Masseschranken und Stabilität von Blätterungen für rotierende Sterne

Jürgen Klenk
Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Auf der Morgenstelle 10
72076 Tübingen
juergen.klenk@uni–tuebingen.de

Tübingen, den 1. August 1996

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden mit differentialgeometrischen Mitteln notwendige Bedingungen für die Existenz rotierender Sterne gewonnen. Wir zeigen zuerst, daß rotierende Sterne ausgezeichntete Anfangsdatensätze besitzen. Danach zeigen wir, wie auf einem Anfangsdatensatz die Skalarkrümmung die Größe eines Gebietes beeinflußt, und leiten daraus eine obere Schranke an das Masse–Radius–Verhältnis her. Schließlich zeigen wir, daß ein Anfangsdatensatz eine stabile Blätterung aus Flächen konstanter mittlerer Krümmung besitzt, wenn eine physikalisch sinnvolle Bedingung an die Zustandsgleichung gestellt wird.

1 Sternmodelle

1.1 Die Einsteinschen Feldgleichungen

In der allgemeinen Relativitätstheorie wird Gravitation als Krümmung der sogenannten Raumzeit, einer vierdimensionalen Lorentzmannigfaltigkeit $(N, {}^4g)$ mit Metrik ${}^4g$, beschrieben. Dabei geben die Einsteinschen Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie,

$$ {}^4\mathrm{G} := {}^4\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}\,{}^4\mathrm{R}\,{}^4g = 8\pi T $$

an, wie die Geometrie der Raumzeit, also die Metrik ${}^4g$, mit der Materieverteilung, die durch den Energie–Impuls–Tensor T gegeben ist, verknüpft ist. Gesucht ist also eine vierdimensionale Lorentzmannigfaltigkeit $(N, {}^4g)$, die bei vorgegebenem Energie–Impuls–Tensor T diese Gleichungen erfüllt.

1.2 Der Energie–Impuls–Tensor

Der Energie–Impuls–Tensor beinhaltet alle Information über Energiedichte, Impulsdichte und Spannungen der Materie, die ein Beobachter messen kann.

Wenn v die Geschwindigkeit eines Beobachters, d.h. v ein zeitartig–zukunftsgerichteter Einheitsvektor, und n ein beliebiger weiterer Einheitsvektor ist, so ist $T(v,v)$ die von diesem Beobachter gemessene Energiedichte, und $-T(v,n)$ die Komponente der Impulsdichte in Richtung n. Für raumartige Vektoren w_1, w_2 ist $T(w_1, w_2)$ die w_1–Komponente der Spannung der Materie in w_2–Richtung.

Sternmaterie wird meistens durch den Energie–Impuls–Tensor einer idealen Flüssigkeit oder eines Gases,

$$T = (\varepsilon + p)\, u^\flat \otimes u^\flat + p\, {}^4g\,,$$

modelliert. Dabei sind ε die Energiedichte, p der Druck, und u das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit. Diese Wahl des Energie–Impuls–Tensors schließt allerdings Scherspannungen, anisotrope Drücke sowie Viskosität aus. Da diese Größen aber für realistische Sterne nur eine untergeordnete Rolle spielen, stellt dies dennoch ein gutes Modell zur Beschreibung rotierender Sterne dar.

1.3 Energiebedingungen

An den Energie–Impuls–Tensor werden Energiebedingungen gestellt, die sich aus physikalischen Prinzipien ergeben. Wie wir gleich sehen werden, sind dies sogenannte Definitheitsbedingungen. Wie fundamental diese Bedingungen für die Theorie sind, kann man beispielsweise daran sehen, daß Schoen und Yau das Theorem über die Positivität der Masse [1] unter Annahme der schwachen Energiebedingung und später eine Verallgemeinerung [2] unter Annahme der dominanten Energiebedingung beweisen konnten.

Die wichtigsten Energiebedingungen sind:

1. Schwache Energiebedingung. Diese besagt, daß die Energiedichte, gemessen von einem beliebigen Beobachter, stets nicht negativ ist. Für ein zeitartiges normiertes Vektorfeld v ist also $T(v,v) \geq 0$.

2. Starke Energiebedingung. Diese besagt, daß die Energiedichte stets die Spannungen in der Materie überwiegt. Für ein zeitartiges normiertes Vektorfeld v ist also $T(v,v) \geq -\frac{1}{2}\operatorname{tr} T$.

3. Dominante Energiebedingung. Diese besagt, daß die Geschwindigkeit des Energieflußes der Materie niemals größer als die Lichtgeschwindigkeit sein kann. Für ein zeitartig–zukunftsgerichtetes normiertes Vektorfeld v ist also $(-T(v,.))^\sharp$ ebenfalls ein zeitartig–zukunftsgerichtetes oder ein lichtartiges Vektorfeld.

Proposition 1.1 *Es sei $T = (\varepsilon + p)\, u^\flat \otimes u^\flat + p\, {}^4\!g$ der Energie–Impuls–Tensor der idealen Flüssigkeit. Dann erfüllt T für $\varepsilon \geq 0$ und $p \geq 0$ die schwache und die starke Energiebedingung. Im Fall $0 < p \leq \varepsilon$ erfüllt T auch die dominante Energiebedingung.*

Beweis: Der Beweis ergibt sich durch einfaches Nachrechnen, wobei mehrmals die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung auf Minkowskiräumen für zeitartige Vektoren u, v, nämlich $|{}^4\!g(u,v)|^2 \geq {}^4\!g(u,u)\, {}^4\!g(v,v)$, verwendet wird. □

1.4 Zustandsgleichungen

Thermodynamische Systeme werden durch ihre sogenannten Zustandsgrößen beschrieben. Eine Zustandsgleichung enthält Information über ein thermodynamisches System in Form von Beziehungen zwischen dessen Zustandsgrößen. In der allgemeinen Relativitätstheorie wird Materie oft als eine einkomponentige ideale Flüssigkeit, deren Temperatur am absoluten Nullpunkt liegt, beschrieben. Ein derartiges System wird dann durch die Zustandsgrößen n (Teilchenzahldichte), ε (Energiedichte) und p (Druck) sowie das Geschwindigkeitsfeld u beschrieben.

Eine Zustandsgleichung nennt man fundamental, wenn sie die maximal mögliche Information über ein thermodynamisches System enthält. Aus ihr lassen sich dann alle anderen Zustandsgleichungen auf eindeutige Weise ableiten. Eine fundamentale Zustandsgleichung ist $\varepsilon(n)$, während $p(n)$ und $\varepsilon(p)$ nicht fundamental sind.

Eine Zustandsgleichung muß die folgenden physikalischen Axiome erfüllen:

1. $\varepsilon(n) \in C^2((0, n_{\max}), (0, \varepsilon_{\max}))$
2. $\varepsilon(0) = 0$
3. $\varepsilon(n) \geq 0$ für $0 < n < n_{\max}$
4. $p(n) \in C^1((0, n_{\max}), (0, p_{\max}))$
5. $p(0) = 0$
6. $p(n) = n\varepsilon'(n) - \varepsilon(n)$
7. $p'(n) > 0$ für $0 < n < n_{\max}$

Die folgende Proposition gibt an, wie man aus einer gegebenen Zustandsgleichung die komplementäre rekonstruieren kann. Da alle Zustandsgleichungen invertierbar sind, erhält man die restlichen Zustandsgleichungen durch Auflösen und Einsetzen.

