aus dem Beweis von Lemma 3.25 folgt

$$
\int_{T-1}^{T}\int_M \left|\nabla |H|^{\frac{n-1}{2}}\right|^2 dV\, dt \le C.
$$

Daraus folgt

$$
\int_{T-1}^{T} \left\| |H|^{\frac{n-1}{2}} \right\|_{\frac{1}{2},2}^2 dt \le \int_{T-1}^{T} \left\| |H|^{\frac{n-1}{2}} \right\|_{2}^2 dt + C.
$$

Da H in $L^{n-1}(\partial M)$ beschränkt ist, gilt

$$
\int_{T-1}^{T} \left\| |H|^{\frac{n-1}{2}} \right\|_{\frac{1}{2},2}^2 dt \le C.
$$

Die Sobolev-Ungleichung liefert

$$
\int_{T-1}^{T} \left\| |H|^{\frac{n-1}{2}} \right\|_{\frac{2(n-1)}{n-2}}^2 dt \le C,
$$

und damit

$$\int_{T-1}^{T} \|H\|^{n-1}_{\frac{(n-1)^2}{n-2}}\, dt \le C.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\int_{\partial M} |H|^p \, dA\right] &= p \int_{\partial M} \operatorname{sign}(H)\, |H|^{p-1} \frac{\partial}{\partial t} H \, dA \\
&\quad - (n-1) \int_{\partial M} |H|^p \, (H - \overline{H}) \, dA \\
&= -(n-1)\, p \int_{\partial M} \operatorname{sign}(H)\, |H|^{p-1} \frac{\partial}{\partial \nu} H \, dA \\
&\quad + (p-n+1) \int_{\partial M} |H|^p \, (H - \overline{H}) \, dA \\
&= -(n-1)\, p(p-1) \int_{M} |H|^{p-2}\, |\nabla H|^2 \, dV \\
&\quad + (p-n+1) \int_{\partial M} |H|^p \, (H - \overline{H}) \, dA \\
&= -(n-1)\, \frac{4(p-1)}{p} \int_{M} \left|\nabla |H|^{\frac{p}{2}}\right|^2 dV \\
&\quad + (p-n+1) \int_{\partial M} |H|^p \, (H - \overline{H}) \, dA
\end{aligned}$$

für alle $p \ge 2$. Wir verwenden nun die Abschätzung

$$\left\| |H|^{\frac{p}{2}} \right\|^2_{\frac{1}{2},2} \le C \int_M \left|\nabla |H|^{\frac{p}{2}}\right|^2 dA + \left\| |H|^{\frac{p}{2}} \right\|^2_2$$

(siehe [39], p. 27). Mit der Sobolev-Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|H\|_p^p &\le -\frac{1}{C}\left\| |H|^{\frac{p}{2}} \right\|^2_{\frac{1}{2},2} + C\|H\|^{p+1}_{p+1} + C \\
&\le -\frac{1}{C}\left\| |H|^{\frac{p}{2}} \right\|^2_{\frac{2(n-1)}{n-2}} + C\|H\|^{p+1}_{p+1} + C \\
&\le -\frac{1}{C}\|H\|^p_{\frac{p(n-1)}{n-2}} + C\|H\|^{p+1}_{p+1} + C \\
&\le -\frac{1}{C}\|H\|^p_{\frac{p(n-1)}{n-2}} + C\|H\|^{\theta(p+1)}_q \|H\|^{(1-\theta)(p+1)}_{\frac{p(n-1)}{n-2}} + C,
\end{aligned}$$

und damit

$$\frac{d}{dt}\|H\|_p^p \le C\|H\|_q^{\frac{\theta(p+1)p}{\theta(p+1)-1}} + C$$

für $q \geq 2$. Dabei ist sicherzustellen, daß $\theta(p+1) > 1$ ist. Die Zahl θ ist definiert durch

$$\theta\left(\frac{p}{q} - \frac{n-2}{n-1}\right) = \frac{p}{p+1} - \frac{n-2}{n-1}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\theta(p+1) > 1 &\iff \theta(p+1)\left(\frac{p}{q} - \frac{n-2}{n-1}\right) > \frac{p}{q} - \frac{n-2}{n-1} \\
&\iff (p+1)\left(\frac{p}{p+1} - \frac{n-2}{n-1}\right) > \frac{p}{q} - \frac{n-2}{n-1} \\
&\iff p - p\frac{n-2}{n-1} > \frac{p}{q} \\
&\iff \frac{p}{n-1} > \frac{p}{q} \\
&\iff q > n-1.
\end{aligned}$$

Wir setzen nun $p = q = \frac{(n-1)^2}{n-2}$. Dann gilt

$$\theta(p+1) = \frac{2n-3}{n-2},$$

und damit

$$\frac{\theta(p+1)p}{\theta(p+1)-1} = \frac{(n-1)(2n-3)}{n-2}.$$

Also ist

$$\frac{d}{dt}\|H\|_{\frac{(n-1)^2}{n-2}}^{\frac{(n-1)^2}{n-2}} \leq C\|H\|_{\frac{(n-1)^2}{n-2}}^{\frac{(n-1)(2n-3)}{n-2}} + C.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$y = \|H\|_{\frac{(n-1)^2}{n-2}}^{\frac{(n-1)^2}{n-2}},$$

so bekommt man

$$\frac{d}{dt}y \leq Cy^{\frac{2n-3}{n-1}} + C.$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dt}\log(y+1) \leq Cy^{\frac{n-2}{n-1}} + C.$$

Andererseits gilt

$$\int_{T-1}^{T} y^{\frac{n-2}{n-1}}\, dt \leq C.$$

Folglich ist

$$y \leq C$$

zur Zeit T. Da T beliebig war, ist die Behauptung bewiesen.

3.27 Lemma. *Die mittlere Krümmung ist beschränkt in $L^p(\partial M)$ für alle $p \geq 2$.*

Beweis: Für alle $p, q \geq 2$ gilt

$$\frac{d}{dt}\|H\|_p^p \leq -\frac{1}{C}\|H\|^p_{\frac{p(n-1)}{n-2}} + C\|H\|_q^{\theta(p+1)}\|H\|^{(1-\theta)(p+1)}_{\frac{p(n-1)}{n-2}} + C.$$

Für $q = \frac{(n-1)^2}{n-2}$ gilt nach Lemma 3.26

$$\|H\|_q \leq C.$$

Setzt man dies oben ein, so bekommt man

$$\frac{d}{dt}\|H\|_p^p \leq -\frac{1}{C}\|H\|^p_{\frac{p(n-1)}{n-2}} + C\|H\|^{(1-\theta)(p+1)}_{\frac{p(n-1)}{n-2}} + C.$$

Da $q > n-1$ ist, ist $\theta(p+1) > 1$, und damit $(1-\theta)(p+1) < p$. Ist also $\|H\|_p$ sehr groß, so ist $\frac{d}{dt}\|H\|_p \leq 0$. Folglich ist $\|H\|_p$ beschränkt.

Wir beweisen nun Abschätzungen für die höheren Ableitungen von u. Wir betrachten zuerst die Zeitableitungen.

3.28 Proposition. *Die Zeitableitungen von u sind beschränkt in $L^p(\partial M)$ für alle $p \geq 2$.*

Beweis: Wir bezeichnen die Zeitableitung von u der Ordnung m mit $u^{(m)}$. Wir zeigen durch Induktion über m, daß $\|u^{(m)}\|_p \leq C$ für alle $p \geq 2$ gilt. Für $m = 1$ ist die Behauptung richtig. Wir nehmen nun an, daß die Behauptung für alle $l \leq m-1$ richtig ist. Dann gilt $\|u^{(l)}\|_p \leq C$ für alle $p \geq 2$ und alle $l \leq m-1$. Die Funktion u erfüllt die Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u = -(n-1)\, u^{-\frac{2}{n-2}} \frac{\partial}{\partial \nu_0}u - \frac{n-2}{2}\,(H_0 u^{-\frac{2}{n-2}} - \overline{H})u$$

auf ∂M und

$$\Delta_0 u = 0$$

in M. Wir differenzieren diese Gleichung l-mal nach t. Für $l \leq m-2$ ergibt sich

$$\|\frac{\partial}{\partial \nu_0} u^{(l)}\|_p \leq C$$

für alle $p \geq 2$. Für $l = m-1$ erhält man

$$\|u^{(m)} + (n-1)\, u^{-\frac{2}{n-2}}\, \frac{\partial}{\partial \nu_0} u^{(m-1)}\|_p \leq C$$

für alle $p \geq 2$. Für $l = m$ bekommt man schließlich

$$\|u^{(m+1)} + (n-1)\, u^{-\frac{2}{n-2}}\, \frac{\partial}{\partial \nu_0} u^{(m)}\|_p \leq C\|u^{(m)}\|_q + C,$$

wobei $p < q < \frac{p(n-1)}{n-2}$ sein soll. Eine ähnliche Rechnung wie oben ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\int_{\partial M} u^{\frac{2}{n-2}}\, |u^{(m)}|^p \, dA_0\right] &\leq -\frac{1}{C}\big\||u^{(m)}|^{\frac{p}{2}}\big\|^2_{\frac{1}{2},2} + C\|u^{(m)}\|^p_q + C \\
&\leq -\frac{1}{C}\big\||u^{(m)}|^{\frac{p}{2}}\big\|^2_{\frac{2(n-1)}{n-2}} + C\|u^{(m)}\|^p_q + C \\
&\leq -\frac{1}{C}\|u^{(m)}\|^p_{\frac{p(n-1)}{n-2}} + C\|u^{(m)}\|^p_q + C,
\end{aligned}$$

wobei $p < q < \frac{p(n-1)}{n-2}$ sein muß. Wir behaupten, daß $\|u^{(m)}\|_p$ beschränkt ist. Wir zeigen zunächst, daß $\|u^{(m)}\|_2$ beschränkt ist. Dazu benutzen wir die Abschätzung

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{\partial M} u^{\frac{2}{n-2}}\, |u^{(m)}|^2 \, dA_0\right] \leq -\frac{1}{C}\|u^{(m)}\|^2_{\frac{1}{2},2} + C\|u^{(m)}\|^2_q + C$$

mit $2 < q < \frac{2(n-1)}{n-2}$. Wäre $\|u^{(m)}\|_2$ nicht beschränkt, so gäbe es eine Folge von Zeitpunkten t_k mit

$$\|u^{(m)}\|_q \to \infty$$

und

$$\|u^{(m)}\|_{\frac{1}{2},2} \leq C\|u^{(m)}\|_q.$$

Darüberhinaus gilt

$$\|u^{(m-1)}\|_q \leq C$$

und

$$\|u^{(m)} + (n-1)\, u^{-\frac{2}{n-2}} \frac{\partial}{\partial \nu_0} u^{(m-1)}\|_q \leq C.$$

Durch Umskalierung erhält man Funktionen ϕ_k und ψ_k mit

$$\|\psi_k\|_q = 1$$

und

$$\|\psi_k\|_{\frac{1}{2},2} \leq C \|\psi_k\|_q$$

sowie

$$\|\phi_k\|_q \to 0$$

und

$$\|\psi_k + (n-1)\, u^{-\frac{2}{n-2}} \frac{\partial}{\partial \nu_0} \phi_k\|_q \to 0.$$

Durch Übergang zu einer Teilfolge kann man erreichen, daß die Funktionen ψ_k in $L^q(\partial M)$ gegen eine Funktion ψ konvergieren. Dann gilt

$$\|\psi\|_q = 1.$$

Ferner gilt

$$\|\phi_k\|_q \to 0$$

und

$$\|\psi + (n-1)\, u^{-\frac{2}{n-2}} \frac{\partial}{\partial \nu_0} \phi_k\|_q \to 0.$$

Daraus folgt

$$\psi = 0.$$

Das ist ein Widerspruch. Also ist $\|u^{(m)}\|_2$ beschränkt. Folglich ist auch $\|u^{(m)}\|_p$ beschränkt.

Wir zeigen nun, daß u beschränkt ist in $W^{r,p}(\partial M)$. Dazu verwenden wir die Abschätzung

$$\|\phi\|_{r,p} \leq C\|\frac{\partial}{\partial \nu_0}\phi\|_{r-1,p} + C\|\phi\|_{r-1,p}$$

für alle ϕ mit $\Delta_0 \phi = 0$. Um diese Ungleichung zu beweisen, schreiben wir die Funktion ϕ in der Form

$$\phi(x) = \int_{\partial M} G_N(x,y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_0}\phi(y)\, dA_0(y) + \text{const.}$$

für alle $x \in M$, wobei $G_N(x,y)$ die Greensche Funktion mit Neumann-Randbedingungen bezeichnet. Die Abschätzung folgt dann aus [25], p. 4.

3.29 Proposition. *Die Zeitableitungen von u sind beschränkt in $W^{r,p}(\partial M)$ für alle $r \geq 0$ und $p \geq 2$.*

Beweis: Für $r = 0$ ist die Behauptung richtig. Sei nun $\|u^{(m)}\|_{r-1,p} \leq C$ für alle $m \geq 0$ und $p \geq 2$. Durch Induktion über m folgt

$$\|\frac{\partial}{\partial \nu_0} u^{(m)}\|_{r-1,p} \leq C$$

für alle $m \geq 0$ und $p \geq 2$. Also ist

$$\|u^{(m)}\|_{r,p} \leq C$$

für alle $m \geq 0$ und $p \geq 2$.

Als Folgerung erhält man:

3.30 Korollar. *Die Evolutionsgleichung (3.3) besitzt eine eindeutige Lösung, die für alle $t \geq 0$ definiert ist.*

Wir untersuchen noch das asymptotische Verhalten der Lösung.