Proposition 1.2 *Gegeben sei eine der sechs Funktionen aus der Spalte "Fkt.", die zusätzlich die angegebenen Bedingungen erfülle. Dann ist diese Funktion eine thermodynamische Zustandsgleichung, und die komplementäre Zustandsgleichung läßt sich durch den in der Spalte "Rekonstruktion" angegebenen Prozeß ermitteln.*

Fkt.	*Bedingungen*	*Rekonstruktion*
$\epsilon(n)$	$\epsilon(0) = 0$ $\epsilon'(n) > 0$ $\epsilon''(n) > 0$	$p(n) = n\,\epsilon'(n) - \epsilon(n)$
$n(\epsilon)$	$n(0) = 0$ $n'(\epsilon) > 0$ $n''(\epsilon) < 0$	$p(\epsilon) = \frac{n(\epsilon)}{n'(\epsilon)} - \epsilon$
$p(n)$	$p'(n) > 0$ $\int_0^n \frac{p(\tilde n)}{\tilde n^2}\,d\tilde n < \infty$	$\epsilon_{c_1}(n) = n\left(c_1 + \int_0^n \frac{p(\tilde n)}{\tilde n^2}\,d\tilde n\right)$
$n(p)$	$n(0) = 0$ $n'(p) > 0$ $\int_0^p \frac{\tilde p\, n'(\tilde p)}{n(\tilde p)^2}\,d\tilde p < \infty$	$\epsilon_{c_1}(p) = n(p)\left(c_1 + \int_0^p \frac{\tilde p\, n'(\tilde p)}{n(\tilde p)^2}\,d\tilde p\right)$
$p(\epsilon)$	$p'(\epsilon) > 0$ $\int_0^\epsilon \frac{1}{p(\tilde\epsilon)+\tilde\epsilon}\,d\tilde\epsilon = \infty$	$n_{c_2}(\epsilon) = \begin{cases} c_2 \exp\left(\int_1^\epsilon \frac{1}{p(\tilde\epsilon)+\tilde\epsilon}\,d\tilde\epsilon\right) & : \ \epsilon_{\max} = \infty \\ c_2 \exp\left(\int_{\frac{\epsilon_{\max}}{2}}^\epsilon \frac{1}{p(\tilde\epsilon)+\tilde\epsilon}\,d\tilde\epsilon\right) & : \ \epsilon_{\max} < \infty \end{cases}$
$\epsilon(p)$	$\epsilon(0) = 0$ $\epsilon'(p) > 0$ $\int_0^p \frac{\epsilon'(\tilde p)}{\epsilon(\tilde p)+\tilde p}\,d\tilde p = \infty$	$n_{c_3}(p) = \begin{cases} c_3 \exp\left(\int_1^p \frac{\epsilon'(\tilde p)}{\epsilon(\tilde p)+\tilde p}\,d\tilde p\right) & : \ p_{\max} = \infty \\ c_3 \exp\left(\int_{\frac{p_{\max}}{2}}^p \frac{\epsilon'(\tilde p)}{\epsilon(\tilde p)+\tilde p}\,d\tilde p\right) & : \ p_{\max} < \infty \end{cases}$

In der Spalte "Bedingungen" ist stets $0 < \# < \#_{\max}$ für $\# \in \{n, \epsilon, p\}$, und in der Spalte "Rekonstruktion" ist $0 \le c_1 < \infty$ und $0 < c_2, c_3 < \infty$. Die Differenzierbarkeitsstufe einer Funktion ergibt sich aus der Forderung, daß jede in der Spalte "Bedingungen" auftretende Ableitung noch stetig ist.

Beweis: Der Beweis der Äquivalenzen ist zwar relativ lang, aber elementar, und soll daher hier nicht ausgeführt werden. Wir wollen nur anmerken, daß man am besten die Äquivalenz zwischen der ersten Zeile und den Axiomen zeigt. □

Häufig verwendete Zustandsgleichungen sind:

1. Konstante Dichte. Die Energiedichte wird überall als konstant vorausgesetzt,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}\,.$$

2. Polytrope Zustandsgleichung. Sie gibt die Beziehung zwischen Druck und Energiedichte in Form des Potenzgesetzes

$$p(\varepsilon) = c\,\varepsilon^{\gamma} \qquad (c > 0, \gamma > 1)$$

an, wobei ein typischer Exponent $\gamma = \frac{4}{3}$ ist.

1.5 Die Euler–Gleichung

Da der Einstein–Tensor ${}^4\mathrm{G} = {}^4\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}\,{}^4\mathrm{R}\,{}^4g$ aufgrund der zweiten Bianchi–Identität divergenzfrei ist, muß man dies auch vom Energie–Impuls–Tensor fordern, damit die Einsteinschen Feldgleichungen überhaupt erfüllt werden können.

Betrachten wir wieder den Energie–Impuls–Tensor der idealen Flüssigkeit und bilden die zum Geschwindigkeitsfeld u orthogonale Hyperfläche in der vierdimensionalen Lorentzmannigfaltigkeit[1], so bezeichnet man die Komponente der Gleichung ${}^4\mathrm{div}\,T = 0$ in Richtung von u als Energiegleichung und in Richtung von $u^{\perp}$ als Euler–Gleichung. Letztere lautet

$${}^3\nabla p = -(\varepsilon + p)\,{}^4\nabla_u u\,,$$

wobei aufgrund der Normierung von u das Vektorfeld ${}^4\nabla_u u \in u^{\perp}$ ist.

Bei erhaltener Baryonenzahl entspricht die Energiegleichung gerade dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik, enthält also keine neue Information. Dagegen kann man aus der Euler–Gleichung eine weitere Forderung an die Zustandsgleichung herleiten. Durch elementare Integration über einen Weg in $u^{\perp}$ und Verwenden der Euler–Gleichung folgt zunächst, daß $\int_0^p (\varepsilon(\tilde{p}) + \tilde{p})^{-1} \mathrm{d}\tilde{p} < \infty$ ist. In Verbindung mit Proposition 1.2 ergibt sich damit für realistische Sterne mit Zustandsgleichung $\varepsilon(p)$ bzw. $p(\varepsilon)$ die Bedingung

$$\lim_{\varepsilon \to 0} p'(\varepsilon) = 0\,.$$

2 Die Anfangswertformulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie

Bei der Anfangswertformulierung werden die Einsteinschen Feldgleichungen in sogenannte Constraint–Gleichungen auf einer dreidimensionalen Anfangs–Hyperfläche und Evolutionsgleichungen für diese Hyperfläche umgeschrieben. Die Hyperfläche mit Metrik und zweiter Fundamentalform nennt man einen Anfangsdatensatz.

[1] Dies ist also eine dreidimensionale, isometrisch immersierte Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Proposition 2.1 *Es sei $(N, {}^4g)$ eine vierdimensionale Raumzeit mit Metrik ${}^4g$, die für einen beliebig vorgegebenen Energie–Impuls–Tensor T den Einsteinschen Feldgleichungen ${}^4\mathrm{G} = 8\pi T$ genügt. Weiter sei $(M, {}^3g, {}^3h)$ eine isometrisch immersierte, dreidimensionale raumartige Hyperfläche mit Metrik ${}^3g$ und zweiter Fundamentalform ${}^3h$ in $(N, {}^4g)$. Das zeitartig–zukunftsgerichtete Einheitsnormalenfeld auf M sei mit n bezeichnet.*

Dann gelten auf M die Energy– und Momentum–Constraint–Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left({}^3\mathrm{R} - |{}^3A|^2 + {}^3H^2\right) &= 8\pi T_{nn} && (1)\\ {}^3\nabla^j\,{}^3h_{ij} - {}^3\nabla_i\,{}^3H &= -8\pi T_{ni} && (2) \end{aligned}$$

und die Evolutionsgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t\,{}^3g_{ij} &= -2\alpha\,{}^3h_{ij} + \mathcal{L}_\beta\,{}^3g_{ij} && (3)\\ \partial_t\,{}^3h_{ij} &= -{}^3\nabla_i\,{}^3\nabla_j\alpha + \alpha\left({}^3\mathrm{R}_{ij} - 2\,{}^3h_{ik}\,{}^3h^k{}_j + {}^3H\,{}^3h_{ij} - 8\pi\left(T_{ij} - \frac{\mathrm{tr}T}{2}\,{}^3g_{ij}\right)\right)\\ &\quad + \mathcal{L}_\beta\,{}^3h_{ij}\,, && (4) \end{aligned}$$

wobei die Lapse–Funktion α und der (tangentiale) Shift–Vektor β zunächst beliebig sind, aber durch Eichbedingungen weiter festgelegt werden können.