3.31 Theorem. *Die Metrik konvergiert für $t \to \infty$ gegen eine Metrik konstanter mittlerer Krümmung.*

Beweis: Wir definieren ein Funktional $E[u]$ durch

$$E[u] = A^{-\frac{n-2}{n-1}} \int_{\partial M} H \, dA,$$

wobei $g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$ ist. Dann gilt

$$\delta E[u] = 2 \, A^{-\frac{n-2}{n-1}} \int_{\partial M} (H - \overline{H}) \, \frac{\delta u}{u} \, dA.$$

Unter der Evolutionsgleichung (3.3) ändert sich $E[u]$ also gemäß

$$\frac{d}{dt} E[u] = -(n-2) \, A^{-\frac{n-2}{n-1}} \int_{\partial M} (H - \overline{H})^2 \, dA.$$

Wir setzen nun

$$\lim_{t \to \infty} E[u] = \alpha.$$

Da das Funktional $E[u]$ reell-analytisch ist, können wir die Lojasiewicz-Simon-Ungleichung anwenden (siehe [36], Theorem 3 oder [21], Proposition 3.3). Es gibt daher eine reelle Zahl θ mit $0 < \theta < \frac{1}{2}$ und

$$(E[u] - \alpha)^{2(1-\theta)} \leq C \int_{\partial M} (H - \overline{H})^2 \, dA$$

für alle $t \geq t_0$. Wir setzen nun

$$z^2 = \int_{\partial M} (H - \overline{H})^2 \, dA.$$

Dann gilt

$$\left(\int_T^\infty z(t)^2 \, dt \right)^{2(1-\theta)} \leq C z(T)^2$$

für alle $T \geq t_0$. Nach Lemma 4.1 in [21] gilt

$$\int_0^\infty z(t) \, dt < \infty.$$

Folglich existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = v$$

in $L^2(\partial M)$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir zeigen schließlich noch, daß die Langzeitexistenz auch ohne zusätzliche Voraussetzungen an die konforme Klasse gilt. Der Beweis beruht auf der folgenden Variante des Maximumprinzips.

3.32 Lemma. *Sei u eine Funktion mit $\Delta_0 u = 0$ in M. Ferner sei x_0 ein Punkt, in dem die Funktion u ihr Minimum annimmt. Dann liegt x_0 auf ∂M, und es gilt*

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0} u(x_0) \leq -\alpha \int_{\partial M} u \, dA_0 + \alpha A_0 u(x_0)$$

für eine geeignete Konstante α, wobei A_0 den Flächeninhalt von ∂M bezüglich der Metrik g_0 bezeichnet.

Beweis: Wir dürfen ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $u(x_0) = 0$ ist. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus dem Maximumprinzip. Um die zweite Aussage zu beweisen, schreiben wir die Funktion u in der Form

$$u(x) = -\int_{\partial M} \frac{\partial}{\partial \nu_0} G_D(x, y) \, u(y) \, dA_0(y)$$

für alle $x \in M$, wobei $G_D(x, y)$ die Greensche Funktion mit Dirichlet-Randbedingungen bezeichnet. Zur Abkürzung setzen wir

$$K(x, y) = -\frac{\partial}{\partial \nu_0} G_D(x, y),$$

wobei die Normalenableitung bezüglich y genommen wird. Damit erhält man

$$u(x) = \int_{\partial M} K(x, y) \, u(y) \, dA_0(y)$$

für alle $x \in M$. Da $u(y) \geq 0$ ist, gilt

$$u(x) \geq \int_{\partial M \setminus B_r(x_0)} K(x, y) \, u(y) \, dA_0(y)$$

für alle $x \in M$. Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0} u(x_0) \leq \int_{\partial M \setminus B_r(x_0)} \frac{\partial}{\partial \nu_0} K(x_0, y) \, u(y) \, dA_0(y).$$

Wendet man das Maximumprinzip auf die Funktion $K(x, y)$ an, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0} K(x_0, y) \leq -\alpha$$

für alle $y \in \partial M \setminus B_r(x_0)$. Da $u(y) \geq 0$ ist, folgt daraus

$$\int_{\partial M \setminus B_r(x_0)} \frac{\partial}{\partial \nu_0} K(x_0, y) \, u(y) \, dA_0(y) \leq -\alpha \int_{\partial M \setminus B_r(x_0)} u(y) \, dA_0(y).$$

Kombiniert man die beiden Ungleichungen, so bekommt man

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0} u(x_0) \leq -\alpha \int_{\partial M \setminus B_r(x_0)} u(y)\, dA_0(y).$$

Da r beliebig gewählt werden kann, ist damit die Behauptung bewiesen.

3.33 Theorem. *Die Evolutionsgleichung (3.3) besitzt eine eindeutige Lösung, die für alle $t \geq 0$ definiert ist. Dieses Resultat gilt ohne zusätzliche Voraussetzungen an die konforme Klasse.*

Beweis: Wir nehmen an, daß die Lösung auf dem Zeitintervall $0 \leq t < T$ existiert. Aus der Evolutionsgleichung für u folgt

$$u \leq C$$

für alle $0 \leq t < T$. Da das Integral

$$\int_{\partial M} u^{\frac{2n-2}{n-2}}\, dA_0 > 0$$

konstant ist, gilt

$$\int_{\partial M} u\, dA_0 \geq \delta$$

für ein geeignetes $\delta > 0$. Wir betrachten nun einen Punkt x_0, in dem die Funktion u ihr Minimum annimmt. Nach Lemma 3.32 liegt x_0 auf ∂M, und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0} u(x_0) \leq -\alpha \int_{\partial M} u\, dA_0 + \alpha A_0 u(x_0).$$

Kombiniert man die beiden Abschätzungen, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0} u(x_0) \leq -\alpha\delta + \alpha A_0 u(x_0).$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Evolutionsgleichung für u ein, so bekommt man

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_0) \geq (n-1)\, u(x_0)^{-\frac{2}{n-2}} \Big(\alpha\delta - \alpha A_0 u(x_0) - \frac{n-2}{2(n-1)} H_0(x_0) u(x_0)\Big).$$

Ist also $u(x_0)$ sehr klein, so ist $\frac{\partial}{\partial t} u(x_0) \geq 0$. Folglich ist die Funktion u nach unten beschränkt.

Sobald wir wissen, daß der Konformfaktor beschränkt ist, können wir wie oben zeigen, daß die Funktion u in allen Sobolev-Räumen $W^{r,p}(\partial M)$ beschränkt ist. Folglich läßt sich die Lösung über den Zeitpunkt T hinaus fortsetzen. Das ist ein Widerspruch.

3.5 Der asymptotisch flache Fall

Es sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension 3 mit Rand ∂M. Wir verlangen nicht, daß M kompakt ist, sondern lassen zu, daß M ein asymptotisch flaches Ende besitzt. Wir betrachten die Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2(H - \overline{H})g \tag{3.4}$$

auf ∂M mit den Nebenbedingungen

$$R = 0$$

in M und

$$g_{ij} \to \delta_{ij}$$

für $|x| \to \infty$. Die mittlere Krümmung erfüllt dann die Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} H = -2\,\frac{\partial}{\partial \nu} H + H(H - \overline{H})$$

auf ∂M. Dabei muß H so fortgesetzt werden, daß

$$\Delta H = 0$$

in M und

$$H \to \overline{H}$$

für $|x| \to \infty$ gilt.

3.34 Proposition. *Unter der Evolutionsgleichung (3.4) ist der Ausdruck*

$$\int_{\partial M} H\, dA - 8\pi m$$

monoton fallend.

Beweis: Aus der Evolutionsgleichung für H folgt

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{\partial M} H\, dA\right] = -2\int_{\partial M} \frac{\partial}{\partial \nu} H\, dA - \int_{\partial M} (H - \overline{H})^2\, dA.$$

Weiterhin gilt nach Definition der ADM-Masse

$$m = -\lim_{r\to\infty} \frac{1}{16\pi} \int_{\partial B_r^\delta(0)} (g_{ii,j} - g_{ij,i})\, \nu^j\, dA.$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dt}m = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_r^\delta(0)} \frac{\partial}{\partial x^j} H\, \nu^j\, dA,$$

und damit

$$\frac{d}{dt}m = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_r^\delta(0)} \frac{\partial}{\partial \nu} H\, dA.$$

Da $\Delta H = 0$ ist, folgt

$$\frac{d}{dt}m = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial M} \frac{\partial}{\partial \nu} H\, dA.$$

Kombiniert man die beiden Ergebnisse, so bekommt man

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{\partial M} H\, dA - 8\pi m\right] = -\int_{\partial M} (H - \overline{H})^2\, dA.$$

Daraus folgt die Behauptung.

3.35 Proposition. *Im Fall positiver mittlerer Krümmung nehmen wir an, daß M lokal konform flach und ∂M umbilisch ist. In diesem Fall nehmen wir außerdem an, daß der Rand der universellen Überlagerung von M zusammenhängend ist. Dann besitzt das Anfangsrandwertproblem (3.4) eine Lösung für alle $t \geq 0$, die gegen eine Metrik mit konstanter mittlerer Krümmung und verschwindender Skalarkrümmung konvergiert.*

Beweis: Wir gehen wie in Abschnitt 3.4 vor. Setzt man $g = u^4 g_0$, so kann man zeigen, daß u beschränkt ist. Aus der Formel

$$\int_{\partial M} H\, dA - 8\pi m = 4 \int_M |\overset{0}{\nabla} u|^2\, dV_0 + \int_{\partial M} H_0 u^2\, dA_0 - 8\pi m_0$$

folgt

$$\int_{\partial M} H\, dA - 8\pi m \geq -C.$$

Aufgrund von Proposition 3.34 gilt daher

$$\int_{T-1}^{T} \int_{\partial M} (H - \overline{H})^2\, dA\, dt \leq C.$$

Daraus folgt

$$\int_{\partial M} (H - \overline{H})^2 \, dA \leq C,$$

und damit

$$\int_{\partial M} H^2 \, dA \leq C.$$

Man kann nun wie in Abschnitt 3.4 zeigen, daß der Ausdruck

$$\int_{\partial M} u^{\frac{2}{n-2}} \, |u^{(m)}|^p \, dA_0$$

für alle $m \geq 0$ und $p \geq 2$ beschränkt ist. Folglich ist u beschränkt in $W^{r,p}(\partial M)$ für alle $r \geq 0$ und $p \geq 2$. Daraus folgt die Langzeitexistenz. Die Konvergenz folgt wieder aus der Tatsache, daß (3.4) ein Gradientenfluß ist.

Kapitel 4

Der Ricci-Fluß auf Kähler-Flächen

4.1 Definition des Kähler-Ricci-Flusses

Es sei M eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension 2. Wir nehmen an, daß die erste Chern-Klasse von M ein Vielfaches der Kähler-Klasse ist. Der Kähler-Ricci-Fluß ist dann definiert durch

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{i\bar{j}} = -R_{i\bar{j}} + r g_{i\bar{j}}.$$

Die Zahl r ist definiert durch

$$[R_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge dz^{\bar{j}}] = r\, [g_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge dz^{\bar{j}}].$$

Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß entweder $r = -1$ oder $r = 0$ oder $r = 1$ ist. Im Fall $r \leq 0$ gilt der folgende Satz von H.D. Cao [8].

4.1 Theorem. *Sei $r \leq 0$. Dann konvergiert jede Lösung des Kähler-Ricci-Flusses gegen eine Kähler-Einstein-Metrik.*

Im Fall $r > 0$ ist zu erwarten, daß Singularitäten auftreten. Um dies auszuschließen, nehmen wir an, daß M positive holomorphe Bischnittkrümmung hat, d.h.

$$R^{i\bar{j}k\bar{l}} v_i v_{\bar{j}} w_k w_{\bar{l}} > 0$$

für $v, w \neq 0$. Nach einem Satz von Bishop und Goldberg [6] gilt dann $b_2(M) = 1$, so daß die Kohomologiebedingung automatisch erfüllt ist.

Im ersten Schritt ist zu zeigen, daß diese Bedingung unter dem Kähler-Ricci-Fluß erhalten ist. Dies wurde von N. Mok [26] mit Hilfe von Hamiltons Maximumprinzip für Tensoren bewiesen.

4.2 Theorem. *Die Positiviät der holomorphen Bischnittkrümmungen bleibt erhalten unter dem Kähler-Ricci-Fluß.*

Wir erwarten, daß jede Lösung mit positiver holomorpher Bischnittkrümmung gegen eine Kähler-Einstein-Metrik konvergiert. In diesem Kapitel zeigen wir das folgende Teilresultat. Ein besseres Resultat kann mit Hilfe von geeigneten Energiefunktionalen bewiesen werden (siehe [10]).

4.3 Theorem. *Wir betrachten eine Lösung des Kähler-Ricci-Flusses mit positiver holomorpher Bischnittkrümmung. Ist der Injektivitätsradius von M nach unten beschränkt, so konvergiert die Lösung gegen eine Kähler-Einstein-Metrik.*

4.2 Die Harnack-Ungleichung

Die folgende differentielle Harnack-Ungleichung wurde von H.D. Cao [9] hergeleitet.

4.4 Theorem. *Für jedes Vektorfeld X gilt*

$$\frac{\partial}{\partial t}R_{i\bar{j}}+g^{k\bar{l}}R_{i\bar{l}}R_{k\bar{j}}-R_{i\bar{j}}+\nabla_k R_{i\bar{j}}\,X^k+\nabla_{\bar{l}}R_{i\bar{j}}\,X^{\bar{l}}+R_{i\bar{j}k\bar{l}}\,X^kX^{\bar{l}}+\frac{e^t}{e^t-1}\,R_{i\bar{j}}\geq 0.$$

Insbesondere gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}R+\nabla_k R\,X^k+\nabla_{\bar{l}}R\,X^{\bar{l}}+R_{k\bar{l}}\,X^kX^{\bar{l}}+\frac{e^t}{e^t-1}\,R\geq 0.$$

Aus der differentiellen Harnack-Ungleichung folgt durch Integration:

4.5 Korollar. *Ist $t_1 < t_2$, so gilt*

$$(e^{t_1}-1)R(x_1,t_1)\leq e^{\frac{1}{4}\Delta(x_1,t_1,x_2,t_2)}\,(e^{t_2}-1)R(x_2,t_2),$$

wobei

$$\Delta(x_1,t_1,x_2,t_2) = \inf_{\substack{\gamma(t_1)=x_1\\ \gamma(t_2)=x_2}} \int_{t_1}^{t_2} |\dot\gamma(t)|_t^2\,dt$$

ist.

Der Ausdruck $\Delta(x_1,t_1,x_2,t_2)$ kann wie folgt abgeschätzt werden.