Bemerkung 2.2 *Man kann auch zeigen, daß aus den Gleichungen (1) bis (4) die Einsteinschen Feldgleichungen folgen, siehe z.B. [3].*

Zu einer gegebenen dreidimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit $(M, {}^3g, {}^3h)$ mit Metrik ${}^3g$ und symmetrischer Bilinearform ${}^3h$, die die Constraint–Gleichungen (1) und (2) erfüllt, gibt es eine maximale Einstein–Entwicklung, d.h. eine Entwicklung der Mannigfaltigkeit M gemäß der Evolutionsgleichungen (3) und (4), sodaß die Schar der entstehenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten eine vierdimensionale Lorentzmannigfaltigkeit $(N, {}^4g)$ blättert, die wiederum die Einsteinschen Feldgleichungen erfüllt. Die Riemannschen Mannigfaltigkeiten $(M, {}^3g, {}^3h)$ sind isometrisch in $(N, {}^4g)$ mit zweiter Fundamentalform ${}^3h$ immersiert.

Erst durch diese Äquivalenz wird es natürlich sinnvoll, anstelle der Einsteinschen Feldgleichungen die Gleichungen (1) bis (4) der Anfangswertformulierung zu betrachten.

Beweis: Die Gauß– und die Codazzi–Mainardi–Gleichungen für Hyperflächen lauten (siehe z.B. [4] Kapitel 1)

$$\begin{aligned} {}^4\mathrm{R}_{ijkl} &= {}^3\mathrm{R}_{ijkl} - {}^3h_{jk}\,{}^3h_{il} + {}^3h_{ik}\,{}^3h_{jl}\\ {}^4\mathrm{R}_{ijkn} &= -{}^3\nabla_i\,{}^3h_{jk} + {}^3\nabla_j\,{}^3h_{ik}\,. \end{aligned}$$

Durch Kontraktion erhält man weiter

$$
\begin{aligned}
{}^4\mathrm{R}_{ij} + {}^4\mathrm{R}_{ninj} &= {}^3\mathrm{R}_{ij} - {}^3h_{ik}{}^3h^k{}_j + {}^3H{}^3h_{ij} && (5) \\
2\,{}^4\mathrm{G}_{nn} = {}^4\mathrm{R} + 2\,{}^4\mathrm{R}_{nn} &= {}^3\mathrm{R} - |{}^3A|^2 + {}^3H^2 && (6)
\end{aligned}
$$

sowie

$$
{}^4\mathrm{G}_{ni} = {}^4\mathrm{R}_{ni} = -{}^3\nabla^j{}^3h_{ij} + {}^3\nabla_i{}^3H\,. \qquad (7)
$$

Aus Gleichungen (6) und (7) folgen mit den Einsteinschen Feldgleichungen unmittelbar die Constraint–Gleichungen.

Nun sei $F_0 : \mathbb{R}^3 \supset U \to F_0(U) \subset M$ eine lokale Darstellung der dreidimensionalen Hyperfläche M. Wir betrachten die Evolution

$$
\partial_t F(p,t) = \xi\left(F(p,t)\right)\,, \quad F(p,0) = F_0(p)
$$

für alle $p \in U$ und $t \in I \subset \mathbb{R}$, wobei das Vektorfeld ξ gegeben ist durch $\xi = \alpha n + \beta$ mit Lapse–Funktion α und Shift–Vektor β.

Aus der Theorie der Evolutionsgleichungen (siehe z.B. [5] Abschnitt 3) folgen die Evolutionsgleichungen für die erste und zweite Fundamentalform der Schar von Mannigfaltigkeiten mit lokaler Darstellung $F_t(U) \subset M_t$

$$
\begin{aligned}
\partial_t{}^3g_{ij} &= -2\alpha{}^3h_{ij} + \mathcal{L}_\beta{}^3g_{ij} && (8) \\
\partial_t{}^3h_{ij} &= -{}^3\nabla_i{}^3\nabla_j\alpha + \alpha(-{}^3h_{ik}{}^3h^k{}_j + {}^4\mathrm{R}_{ninj}) + \mathcal{L}_\beta{}^3h_{ij}\,. && (9)
\end{aligned}
$$

Die erste Evolutionsgleichung entspricht genau Gleichung (8), und die zweite Evolutionsgleichung folgt aus den Gleichungen (9) und (5) zusammen mit den Einsteinschen Feldgleichungen in der Form ${}^4\mathrm{R}_{ij} = 8\pi(T_{ij} - \mathrm{tr}T/2\;{}^3g_{ij})$, wobei auf der rechten Seite ${}^3g_{ij}$ steht, weil die Indizes nur auf der raumartigen Hyperfläche laufen und diese isometrisch in die Raumzeit immersiert ist. □

An die Gleichungen (1) bis (4) kann man noch eine Eichbedingung stellen, die der Festlegung auf ein bestimmtes Koordinatensystem entspricht. Häufig wird die Maximalflächeneichung ${}^3H = 0$ verwendet, d.h. es wird gefordert, daß die mittlere Krümmung der raumartigen Hyperfläche $(M, {}^3g, {}^3h)$ verschwinden soll. Dadurch ergibt sich eine elliptische Gleichung für die Lapse–Funktion.

Proposition 2.3 *Bei Maximalflächeneichung* ${}^3H = 0$ *liegt die Lapse–Funktion für Sternmodelle aus idealer Flüssigkeit im Intervall* $0 < \alpha \leq 1$.

Beweis: Aus Gleichung (8) folgt unmittelbar $\partial_t{}^3g^{ij} = 2\alpha{}^3h^{ij} + \mathcal{L}_\beta{}^3g^{ij}$, und damit mit Gleichung (9)

$$
\begin{aligned}
0 = \partial_t{}^3H &= \partial_t\left({}^3g^{ij}\,{}^3h_{ij}\right) \\
&= 2\alpha|{}^3A|^2 + \mathcal{L}_\beta{}^3H - {}^3\Delta\alpha + \alpha\left(-|{}^3A|^2 + {}^4\mathrm{Ric}(n,n)\right) + \mathcal{L}_\beta{}^3H \\
&= -{}^3\Delta\alpha + \alpha\left(|{}^3A|^2 + {}^4\mathrm{Ric}(n,n)\right)\,.
\end{aligned}
$$

Für ideale Flüssigkeiten ist weiter wegen $\mathrm{tr}T = 3p - \varepsilon$

$$^4\mathrm{Ric}(n,n) = 8\pi\left((\varepsilon + p)\,|^4g(u,n)|^2 - p + \frac{3p-\varepsilon}{2}\right) \geq 4\pi(3p+\varepsilon)\,,$$

letzteres nach der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung. Insbesondere erhalten wir damit

$$^3\Delta\alpha = \alpha\left(|^3A|^2 + {}^4\mathrm{Ric}(n,n)\right) \geq 0$$

d.h. α ist subharmonisch. Da $(M, {}^3g, {}^3h)$ asymptotisch flach ist, muß $\xi \to n$, also $\alpha \to 1$ für $r \to \infty$ konvergieren. Dies muß für $r \to 0$ aus Symmetriegründen ebenso der Fall sein. Als positive subharmonische Funktion mit Randwerten Eins liegt die Lapse–Funktion damit im angegebenen Intervall. □

3 Eine ausgezeichntete Blätterung der Raumzeit rotierender Sterne

Die Raumzeit rotierender Sterne ist stationär und axialsymmetrisch. In diesem Abschnitt wollen wir die Existenz einer diesen Symmetrien angepassten Blätterung der Raumzeit beweisen. Da physikalische Größen wie Masse und Drehimpuls auf (asymptotisch flachen) Raumblättern definiert sind, kann man bei Verwendung einer den Symmetrien angepaßten Blätterung eine bessere Abschätzung dieser Größen erwarten.