4.6 Proposition. *Es gilt*

$$\Delta(x_1,t_1,x_2,t_2) \le \frac{e^{t_2-t_1}-1}{(t_2-t_1)^2}\, d_{t_1}(x_1,x_2)^2.$$

Beweis: Wir wählen den Weg γ so, daß

$$|\dot\gamma(t)|_{t_1} = \frac{1}{t_2-t_1}\, d_{t_1}(x_1,x_2)$$

ist. Dann gilt

$$|\dot\gamma(t)|_{t_1}^2 = \frac{1}{(t_2-t_1)^2}\, d_{t_1}(x_1,x_2)^2.$$

Also ist

$$|\dot\gamma(t)|_t^2 \le \frac{e^{t-t_1}}{(t_2-t_1)^2}\, d_{t_1}(x_1,x_2)^2.$$

Daraus folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} |\dot\gamma(t)|_t^2\,dt \le \frac{e^{t_2-t_1}-1}{(t_2-t_1)^2}\, d_{t_1}(x_1,x_2)^2.$$

Folglich ist

$$\Delta(x_1,t_1,x_2,t_2) \le \frac{e^{t_2-t_1}-1}{(t_2-t_1)^2}\, d_{t_1}(x_1,x_2)^2.$$

4.3 Exponentielle Konvergenz

Im folgenden zeigen wir, daß die holomorphen Bischnittkrümmungen von M nach unten beschränkt sind.

4.7 Lemma. *Seien x_0 und t_0 beliebig. Dann gibt es ein x mit $d_{t_0}(x_0, x) \leq 1$ und ein t mit $t_0 - 1 \leq t \leq t_0$, so daß $R(x,t) \leq 200$ ist.*

Beweis: Angenommen, $R(x,t) > 200$ für alle x und t mit $d_{t_0}(x_0, x) \leq 1$ und $t_0 - 1 \leq t \leq t_0$. Die Evolutionsgleichung für die Skalarkrümmung liefert

$$\frac{\partial}{\partial t} R \geq \Delta R + \frac{R^2}{2} - R.$$

Folglich ist

$$\frac{\partial}{\partial t} R \geq \Delta R + \frac{R^2}{4}$$

für $d_{t_0}(x_0, x) \leq 1$ und $t_0 - 1 \leq t \leq t_0$. Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{R}\Big) \leq \Delta\Big(\frac{1}{R}\Big) - \frac{2}{R^3}|\nabla R|^2 - \frac{1}{4}$$

für $d_{t_0}(x_0, x) \leq 1$ und $t_0 - 1 \leq t \leq t_0$. Damit ist

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{R} + \frac{t - t_0 + 1}{4}\Big) \leq \Delta\Big(\frac{1}{R} + \frac{t - t_0 + 1}{4}\Big) - \frac{2}{R^3}|\nabla R|^2$$

für $d_{t_0}(x_0, x) \leq 1$ und $t_0 - 1 \leq t \leq t_0$. Wir wählen nun eine Funktion ϕ mit $\phi(x_0) = 1$, $\phi(x) \leq 0$ für $d_{t_0}(x_0, x) > 1$, und

$$\nabla_i \nabla_{\bar{j}} \phi \geq -2 g_{i\bar{j}}(t_0).$$

Die Evolutionsgleichung für $g_{i\bar{j}}$ liefert

$$\nabla_i \nabla_{\bar{j}} \phi \geq -6 g_{i\bar{j}}(t)$$

für $t_0 - 1 \leq t \leq t_0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\Big(\phi\Big(\frac{1}{R} + \frac{t - t_0 + 1}{4}\Big)\Big) \leq \Delta\Big(\phi\Big(\frac{1}{R} + \frac{t - t_0 + 1}{4}\Big)\Big) \\
&+ \frac{2}{R^2}\,\nabla\phi \cdot \nabla R \\
&- \frac{2}{R^3}\,\phi|\nabla R|^2 \\
&+ 12\Big(\frac{1}{R} + \frac{t - t_0 + 1}{4}\Big)
\end{aligned}$$

für $d_{t_0}(x_0, x) \leq 1$ und $t_0 - 1 \leq t \leq t_0$. Umformung ergibt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\phi\Big(\frac{1}{R} + \frac{t - t_0 + 1}{4}\Big)\Big) \leq \Delta\Big(\phi\Big(\frac{1}{R} + \frac{t - t_0 + 1}{4}\Big)\Big) \\ + \frac{4}{4 + (t - t_0 + 1)R}\,\frac{2}{R}\,\nabla\Big(\phi\Big(\frac{1}{R} + \frac{t - t_0 + 1}{4}\Big)\Big) \cdot \nabla R \\ - \frac{(t - t_0 + 1)R}{4 + (t - t_0 + 1)R}\,\frac{2}{R^3}\,\phi|\nabla R|^2 \\ + 12\Big(\frac{1}{R} + \frac{t - t_0 + 1}{4}\Big)\end{aligned}$$

für $d_{t_0}(x_0, x) \leq 1$ und $t_0 - 1 \leq t \leq t_0$. Nun gilt

$$12\Big(\frac{1}{R} + \frac{t - t_0 + 1}{4}\Big) \leq \frac{3}{50} + 3(t - t_0 + 1)$$

für $d_{t_0}(x_0, x) \leq 1$ und $t_0 - 1 \leq t \leq t_0$. Nach dem Maximumprinzip gilt daher

$$\phi\Big(\frac{1}{R} + \frac{t - t_0 + 1}{4}\Big) \leq \frac{1}{200} + \frac{3}{50}(t - t_0 + 1) + \frac{3}{2}(t - t_0 + 1)^2$$

für $d_{t_0}(x_0, x) \leq 1$ und $t_0 - 1 \leq t \leq t_0$. Insbesondere gilt

$$\frac{1}{4}(t - t_0 + 1) < \frac{1}{200} + \frac{3}{50}(t - t_0 + 1) + \frac{3}{2}(t - t_0 + 1)^2.$$

Setzt man

$$t - t_0 + 1 = \frac{1}{15},$$

so bekommt man

$$\frac{50}{3000} < \frac{47}{3000}.$$

Das ist ein Widerspruch.

4.8 Lemma. *Der Durchmesser von M ist beschränkt.*

Beweis: Wir betrachten eine Geodäte γ mit minimaler Länge. Auf γ wählen wir Zwischenpunkte x_i im Abstand d. Die Zahl d wird weiter unten festgelegt. Nach Lemma 4.7 gibt es zu jedem Index i ein y_i mit $d_{t_0}(x_i, y_i) \leq 1$ und ein t_i mit $t_0 - 1 \leq t_i \leq t_0$, so daß

$$R(y_i, t_i) \leq 200$$

ist. Die Harnack-Ungleichung liefert

$$R(y, t_0 - 2) \leq C$$

für alle Punkte y mit $d_{t_0-2}(y_i, y) \leq 1$.

Wir betrachten nun zum Zeitpunkt $t_0 - 2$ die Kugel um y_i mit Radius 1. Da der Injektivitätsradius von M nach unten beschränkt ist, ist das Volumen von jeder dieser Kugeln nach unten beschränkt. Wir behaupten, daß die Kugeln disjunkt sind. Ist $d_{t_0-2}(y_i, y) \leq 1$, so ist $d_{t_0}(y_i, y) \leq 8$, und damit $d_{t_0}(x_i, y) \leq 9$. Wählt man also den Abstand $d > 18$, so sind die Kugeln disjunkt. Da das Volumen jeder einzelnen Kugel nach unten beschränkt ist, ist die Anzahl der Kugeln nach oben beschränkt. Folglich ist die Länge von γ beschränkt. Da die Geodäte γ beliebig gewählt war, ist der Durchmesser von M beschränkt.

4.9 Lemma. *Die Skalarkrümmung ist beschränkt.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus der Harnack-Ungleichung.

4.10 Lemma. *Die holomorphen Bischnittkrümmungen sind nach unten beschränkt.*

Beweis: Angenommen, die holomorphen Bischnittkrümmungen wären nicht nach unten beschränkt. Führt man einen Grenzübergang durch, so erhält man eine Metrik auf M, die lediglich nicht-negative holomorphe Bischnittkrümmung hat. Aus der Klassifikation in [18] folgt, daß M biholomorph zu $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^1$ oder $\mathbb{C}^2$ ist. Da M kompakt ist, muß M biholomorph zu $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ sein. Da $b_2(M) = 1$ ist, ist dies unmöglich.

Da die Kähler-Klasse mit der ersten Chern-Klasse übereinstimmt, gibt es eine Funktion f mit

$$-R_{i\bar{j}} + g_{i\bar{j}} = \nabla_i \nabla_{\bar{j}} f.$$

Die Funktion f erfüllt die Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \Delta f + f.$$

Wir definieren nun einen Tensor M_{ik} durch

$$M_{ik} = \nabla_i \nabla_k f.$$

Wir berechnen zuerst die Evolutionsgleichung für den Tensor M_{ik}.

4.11 Proposition. *Der Tensor M_{ik} erfüllt die Evolutionsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{ik} = \Delta M_{ik} + M_{ik} - \frac{1}{2} g^{r\bar{s}} R_{i\bar{s}} M_{rk} - \frac{1}{2} g^{r\bar{s}} R_{k\bar{s}} M_{ir} - g^{p\bar{q}} g^{r\bar{s}} R_{i\bar{q}k\bar{s}} M_{pr}.$$

Beweis: Es gilt

$$\nabla_i \nabla_k f = \partial_i \partial_k - g^{r\bar{s}} \partial_i g_{k\bar{s}} \partial_r f.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_i \nabla_k f = \nabla_i \nabla_k \frac{\partial}{\partial t} f + g^{r\bar{s}} \nabla_i R_{k\bar{s}} \nabla_r f.$$

Mit Hilfe der zweiten Bianchi-Identität bekommt man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \nabla_i \nabla_k f &= \nabla_i \nabla_k \frac{\partial}{\partial t} f + g^{r\bar{s}} \nabla_i R_{k\bar{s}} \nabla_r f \\
&= g^{p\bar{q}} \nabla_i \nabla_k \nabla_p \nabla_{\bar{q}} f + \nabla_i \nabla_k f + g^{r\bar{s}} \nabla_i R_{k\bar{s}} \nabla_r f \\
&= g^{p\bar{q}} \nabla_p \nabla_i \nabla_k \nabla_{\bar{q}} f + \nabla_i \nabla_k f + g^{r\bar{s}} \nabla_i R_{k\bar{s}} \nabla_r f \\
&= g^{p\bar{q}} \nabla_p \nabla_i \nabla_{\bar{q}} \nabla_k f + \nabla_i \nabla_k f + g^{r\bar{s}} \nabla_i R_{k\bar{s}} \nabla_r f \\
&= g^{p\bar{q}} \nabla_p \nabla_{\bar{q}} \nabla_i \nabla_k f + \nabla_i \nabla_k f + g^{r\bar{s}} \nabla_i R_{k\bar{s}} \nabla_r f \\
&\quad - g^{p\bar{q}} g^{r\bar{s}} \nabla_p (R_{i\bar{q}k\bar{s}} \nabla_r f) \\
&= g^{p\bar{q}} \nabla_p \nabla_{\bar{q}} \nabla_i \nabla_k f + \nabla_i \nabla_k f + g^{r\bar{s}} \nabla_i R_{k\bar{s}} \nabla_r f \\
&\quad - g^{p\bar{q}} g^{r\bar{s}} R_{i\bar{q}k\bar{s}} \nabla_p \nabla_r f - g^{p\bar{q}} g^{r\bar{s}} \nabla_p R_{i\bar{q}k\bar{s}} \nabla_r f \\
&= g^{p\bar{q}} \nabla_p \nabla_{\bar{q}} \nabla_i \nabla_k f + \nabla_i \nabla_k f + g^{r\bar{s}} \nabla_i R_{k\bar{s}} \nabla_r f \\
&\quad - g^{p\bar{q}} g^{r\bar{s}} R_{i\bar{q}k\bar{s}} \nabla_p \nabla_r f - g^{p\bar{q}} g^{r\bar{s}} \nabla_i R_{p\bar{q}k\bar{s}} \nabla_r f \\
&= g^{p\bar{q}} \nabla_p \nabla_{\bar{q}} \nabla_i \nabla_k f + \nabla_i \nabla_k f \\
&\quad - g^{p\bar{q}} g^{r\bar{s}} R_{i\bar{q}k\bar{s}} \nabla_p \nabla_r f.
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \nabla_i \nabla_k f &= g^{p\bar{q}} \nabla_p \nabla_{\bar{q}} \nabla_i \nabla_k f + \nabla_i \nabla_k f \\
&\quad - g^{p\bar{q}} g^{r\bar{s}} R_{i\bar{q}k\bar{s}} \nabla_p \nabla_r f \\
&= g^{p\bar{q}} \nabla_{\bar{q}} \nabla_p \nabla_i \nabla_k f + \nabla_i \nabla_k f \\
&\quad - g^{p\bar{q}} g^{r\bar{s}} R_{p\bar{q}i\bar{s}} \nabla_r \nabla_k f \\
&\quad - g^{p\bar{q}} g^{r\bar{s}} R_{p\bar{q}k\bar{s}} \nabla_i \nabla_r f \\
&\quad - g^{p\bar{q}} g^{r\bar{s}} R_{i\bar{q}k\bar{s}} \nabla_p \nabla_r f \\
&= g^{p\bar{q}} \nabla_{\bar{q}} \nabla_p \nabla_i \nabla_k f + \nabla_i \nabla_k f \\
&\quad - g^{r\bar{s}} R_{i\bar{s}} \nabla_r \nabla_k f \\
&\quad - g^{r\bar{s}} R_{k\bar{s}} \nabla_i \nabla_r f \\
&\quad - g^{p\bar{q}} g^{r\bar{s}} R_{i\bar{q}k\bar{s}} \nabla_p \nabla_r f.
\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{ik} = g^{p\bar{q}}\, \nabla_p \nabla_{\bar{q}} M_{ik} + M_{ik} - g^{p\bar{q}} g^{r\bar{s}}\, R_{i\bar{q}k\bar{s}}\, M_{pr}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{ik} = g^{p\bar{q}}\, \nabla_{\bar{q}} \nabla_p M_{ik} + M_{ik} - g^{r\bar{s}}\, R_{i\bar{s}}\, M_{rk} - g^{r\bar{s}}\, R_{k\bar{s}}\, M_{ir} - g^{p\bar{q}} g^{r\bar{s}}\, R_{i\bar{q}k\bar{s}}\, M_{pr}.$$

Addiert man die beiden Gleichungen, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{ik} = \Delta M_{ik} + M_{ik} - \frac{1}{2} g^{r\bar{s}}\, R_{i\bar{s}}\, M_{rk} - \frac{1}{2} g^{r\bar{s}}\, R_{k\bar{s}}\, M_{ir} - g^{p\bar{q}} g^{r\bar{s}}\, R_{i\bar{q}k\bar{s}}\, M_{pr}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