Theorem 3.1 *Es sei $T = (\varepsilon + p)\,u^\flat \otimes u^\flat + p\,{}^4g$ der Energie–Impuls–Tensor der idealen Flüssigkeit. Die zugehörige Lösung $(N, {}^4g)$ der Einsteinschen Feldgleichungen sei stationär und axialsymmetrisch, d.h. es gebe zwei kommutierende Killingfelder ξ und η, wobei ξ ein zeitartig–zukunftsgerichtetes Vektorfeld mit Orbits diffeomorph zu $\mathbb{R}$ und η ein raumartiges Vektorfeld mit Orbits diffeomorph zu S^1 ist. Das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit sei $u = u^0(\xi + \omega\eta)$.*

Dann gibt es ein ausgezeichnetes Vektorfeld

$$n = \frac{1}{\alpha}\left(\xi - \tilde{\beta}\eta\right)\,,$$

das eine Linearkombination von ξ und η, zeitartig–zukunftsgerichtet, normiert und orthogonal zu η ist. Die Koeffizienten ergeben sich zu

$$\alpha = \sqrt{-\frac{{}^4g(\xi,\xi){}^4g(\eta,\eta) - {}^4g(\xi,\eta)^2}{{}^4g(\eta,\eta)}} \quad \text{und} \quad \tilde{\beta} = \frac{{}^4g(\xi,\eta)}{{}^4g(\eta,\eta)}\,.$$

Dieses Vektorfeld ist flächenbildend, d.h. es gibt eine Blätterung der vierdimensionalen Raumzeit $(N, {}^4g)$ in dreidimensionale raumartige Hyperflächen $(M, {}^3g, {}^3h)$, sogenannte Raumblätter, deren Einheitsnormalenfeld gerade das Vektorfeld n ist. Außerdem sind alle diese Raumblätter Maximalflächen.

Zum Beweis dieses Theorems benötigen wir folgende Proposition:

Proposition 3.2 *Es sei* $(N, {}^4g)$ *eine vierdimensionale Lorentzmannigfaltigkeit mit Metrik* ${}^4g$*. Sie besitze zwei kommutierende Killingfelder* ξ *und* η*, wobei* ξ *ein zeitartig–zukunftgerichtetes Vektorfeld mit Orbits diffeomorph zu* $\mathbb{R}$ *und* η *ein raumartiges Vektorfeld mit Orbits diffeomorph zu* S^1 *ist.*

Auf N *gebe es ein Vektorfeld* θ*, das senkrecht auf den von den Orbits von* ξ *und* η *aufgespannten zweidimensionalen Flächen und ebenfalls senkrecht auf den zweidimensionalen Flächen, in denen die Orbits von* η *verlaufen, steht, und für das* ${}^4\mathrm{Ric}(\xi,\theta) = {}^4\mathrm{Ric}(\eta,\theta) = 0$ *gelte.*

Dann besitzen die von den Orbits von ξ *und* η *aufgespannten Flächen zweidimensionale Orthogonalflächen.*

Das Vektorfeld $n = \frac{1}{\alpha}(\xi - \tilde{\beta}\eta)$ *mit* $\alpha = \sqrt{-\frac{{}^4g(\xi,\xi){}^4g(\eta,\eta) - {}^4g(\xi,\eta)^2}{{}^4g(\eta,\eta)}}$ *und* $\tilde{\beta} = \frac{{}^4g(\xi,\eta)}{{}^4g(\eta,\eta)}$ *ist ein zeitartig–zukunftsgerichtetes Einheitsnormalenfeld zu dreidimensionalen raumartigen Flächen (Raumblätter). Diese Raumblätter sind die direkte Summe aus den zweidimensionalen Orthogonalflächen und den eindimensionalen Orbits des Killingfeldes* η *und blättern die Lorentzmannigfaltigkeit* N *in dieser ausgezeichneten Weise.*

Beweis: In diesem Beweis benützen wir sowohl das Theorem von Frobenius als auch den Stokesschen Integralsatz in den Formen, wie sie z.B. in [6] zu finden sind.

Zuerst beweisen wir die Existenz der zweidimensionalen Orthogonalflächen. Folgende Gleichheit zwischen 2–Formen kann man elementar in Koordinaten nachrechnen, wobei ξ und η zwei kommutierende Killingfelder auf der vierdimensionalen Lorentzmannigfaltigkeit $(N, {}^4g)$ sind:

$$\mathrm{d}\left(*\left(\xi^\flat \wedge \mathrm{d}\eta^\flat\right)\right) = 2*\left(\xi^\flat \wedge {}^4\mathrm{Ric}(.,\eta)\right).$$

Nun sei Γ ein geschlossener Orbit des Killingfeldes η auf N, der eine Fläche A berande, die wiederum Vereinigung von Orbits von η sei. Das Vektorfeld ζ sei so gewählt, daß es zusammen mit η die Fläche A aufspannt. Schließlich sei das Vektorfeld θ gegeben durch $\theta^\flat := *(\xi^\flat \wedge \eta^\flat \wedge \zeta^\flat)$.

Es ist ${}^4\mathrm{Ric}(\eta,\theta) = [\,*(\xi^\flat \wedge {}^4\mathrm{Ric}(.,\eta))\,](\eta,\zeta)$. Wir integrieren diesen Ausdruck über die Fläche A, verwenden obige Identität für 2–Formen, wenden den Stokesschen Integralsatz an, und erhalten

$$\int_A {}^4\mathrm{Ric}(\eta,\theta)\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{2}\int_\Gamma *\left(\xi^\flat \wedge \mathrm{d}\eta^\flat\right).$$

Da die Kurve Γ eine Integralkurve von η ist, und $\mathcal{L}_\eta(\eta^\flat \wedge \xi^\flat \wedge \mathrm{d}\eta^\flat) = 0$ ist, können wir die rechte Seite explizit auswerten:

$$\frac{1}{2}\int_\Gamma *\Big(\xi^\flat \wedge \mathrm{d}\eta^\flat\Big) = c\left[*\left(\eta^\flat \wedge \xi^\flat \wedge \mathrm{d}\eta^\flat\right)\right](p)$$

für alle $p \in \Gamma$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

Ist nun ${}^4\mathrm{Ric}(\eta,\theta) = 0$ auf ganz N, so verschwindet auch $\eta^\flat \wedge \xi^\flat \wedge \mathrm{d}\eta^\flat$ überall. Analog läßt sich zeigen, daß aus ${}^4\mathrm{Ric}(\xi,\theta) = 0$ auf ganz N auch $\eta^\flat \wedge \xi^\flat \wedge \mathrm{d}\xi^\flat = 0$ folgt. Dies sind gerade die notwendigen Integrabilitätsbedingungen, und nach dem Theorem von Frobenius existieren damit die zweidimensionalen Orthogonalflächen zu ξ und η.

Diese Orthogonalflächen seien von den Vektorfeldern V und W aufgespannt. Das Vektorfeld n ist als Linearkombination aus ξ und η orthogonal zu V und W. Außerdem rechnet man leicht nach, daß ${}^4g(n,n) = -1$, ${}^4g(n,\xi) = -\alpha < 0$ und ${}^4g(n,\eta) = 0$ ist.