4.12 Proposition. *Das Betragsquadrat des Tensors M_{ik} erfüllt die Evolutionsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t} |M|^2 = \Delta |M|^2 - 2|\nabla M|^2 - 2R^{i\bar{j}k\bar{l}} M_{ik} M_{\bar{j}\bar{l}}.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} |M|^2 &= \frac{\partial}{\partial t} (g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} M_{ik} M_{\bar{j}\bar{l}}) \\
&= g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}}\, \frac{\partial}{\partial t} M_{ik}\, M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&\quad + g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}}\, M_{ik}\, \frac{\partial}{\partial t} M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial t} g^{i\bar{j}}\, g^{k\bar{l}}\, M_{ik}\, M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&\quad + g^{i\bar{j}}\, \frac{\partial}{\partial t} g^{k\bar{l}}\, M_{ik}\, M_{\bar{j}\bar{l}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}}\,\Delta M_{ik}\,M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&\quad - \frac{1}{2} g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} g^{r\bar{s}}\,R_{i\bar{s}}\,M_{rk}\,M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&\quad - \frac{1}{2} g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} g^{r\bar{s}}\,R_{k\bar{s}}\,M_{ir}\,M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&\quad - g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} g^{p\bar{q}} g^{r\bar{s}}\,R_{i\bar{q}k\bar{s}}\,M_{pr}\,M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&\quad + g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}}\,M_{ik}\,\Delta M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&\quad - \frac{1}{2} g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} g^{r\bar{s}}\,R_{r\bar{j}}\,M_{ik}\,M_{\bar{s}\bar{l}} \\
&\quad - \frac{1}{2} g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} g^{r\bar{s}}\,R_{r\bar{l}}\,M_{ik}\,M_{\bar{j}\bar{s}} \\
&\quad - g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} g^{p\bar{q}} g^{r\bar{s}}\,R_{p\bar{j}r\bar{l}}\,M_{ik}\,M_{\bar{q}\bar{s}} \\
&\quad + R^{i\bar{j}}\,M_{ik}\,M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&\quad + g^{i\bar{j}} R^{k\bar{l}}\,M_{ik}\,M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&= g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}}\,\Delta M_{ik}\,M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&\quad - \frac{1}{2} R^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}}\,M_{ik}\,M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&\quad - \frac{1}{2} g^{i\bar{j}} R^{k\bar{l}}\,M_{ik}\,M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&\quad - R^{i\bar{j}k\bar{l}}\,M_{ik}\,M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&\quad + g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}}\,M_{ik}\,\Delta M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&\quad - \frac{1}{2} R^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}}\,M_{ik}\,M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&\quad - \frac{1}{2} g^{i\bar{j}} R^{k\bar{l}}\,M_{ik}\,M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&\quad - R^{i\bar{j}k\bar{l}}\,M_{ik}\,M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&\quad + R^{i\bar{j}}\,M_{ik}\,M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&\quad + g^{i\bar{j}} R^{k\bar{l}}\,M_{ik}\,M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&= g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}}\,\Delta M_{ik}\,M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&\quad + g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}}\,M_{ik}\,\Delta M_{\bar{j}\bar{l}} \\
&\quad - 2R^{i\bar{j}k\bar{l}}\,M_{ik}\,M_{\bar{j}\bar{l}}.
\end{aligned}
$$

Also ist

$$\frac{\partial}{\partial t}|M|^2 = \Delta|M|^2 - 2|\nabla M|^2 - 2R^{i\bar{j}k\bar{l}}\,M_{ik}\,M_{\bar{j}\bar{l}}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

4.13 Proposition. *Das Betragsquadrat des Tensors M_{ik} konvergiert exponentiell gegen* 0.

Beweis: Es genügt, den Krümmungsterm zu betrachten. Da M die komplexe Dimension 2 hat, kann man den Tensor M_{ik} in der Form

$$M_{ik} = v_i w_k + v_k w_i$$

darstellen. Damit ist

$$M_{\bar{j}\bar{l}} = v_{\bar{j}} w_{\bar{l}} + v_{\bar{l}} w_{\bar{j}}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} M_{ik} M_{\bar{j}\bar{l}} &= g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} (v_i v_{\bar{j}} w_k w_{\bar{l}} + v_i v_{\bar{l}} w_k w_{\bar{j}} + v_k v_{\bar{j}} w_i w_{\bar{l}} + v_k v_{\bar{l}} w_i v_{\bar{j}}) \\ &\leq 4 g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} v_i v_{\bar{j}} w_k w_{\bar{l}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} R^{i\bar{j}k\bar{l}} M_{ik} M_{\bar{j}\bar{l}} &= R^{i\bar{j}k\bar{l}} (v_i v_{\bar{j}} w_k w_{\bar{l}} + v_i v_{\bar{l}} w_k w_{\bar{j}} + v_k v_{\bar{j}} w_i w_{\bar{l}} + v_k v_{\bar{l}} w_i w_{\bar{j}}) \\ &= 4 R^{i\bar{j}k\bar{l}} v_i v_{\bar{j}} w_k w_{\bar{l}}. \end{aligned}$$

Da die holomorphen Bischnittkrümmungen nach unten beschränkt sind, gilt

$$R^{i\bar{j}k\bar{l}} v_i v_{\bar{j}} w_k w_{\bar{l}} \geq \eta\, g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} v_i v_{\bar{j}} w_k w_{\bar{l}},$$

und damit

$$R^{i\bar{j}k\bar{l}} M_{ik} M_{\bar{j}\bar{l}} \geq \eta\, g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} M_{ik} M_{\bar{j}\bar{l}}.$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Evolutionsgleichung für $|M|^2$ ein, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} |M|^2 \leq \Delta |M|^2 - 2|\nabla M|^2 - 2\eta |M|^2.$$

Nach dem Maximumprinzip konvergiert $|M|^2$ exponentiell gegen 0.

Unter dem Kähler-Ricci-Fluß gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{i\bar{j}} = \nabla_i \nabla_{\bar{j}} f, \qquad \frac{\partial}{\partial t} g_{ik} = 0.$$

Wir modifizieren nun den Kähler-Ricci-Fluß durch Diffeomorphismen. Auf diese Weise erhält man den modifizierten Kähler-Ricci-Fluß

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{i\bar{j}} = 0, \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial t} g_{ik} = -\nabla_i \nabla_k f.$$

Der Kähler-Ricci-Fluß verändert die symplektische Struktur und erhält die komplexe Struktur. Der modifizierte Kähler-Ricci-Fluß dagegen erhält die symplektische Struktur und verändert die komplexe Struktur.

4.14 Theorem. *Die Lösungen des modifizierten Kähler-Ricci-Flusses konvergieren exponentiell.*

Beweis: Für den modifizierten Kähler-Ricci-Fluß gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ik} = -M_{ik}.$$

Nach Proposition 4.13 konvergiert das Betragsquadrat dieses Tensors exponentiell gegen 0. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 14.2 in [17].