Weiter ist nach Frobenius ${}^4g([\,V,W\,],n) =$, da V und W die zweidimensionalen Orthogonalflächen aufspannen. Schließlich ist

$${}^4g([\,\eta,V\,],n) = {}^4g(\mathcal{L}_\eta V,n) = \mathcal{L}_\eta({}^4g(V,n)) - {}^4g(V,\mathcal{L}_\eta\eta) = 0$$

und analog dazu auch ${}^4g([\,\eta,W\,],n) = 0$. Nochmalige Anwendung des Theorems von Frobenius liefert die Existenz der dreidimensionalen Raumblätter, die nach Konstruktion direkte Summen der zweidimensionalen Orthogonalflächen und der Orbits von η sind. □

Proposition 3.3 *Es gelten die Voraussetzungen von Proposition 3.2. Die dreidimensionalen Raumblätter sind Maximalflächen in der vierdimensionalen Lorentzmannigfaltigkeit.*

Beweis: Wir wählen Koordinaten $\{r,\theta,\phi,t\}$ auf $(N,{}^4g)$, wobei die Killingfelder $\xi = \partial_t$ und $\eta = \partial_\phi$ sind und die Koordinaten r und θ die zweidimensionalen Orthogonalflächen beschreiben. Dann besitzt die Metrik ${}^4g$ aufgrund der Symmetrien die allgemeine Form

$$\mathrm{d}s^2 = h(r,\theta)\,\mathrm{d}r^2 + u(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta^2 + v(r,\theta)\,\mathrm{d}\phi^2 + 2w(r,\theta)\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}t - f(r,\theta)\,\mathrm{d}t\,.$$

Die Metrik ${}^3g$ der dreidimensionalen Raumblätter hat damit die Form

$$\mathrm{d}s^2 = h(r,\theta)\,\mathrm{d}r^2 + u(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta^2 + v(r,\theta)\,\mathrm{d}\phi^2\,.$$

Wir verwenden nun die Evolutionsgleichung (3) für die Metrik der Blätterung. Mit $\partial_t{}^3g = \mathcal{L}_\xi{}^3g = 0$ und $\beta = \tilde{\beta}\eta$ folgt hieraus

$${}^3h_{ij} = \frac{1}{2\alpha}\,\mathcal{L}_{\tilde{\beta}\eta}{}^3g_{ij} = \frac{1}{2\alpha}\,\Big((\partial_i\tilde{\beta})\eta_j + (\partial_j\tilde{\beta})\eta_i\Big)\,.$$

Da $\eta_i = v(r,\theta)\,\delta_i^\phi$ und $\tilde\beta$ nur von r und θ abhängt, hat die zweite Fundamentalform die Gestalt

$$
{}^3h = \frac{v}{2\alpha}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_r\tilde\beta \\ 0 & 0 & \partial_\theta\tilde\beta \\ \partial_r\tilde\beta & \partial_\theta\tilde\beta & 0 \end{pmatrix}.
$$

Weil ${}^3g$ und damit auch ihre Inverse diagonal sind, ist die mittlere Krümmung ${}^3H = \mathrm{tr}\,{}^3h = {}^3g^{ij}\,{}^3h_{ij} = 0$, d.h. die Raumblätter sind Maximalflächen. □

Nun kommen wir zum Beweis von Theorem 3.1. Wir müssen zeigen, daß es ein Vektorfeld θ auf N gibt, das senkrecht auf den von den Orbits von ξ und η aufgespannten zweidimensionalen Flächen und senkrecht auf den zweidimensionalen Flächen, in denen die Orbits von η verlaufen, steht, und für das ${}^4\mathrm{Ric}(\xi,\theta) = {}^4\mathrm{Ric}(\eta,\theta) = 0$ gilt.

Für beliebige Vektorfelder V orthogonal zu ξ und η gilt aber

$$
\begin{aligned}
{}^4\mathrm{Ric}(\xi,V) &= 8\pi\left(T(\xi,V) - \frac{\mathrm{tr}\,T}{2}\,{}^4g(\xi,V)\right) \\
&= 8\pi\Big((\varepsilon+p)\,{}^4g(u,\xi)\,{}^4g(u,V) \;+\; p\,{}^4g(\xi,V)\Big).
\end{aligned}
$$

Die rechte Seite verschwindet, da u als Linearkombination von ξ und η ebenfalls orthogonal zu V ist. Analog zeigt man ${}^4\mathrm{Ric}(\eta,V) = 0$. Gemäß dem Beweis von Proposition 3.2 existiert ein Vektorfeld θ wie gewünscht, und dieses ist orthogonal zu ξ und η, erfüllt also wie eben gezeigt ${}^4\mathrm{Ric}(\xi,\theta) = {}^4\mathrm{Ric}(\eta,\theta) = 0$. Das Ergebnis folgt damit aus den Propositionen 3.2 und 3.3. □

4 Die Skalarkrümmung und ihr Einfluß auf die Größe eines Gebiets

Krümmung beeinflußt die Größe einer Mannigfaltigkeit. Ein Theorem von Myers besagt beispielsweise, daß der Durchmesser einer Riemannschen Mannigfaltigkeit der Dimension n maximal $\pi\sqrt{(n-1)/\Lambda}$ ist, wenn die Ricci–Krümmung durch die positive Konstante Λ nach unten beschränkt ist. Eine Schranke an die Skalarkrümmung reicht hier üblicherweise nicht aus, da diese als Spur der Ricci–Krümmung ein zu schwacher Krümmungsbegriff ist. In drei Dimensionen fallen aber die verschiedenen Krümmungsbegriffe soweit zusammen, daß auch schon aus einer Forderung an die Skalarkrümmung Aussagen über die Größe eines Gebietes gewonnen werden können.

Ein derartiges Theorem stammt von Schoen und Yau [7]. Bevor wir es formulieren können, müssen wir einen Radiusbegriff für Gebiete einführen, der die Ausdehnung in alle Richtungen (mehrdimensional) mißt.

Definition 4.1 *Es sei $\Omega \subset (M, g)$ ein beliebiges Gebiet in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g).*

1. *Eine Kurve $\Gamma \subset \Omega$ heiße zulässig, wenn Γ einfach (d.h. doppelpunktfrei außer an den Endpunkten) und geschlossen ist und in Ω eine Scheibe berandet.*
2. *Es sei $N_r(\Gamma) := \{x \in \Omega \,:\, \mathrm{dist}_g(x, \Gamma) < r\}$ der Torus um Γ mit Radius r.*
3. *Für zulässige Kurven Γ setze*
$$\begin{aligned} \rho_1(\Gamma) &:= \mathrm{dist}_g(\Gamma, \partial\Omega) \\ \rho_2(\Gamma) &:= \sup\{r \in \mathbb{R} \,:\, \Gamma \textit{ berandet keine Scheibe in } N_r(\Gamma)\}\,. \end{aligned}$$
4. *Für zulässige Kurven Γ sei der Radius von Ω bezüglich Γ gegeben durch*
$$\mathrm{Rad}(\Omega, \Gamma) := \min\{\rho_1(\Gamma), \rho_2(\Gamma)\}\,.$$
5. *Der in alle Richtungen (mehrdimensional) gemessene Radius von Ω sei*
$$\mathrm{Rad}(\Omega) := \sup\{\mathrm{Rad}(\Omega, \Gamma) \,:\, \Gamma \textit{ zulässig}\}\,.$$

Daß mit dieser Definition tatsächlich die mehrdimensionale Ausdehnung eines Gebietes gemessen wird, machen folgende Beispiele im euklidischen $\mathbb{R}^3$ deutlich:

1. Ist Ω eine Kugel mit Radius R, so ist $\mathrm{Rad}(\Omega) = R/2$.
2. Für einen Zylinder mit Radius R und Länge L ist $\mathrm{Rad}(\Omega) = 1/2 \min\{R, L\}$.

Theorem 4.2 (Schoen–Yau) *Es sei $(M, {}^3g, {}^3h)$ ein Anfangsdatensatz mit ${}^3H = \mathrm{tr}\, {}^3h = 0$. M sei eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension 3, d.h. diffeomorph zu $\mathbb{R}^3$. Weiter sei $\Omega \subset M$ ein beliebiges Gebiet in M. Auf Ω gelte*
$$\frac{1}{2}\left({}^3\mathrm{R} - |{}^3A|^2\right) \geq \Lambda$$
für eine positive Konstante Λ. Dann ist der (mehrdimensionale) Radius des Gebietes Ω nach oben beschränkt durch
$$\mathrm{Rad}(\Omega) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{3\Lambda}}\,.$$

Der Beweis beruht auf der Lösung eines zweidimensionalen Variationsproblems zum Auffinden einer optimalen Fläche, die von einer zulässigen Kurve berandet wird, und auf der Lösung eines eindimensionalen Variationsproblems zum Auffinden einer optimalen Kurve in dieser Fläche, deren Länge eine gute Abschätzung für eine obere Schranke an den (mehrdimensionalen) Radius des Gebiets ist. Wir führen den Beweis hier jedoch nicht aus, sondern verweisen auf die Originalarbeit von Schoen und Yau [7].

Theorem 4.2 kann mit derselben Methode wie im Falle des Positive–Mass–Theorems auf Anfangsdatensätze mit ${}^3H \neq 0$ erweitert werden. Man führt den allgemeineren Fall auf den bekannten Fall eines Anfangsdatensatzes $(\bar{M}, {}^3\bar{g}, {}^3\bar{h})$ mit ${}^3\bar{H} = 0$ zurück, indem man $\bar{M}$ als Graph über der ursprünglichen Mannigfaltigkeit M schreibt und verwendet, daß dies genau dann global möglich ist, wenn M asymptotisch flach ist und keine Horizonte enthält.

Theorem 4.3 (Schoen–Yau) *Es sei $(M, {}^3g, {}^3h)$ ein Anfangsdatensatz. M sei eine vollständige, asymptotisch flache Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension 3 und Ω ein beliebiges Gebiet in M. Auf Ω gelte*

$$\frac{1}{2}\left({}^3\mathrm{R} - |{}^3A|^2 + {}^3H^2\right) - \left|{}^3\nabla^j\, {}^3h_{ij} - {}^3\nabla_i\, {}^3H\right| \geq \Lambda$$

für eine positive Konstante Λ. Dann ist der (mehrdimensionale) Radius des Gebietes Ω nach oben beschränkt durch

$$\mathrm{Rad}(\Omega) \leq \frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{2\Lambda}}\,.$$

Theorem 4.3 ist in der Arbeit von Schoen und Yau [7] in der umgekehrten Form formuliert: Wenn $\mathrm{Rad}(\Omega) \geq \frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{2\Lambda}}$, dann enthält die Mannigfaltigkeit M einen Horizont.

Wir wollen noch anmerken, daß beide Theoreme für beliebige Gebiete gelten. Wenn die Mannigfaltigkeit zusätzliche Symmetrien besitzt, so dürften sich die Konstanten in den Abschätzungen für den (mehrdimensionalen) Radius noch verbessern. Außerdem sollte es möglich sein, die Voraussetzungen in den Theoremen von einer punktweisen Schranke auf eine Integralschranke abzuschwächen.

5 Eine obere Schranke für das Masse–Radius–Verhältnis in Sternen

Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Sternes ist, daß sein Masse–Radius–Verhältnis eine gewisse obere Schranke nicht überschreitet. Dem entspricht der physikalisch sinnvolle Sachverhalt, daß in ein Gebiet vorgegebener

Größe nicht beliebig viel Materie hineingepackt werden kann, da der entstehende Gravitationsdruck sonst zum Kollaps führen würde.

Für statische (nichtrotierende) Sterne gibt es Abschätzungen an das Masse–Radius–Verhältnis. Es ist bekannt, daß Sterne mit konstanter Dichte nur existieren, wenn $M_0/R \leq 4/9$ ist (s. [8] S. 129). Für beliebige Zustandsgleichungen ist eine obere Schranke gegeben durch $M_0/R \leq 1/2$.

Dabei ist R jeweils der Radius des kugelsymmetrischen Sternes, wobei die Radialkoordinate durch die Forderung, daß die Sphäre mit Radius R einen Oberflächeninhalt von $4\pi R^2$ besitzt, festgelegt wurde. Die Sternmasse ergibt sich im statischen Fall durch Integration über die Dichte: $M_0 = 4\pi \int_0^R \varepsilon(r) r^2 \, \mathrm{d}r$. Dies folgt aus der allgemeinen Definition der Masse für stationäre Systeme nach Komar, siehe Lemma 5.4. Die Komar–Masse wiederum stimmt mit der (noch allgemeineren) ADM–Masse überein.

Wir wollen in dieser Arbeit aus den rein geometrischen Theoremen 4.2 und 4.3 eine Abschätzung an das Masse–Radius–Verhältnis herleiten. Zum Vergleich der Ergebnisse betrachten wir zunächst einen statischen Stern mit konstanter Dichte.

Theorem 5.1 *Es sei $(N, {}^4g)$ die Raumzeit eines statischen Sternes mit konstanter Dichte $\varepsilon = \varepsilon_0$ und Radius R. Dann ist das Masse–Radius–Verhältnis nach oben beschränkt durch*

$$\frac{M_0}{R} \leq \frac{8}{9}\pi^2 .$$

Beweis: Wir verwenden die Blätterung der Raumzeit $(N, {}^4g)$ durch Maximalflächen[2] $(M, {}^3g, {}^3h)$, deren Existenz wir in Theorem 3.1 bewiesen haben.

Aus der Energy–Constraint–Gleichung (1) erhalten wir wegen $u = n$ und $\varepsilon = \varepsilon_0$

$${}^3\mathrm{R}/2 = 8\pi T_{nn} = 8\pi\varepsilon_0 ,$$

also sind die Voraussetzungen von Theorem 4.2 erfüllt mit $\Lambda = 8\pi\varepsilon_0$, wenn wir für Ω den Sternkörper wählen. Wegen $\mathrm{Rad}(\Omega) = R/2$ im kugelsymmetrischen Fall ergibt sich damit

$$\frac{R}{2} = \mathrm{Rad}(\Omega) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{3\Lambda}} = \frac{2\pi}{\sqrt{24\pi\varepsilon_0}} .$$

Wir quadrieren beide Seiten, multiplizieren mit ε_0, beachten, daß $M_0 = 4\pi/3 \; \varepsilon_0 R^3$ ist, und erhalten nach Kürzen schließlich $M_0/R \leq 8/9 \; \pi^2$. □

Dieses Ergebnis ist natürlich noch nicht optimal, wenn man es mit den bekannten Resultaten vergleicht. Man kann aber erwarten, daß die Konstanten in Theorem

[2] Im statischen Fall sind diese Flächen sogar total geodätisch, also ${}^3h = 0$.

4.2 für den Fall hoher Symmetrie verschärft werden können und damit zu einer weiteren Verbesserung der Masse–Radius–Abschätzung führen.

Die Abschätzung ist aber auf eine ganz allgemeine Weise aus einem rein geometrischen Prinzip abgeleitet worden. Im Gegensatz zu den mit speziell angepaßten Mitteln arbeitenden anderen bekannten Methoden läßt sich daher das Ergebnis auf den allgemeineren Fall stationärer (rotierender) Sterne ausdehnen.

Theorem 5.2 *Es sei $(N, {}^4g)$ die Raumzeit eines stationären Sternes mit konstanter Dichte $\varepsilon = \varepsilon_0$ (Sternkörper $\Omega \subset M$ für die nach Theorem 3.1 ausgezeichnete raumartige Hyperfläche M in N). Außerdem sei $\varepsilon \geq p$, sodaß nach Proposition 1.1 die dominante Energiebedingung erfüllt ist. Dann ist das Masse–Radius–Verhältnis nach oben beschränkt durch*

$$M_0 \frac{\mathrm{Rad}^2(\Omega)}{\mathrm{Vol}(\Omega)} \leq \frac{2}{3}\pi\,,$$

wobei diese Abschätzung für die "Ruhemasse" $M_0 \leq M$ gilt (vgl. Lemma 5.4).

Bevor wir dieses Theorem beweisen können, müssen wir uns zuerst mit der genauen Definition von Masse in der Allgemeinen Relativitätstheorie auseinandersetzen. Wir geben hier der Vollständigkeit halber auch eine Definition von Drehimpuls an.