4.15 Theorem. *Die Lösungen des Kähler-Ricci-Flusses konvergieren exponentiell.*

Beweis: Nach Theorem 4.14 konvergieren die Lösungen des modifizierten Kähler-Ricci-Flusses exponentiell gegen eine Metrik h. Die Metrik h ist ein Kähler-Ricci-Soliton. Betrachtet man die Futaki-Invariante von M, so bekommt man, daß h eine Kähler-Einstein-Metrik ist (vgl. [9]). Folglich konvergiert die Differenz $R_{i\bar{j}} - g_{i\bar{j}}$ unter dem modifizierten Kähler-Ricci-Fluß exponentiell gegen 0. Dann konvergiert die Differenz $R_{i\bar{j}} - g_{i\bar{j}}$ aber auch unter dem normalen Kähler-Ricci-Fluß exponentiell gegen 0. Daraus folgt die Behauptung.

Literaturverzeichnis

[1] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions,* Comm. Pure Appl. Math. 12, 623-727 (1959)

[2] H. Amann, *Global existence for semilinear parabolic systems,* J. Reine Angew. Math. 360, 46-83 (1985)

[3] T. Aubin, *The scalar curvature,* Differential geometry and relativity, edited by Cahen and Flato (1976)

[4] T. Aubin, *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations,* Springer-Verlag (1982)

[5] J. Bartz, M. Struwe and R. Ye, *A new approach to the Ricci flow on S^2,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 21, 475-482 (1994)

[6] R.L. Bishop and S.I. Goldberg, *On the 2nd cohomology group of a Kähler manifold of positive curvature,* Proc. Amer. Math. Soc. 16, 283-297 (1965)

[7] H. Bray, *Proof of the Riemannian Penrose conjecture using the positive mass theorem,* preprint (1999)

[8] H.D. Cao, *Deformation of Kähler metrics to Kähler-Einstein metrics on compact Kähler manifolds,* Invent. Math. 81, 359-372 (1985)

[9] H.D. Cao, *On Harnacks inequalities for the Kähler-Ricci flow,* Invent. Math. 109, 247-263 (1992)

[10] X.X. Chen and G. Tian, *Ricci flow on Kähler-Einstein surfaces,* preprint (2000)

[11] B. Chow, *The Ricci flow on the 2-sphere,* J. Diff. Geom. 33, 325-334 (1991)

[12] E. DiBenedetto, *Continuity of weak solutions to a general porous medium equation,* Indiana Univ. Math. J. 32, 83-118 (1983)

[13] J.F. Escobar, *The Yamabe problem on manifolds with boundary,* J. Diff. Geom. 35, 21-84 (1992)

[14] J.F. Escobar, *Conformal deformation of a Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary,* Ann. of Math. 136, 1-50 (1992)

[15] A. Futaki, *An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics,* Invent. Math. 73, 437-443 (1983)

[16] B. Gidas, W. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle,* Comm. Math. Phys. 68, 209-243 (1979)

[17] R. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature,* J. Diff. Geom. 17, 255-306 (1982)

[18] R. Hamilton, *Four-manifolds with positive curvature operator,* J. Diff. Geom. 24, 153-179 (1986)

[19] R. Hamilton, *The Ricci flow on surfaces,* Contemp. Math. 71, 237-262 (1988)

[20] T. Hintermann, *Evolution equations with dynamic boundary conditions,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh A 113, 43-60 (1989)

[21] S.Z. Huang and P. Takac, *Convergence in gradient-like systems which are asymptotically autonomous and analytic,* preprint (1999)

[22] G. Huisken, *Ricci deformation of the metric on Riemannian manifold,* J. Diff. Geom. 18, 47-62 (1985)

[23] J. Kazdan and F. Warner, *Curvature functions for compact* 2*-manifolds,* Ann. of Math. 99, 14-46 (1974)

[24] R. Mazzeo, D. Pollack and K. Uhlenbeck, *Connected sum constructions for constant scalar curvature metrics,* Topol. Methods Nonlinear Anal. 6, 207-233 (1995)

[25] M. Mitrea and M. Taylor, *Potential theory on Lipschitz domains in Riemannian manifolds: Sobolev-Besov spaces results and the Poisson problem,* J. Funct. Anal. 176, 1-79 (2000)

[26] N. Mok, *The uniformization theorem for compact Kähler manifolds of nonnegative holomorphic bisectional curvature,* J. Diff. Geom. 27, 179-214 (1988)

[27] S. Mori, *Projective manifolds with ample tangent bundles,* Ann. of Math. 110, 593-606 (1979)

[28] J. Moser, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger,* Indiana Univ. Math. J. 20, 1077-1092 (1971)

[29] E. Onofri, *On the positivity of the effective action in a theory of random surfaces,* Comm. Math. Phys. 86, 321-326 (1982)

[30] B. Osgood, R. Phillips and P. Sarnak, *Extremals of determinants of Laplacians,* J. Funct. Anal. 80, 148-211 (1988)

[31] A. Polden, *Curves and surfaces of least total curvature,* Dissertation, Universität Tübingen (1996)

[32] P. Sacks, *Continuity of solutions of a singular parabolic equation,* Nonlinear Anal. 7, 387-409 (1983)

[33] R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature,* J. Diff. Geom. 20, 479-495 (1984)

[34] R. Schoen, *The existence of weak solutions with prescribed singular behaviour for a conformally invariant scalar equation,* Comm. Pure Appl. Math. 41, 317-392 (1988)

[35] R. Schoen and S.T. Yau, *Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature,* Invent. Math. 92, 47-71 (1988)

[36] L. Simon, *Asymptotics for a class of non-linear evolution equations with applications to geometric problems,* Ann. of Math. 118, 525-571 (1983)

[37] Y.T. Siu and S.T. Yau, *Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature,* Invent. Math. 59, 189-204 (1980)

[38] M. Struwe, *Curvature flows on surfaces,* preprint (2000)

[39] M. Taylor, *Pseudodifferential Operators,* Princeton University Press (1981)

[40] G. Tian, *Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature,* Invent. Math. 130, 1-37 (1997)

[41] N. Trudinger, *On embedding into Orlicz spaces and some applications,* J. Math. Mech. 17, 473-484 (1967)

[42] N. Trudinger, *Remarks concerning conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 22, 265-274 (1968)

[43] H. Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds,* Osaka Math. J. 12, 21-37 (1960)

[44] S.T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation,* Comm. Pure Appl. Math. 31, 339-411 (1978)

[45] R. Ye, *Global existence and convergence of Yamabe flow,* J. Diff. Geom. 39, 35-50 (1994)

Lebenslauf

28. 06. 1981	geboren in Tübingen als Sohn von Helga und Martin Brendle
09. 1988 - 07. 1991	Besuch der Grundschule Tübingen-Hagelloch
09. 1991 - 06. 1998	Besuch des Uhland-Gymnasiums Tübingen
1995, 1996, 1997	Bundessieger im Bundeswettbewerb Mathematik
18. 06. 1998	Abitur (Gesamtnote: 1.0)
ab 10. 1998	Studium der Mathematik und Physik an der Universität Tübingen
21. 10. 1998	Vordiplom (Note in allen Teilprüfungen: sehr gut)
01. 10. 1999	Diplom (Gesamtnote: mit Auszeichnung, Preis des mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach für die Diplomarbeit)

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten G. Betsch, W. Dittrich, P. Grabmayr, C. Hering, G. Huisken, H. Kaul, B. Leeb, P. Leinen, F. Loose, R. Nagel, U. Schlotterbeck, P. Schmid, M. Voit und M. Wolff.