Lemma 5.3 *Die Komar–Formeln für Masse und Drehimpuls eines stationären Sternes (Sternkörper $\Omega \subset M$ für die nach Theorem 3.1 ausgezeichnete raumartige Hyperfläche M, Killingfelder ξ und η) sind*

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{4\pi}\int_\Omega {}^4\mathrm{Ric}(\xi, n)\,\mathrm{d}\mu && (10)\\ J &= -\frac{1}{8\pi}\int_\Omega {}^4\mathrm{Ric}(\eta, n)\,\mathrm{d}\mu && (11)\\ &= -\frac{1}{8\pi}\int_{\partial\Omega} {}^3h(\eta, \nu)\,\mathrm{d}\mu\,, && (12) \end{aligned}$$

wobei ν die nach außen gerichtete Einheitsnormale auf dem Sternrand $\partial\Omega$ ist.

Beweis: Nach Komar besitzen Masse und Drehimpuls die Darstellungen (s. [8] S. 289 und 296)

$$M = -\frac{1}{8\pi}\int_{\partial\Omega} {}^4{*}\,{}^4\mathrm{d}\xi^\flat \quad \text{und} \quad J = \frac{1}{16\pi}\int_{\partial\Omega} {}^4{*}\,{}^4\mathrm{d}\eta^\flat\,.$$

Hieraus erhalten wir für die Masse aus dem Stokesschen Integralsatz, der Identität für Killingfelder ${}^4\mathrm{d}\,{}^4{*}\,{}^4\mathrm{d}\xi^\flat = 2\,{}^4{*}\,{}^4\mathrm{Ric}(\xi,.)$, und der Definition des Integrals

$$\begin{aligned} M &= -\frac{1}{8\pi}\int_{\partial\Omega} {}^4{*}\,{}^4\mathrm{d}\xi^\flat \;=\; -\frac{1}{8\pi}\int_\Omega {}^4\mathrm{d}\,{}^4{*}\,{}^4\mathrm{d}\xi^\flat \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_\Omega {}^4{*}\,{}^4\mathrm{Ric}(\xi,.) \;=\; \frac{1}{4\pi}\int_\Omega {}^4\mathrm{Ric}(\xi,n)\,\mathrm{d}\mu\,, \end{aligned}$$

also die behauptete Formel (10) für die Masse. Auf analoge Weise erhalten wir die Formel (11) für den Drehimpuls.

Aus der Momentum–Constraint–Gleichung (2) folgt auf der Maximalfläche M

$${}^4\mathrm{Ric}(\eta,n) = {}^3\nabla^i h_{\eta i} = {}^3{*}\,{}^3\mathrm{d}\,{}^3{*}\,h(\eta,.) = -{}^3\delta h(\eta,.)$$

und damit weiter

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{8\pi}\int_\Omega {}^4\mathrm{Ric}(\eta,n)\,\mathrm{d}\mu \;=\; \frac{1}{8\pi}\int_\Omega {}^3{*}\,{}^3\delta h(\eta,.) \\ &= -\frac{1}{8\pi}\int_\Omega {}^3\mathrm{d}\,{}^3{*}\,h(\eta,.) \;=\; -\frac{1}{8\pi}\int_{\partial\Omega} {}^3{*}\,h(\eta,.) \\ &= -\frac{1}{8\pi}\int_{\partial\Omega} h(\eta,\nu)\,\mathrm{d}\mu\,, \end{aligned}$$

also die behauptete Formel (12) für den Drehimpuls. □

Lemma 5.4 *Für Sternmodelle aus idealer Flüssigkeit ergibt sich die Masse im statischen Fall (Geschwindigkeitsfeld $u = n = \xi/\alpha$) zu*

$$M_0 = \int_\Omega \alpha(\varepsilon + 3p)\,\mathrm{d}\mu = 4\pi\int_0^R \varepsilon(r) r^2\,\mathrm{d}r\,.$$

Im stationären Fall (Geschwindigkeitsfeld $u = u_0(\xi + \omega\eta)$) ist $M \geq M_0$, genauer

$$M = M_0 + 2\int_\Omega \alpha(\varepsilon + p)u_0^2(\tilde\beta + \omega)\omega\,{}^4g(\eta,\eta)\,\mathrm{d}\mu\,,$$

wobei $M_0 = \int_\Omega \alpha(\varepsilon + 3p)\,\mathrm{d}\mu$ die "Ruhemasse" ist.

Beweis: Im statischen Fall ist

$$\frac{1}{4\pi}{}^4\mathrm{Ric}(\xi,n) = 2\alpha\left(T(n,n) - \frac{\mathrm{tr}T}{2}{}^4g(n,n)\right) = \alpha(\varepsilon + 3p)\,,$$

wenn $T = (\varepsilon + p)u^\flat \otimes u^\flat + p\,{}^4g$ der Energie–Impuls–Tensor der idealen Flüssigkeit ist. Aus der Massendarstellung nach Komar (Lemma 5.3) ergibt sich damit die erste Gleichheit. Für die zweite Gleichheit siehe [8] S. 296.

Im stationären Fall ergibt sich

$$\frac{1}{4\pi}{}^4\mathrm{Ric}(\xi, n) = \alpha(\varepsilon + 3p) + 2\alpha(\varepsilon + p)u_0^2(\tilde{\beta} + \omega)\omega\,{}^4g(\eta, \eta)\,,$$

wenn man beachtet, daß aus der Normierung von u die Relation

$$u_0^2\left(\alpha^2 - (\tilde{\beta} + \omega)^2\,{}^4g(\eta, \eta)\right) = 1$$

folgt. Damit folgt auch die zweite Formel aus der Massendarstellung nach Komar (Lemma 5.3). □

Wir kommen nun zum Beweis von Theorem 5.2. Wie im Beweis von Theorem 5.1 blättern wir die Raumzeit durch maximale raumartige Hyperflächen. Aus der Energy–Constraint–Gleichung folgt jetzt

$$\frac{1}{2}\left({}^3\mathrm{R} - |{}^3A|^2\right) = 8\pi T_{nn} = 8\pi\left((\varepsilon_0 + p)\,{}^4g(u, n)\,{}^4g(u, n) + p\,{}^4g(n, n)\right) \geq 8\pi\varepsilon_0$$

wegen der umgekehrten Cauchy–Schwarzschen Ungleichung. Theorem 4.2 läßt sich wieder mit $\Lambda = 8\pi\varepsilon_0$ anwenden. Nach Umformung erhalten wir

$$\varepsilon_0\,\mathrm{Rad}(\Omega)^2 \leq \frac{\pi}{6}\,.$$

Wir benutzen nun die Bedingung $\varepsilon_0 = \varepsilon \geq p$ und erhalten für die "Ruhemasse" die Abschätzung

$$M_0 = \int_\Omega \alpha(\varepsilon + 3p)\,\mathrm{d}\mu \leq 4\varepsilon_0 \int_\Omega \alpha\,\mathrm{d}\mu \leq 4\varepsilon_0 \mathrm{Vol}(\Omega)\,,$$

wobei sich die letzte Ungleichung aus Proposition 2.3 ergibt. Aus den beiden letzten Ungleichungen ergibt sich durch einfaches Umformen die Behauptung. □

Physikalisch erwartet man, daß die bei der Rotation auftretende und der Gravitation entgegenwirkende Zentrifugalkraft es erlaubt, die Materie im Stern etwas dichter zu packen. Auch dieser Sachverhalt wird von den geometrischen Theoremen 4.2 und 4.3 richtig wiedergegeben.

Aus dem statischen Fall erkennen wir nämlich, daß die Energiedichte mit der skalaren Krümmung auf M zusammenhängt, da nach der Energy–Constraint–Gleichung ${}^3\mathrm{R} = 16\pi\varepsilon_0$ ist. Lemma 5.3 zeigt, daß in den Drehimpuls im wesentlichen die zweite Fundamentalform auf M eingeht.

Wenn wir nun in Theorem 4.2 die die volle Norm der zweiten Fundamentalform auf Ω etwas erhöhen, können wir dabei gleichzeitig die Skalarkrümmung in gleichem Maße erhöhen, ohne daß dadurch die Konstante Λ verändert würde. Physikalisch entspricht dem also das gewünschte Ergebnis, daß bei Zunahme des Drehimpulses die Energiedichte des Sternes etwas erhöht werden kann.

Schließlich wollen wir noch anmerken, daß man aus Theorem 4.3 Aussagen über allgemeinere Objekte, deren raumartige Hyperflächen nicht mehr maximal sind, gewinnen kann. Insbesondere liefert dieses Theorem auch fast einen Beweis der Hoop–Conjecture. Diese Vermutung aus der Allgemeinen Relativitätstheorie besagt, daß wenn sich in einem Gebiet, das eine Ausdehnung, gemessen in allen Raumrichtungen, von einer vorgegebenen Mindestgröße besitzt, Materie einer bestimmten Mindestmasse ansammelt, diese zwangsläufig kollabieren muß.

In der ursprünglichen, von Schoen und Yau gegebenen Fassung, besagt Theorem 4.3 nämlich gerade, daß auf einem Anfangsdatensatz, also auf einer raumartigen Hyperfläche, ein Horizont existieren muß, wenn in einem Gebiet Ω der Mindestgröße $\mathrm{Rad}(\Omega) \geq \frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{2\Lambda}}$ die Dichte so groß ist, daß die Anfangsdaten folgender Abschätzung nach unten genügen:

$$\frac{1}{2}\left({}^3\mathrm{R} - |{}^3A|^2 + {}^3H^2\right) - \left|{}^3\nabla^j\,{}^3h_{ij} - {}^3\nabla_i\,{}^3H\right| = 8\pi\left(T_{nn} - |T_{ni}|\right) \geq \Lambda$$

mit einer beliebigen positiven Konstante[3] Λ.

Offenbar setzt Theorem 4.3 aber eine Annahme über die Dichte der Materie im Gebiet und nicht nur über deren Gesamtmasse voraus, weshalb die Hoop–Conjecture damit auch nur "fast" bewiesen wird.

6 Stabilität der Blätterung durch Flächen konstanter mittlerer Krümmung

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Stabilität der von Huisken und Yau [9] vorgeschlagenen Blätterung der raumartigen Hyperflächen durch 2–Flächen konstanter mittlerer Krümmung für den Fall eines statischen Sternes mit beliebiger Zustandsgleichung. Wir erhalten eine sinnvolle physikalische Bedingung, unter der diese Blätterung stabil ist, also ein hinreichendes Kriterium für die Existenz solcher Sterne.

Statische (nichtrotierende) Sterne werden durch die äußere und innere Schwarzschildlösung beschrieben. Die Metrik ${}^3g$ auf einem dreidimensionalen Raumblatt M ist sphärisch symmetrisch und hat die Form

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s_i^2 &= \left(1 - 2m(r)/r\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2 \\ \mathrm{d}s_a^2 &= \left(1 - 2M_0/r\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\,, \end{aligned}$$

wobei die Indizes 'i' für das Sterninnere $0 < r < R$ und 'a' für den Außenraum $r > R$ stehen. Dabei ist

[3] Der Fall $\Lambda = 0$ entspricht gerade der dominanten Energiebedingung.

1. R der (vorgegebene) Sternradius
2. $M_0 = m(R)$ die Schwarzschildmasse, wobei $m(r) = 4\pi \int_0^r \varepsilon(r')r'^2 \, \mathrm{d}r'$
3. $\varepsilon(r)$ die Energiedichte im Abstand r von Zentrum.

Theorem 6.1 *Die im Ursprung (Zentrum der Kugelsymmetrie) von $(M, {}^3g)$ zentrierten Sphären S_r vom Radius r sind Flächen konstanter mittlerer Krümmung. Sie stellen für eine beliebige Zustandsgleichung eine stabile Blätterung der raumartigen Hyperfläche im Sterninnern dar, wenn $\varepsilon(r)$ monoton fallend ist. Für die raumartige Hyperfläche im Außenraum stellen sie stets eine stabile Blätterung dar.*

Zuerst müssen wir einen sinnvollen Stabilitätsbegriff für Hyperflächen konstanter mittlerer Krümmung in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit einführen, und suchen dazu ein geeignetes Variationsproblem.

Es sei $F_0 : \Sigma \to M$ die (lokale) Immersion einer orientierbaren, geschlossenen[4] Mannigfaltigkeit Σ der Dimension n mit Normalenfeld ν in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M der Dimension $(n+1)$. Im folgenden betrachten wir eine Variation $F : I \times \Sigma \to M$, wobei $F(t,.) = F_t : \Sigma \to M$ für alle $t \in I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ eine Immersion und $F(0,.) = F_0$ ist.

Weiter seien die Flächen– und Volumenfunktionale gegeben durch

$$A(t) := \int_\Sigma \mathrm{d}\mu_t \quad \text{und} \quad V(t) := \int_{\Omega_t} \mathrm{d}\mu_M \,,$$

wobei $\mathrm{d}\mu_t$ das Volumenelement von Σ in der von F_t induzierten Metrik und $\Omega_t = \operatorname{Int} F_t(\Sigma) \subset M$ das Innere der geschlossenen Mannigfaltigkeit $F_t(\Sigma)$ in M ist.

Es sei $W(p) = \partial_t F|_{t=0}$ das Variations–Vektorfeld von F. Die Variation heiße normal, wenn $W = \varphi\nu$ ist, und volumenerhaltend, wenn $V(t) = V(0)$ ist. Man kann zeigen ([10] Lemma 2.4 bzw. [11] Lemma 2.2), daß es zu jeder glatten Funktion $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}$ mit $\int_\Sigma \varphi \, \mathrm{d}\mu = 0$ eine volumenerhaltende, normale Variation mit Variations–Vektorfeld $\varphi\nu$ gibt.

Proposition 6.2 *Es sei $F_0 : \Sigma \to M$ eine Immersion. Dann sind äquivalent:*

1. *$F_0(\Sigma) \subset M$ hat konstante mittlere Krümmung H_0.*
2. *Für alle volumenerhaltenden Variationen ist $A'(0) = 0$, das Funktional des Flächeninhaltes also stationär.*

[4] d.h. kompakt und ohne Rand

3. *Für alle (beliebigen) Variationen ist $J'(0) = 0$, wobei das Funktional $J(t)$ gegeben ist durch $J(t) = A(t) + nH_0\,V(t)$.*

Beweis: Dies ist Proposition 2.7 in [10] bzw. Proposition 2.3 in [11]. □

Flächen konstanter mittlerer Krümmung sind also stationäre Punkte des Flächeninhaltes, wenn wir nur volumenerhaltende Variationen zulassen. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 6.3 *Es sei $F_0 : \Sigma \to M$ eine Immersion wie oben und $F_0(\Sigma) \subset M$ habe konstante mittlere Krümmung. F_0 heiße stabil, wenn für alle volumenerhaltenden Variationen $A''(0) \geq 0$ ist, die zweite Variation des Flächeninhaltes also nichtnegativ ist.*

In Proposition 6.2 haben wir die Nebenbedingung der Variation, volumenerhaltend zu sein, durch einen Lagrangeschen Parameter zum Ausdruck gebracht. Die entscheidende Idee um ein gutes Kriterium für Stabilität zu erhalten ist es nun, die zweite Variation des Funktionals $J(t)$ statt $A(t)$ zu betrachten.

Proposition 6.4 *Es sei $F_0 : \Sigma \to M$ eine Immersion wie oben und $F_0(\Sigma) \subset M$ habe konstante mittlere Krümmung. Die zweite Variation des Funktionals $J(t)$ hängt nur von der Funktion $\varphi = {}^M g(W, \nu)$, also dem Normalenanteil des Variations–Vektorfeldes, ab und ist gegeben durch*

$$J''(0) = \int_\Sigma \Big((-{}^\Sigma\Delta\varphi)\varphi - (|{}^\Sigma A|^2 + {}^M\mathrm{Ric}(\nu,\nu))\varphi^2 \Big)\, \mathrm{d}\mu\,.$$

Die Immersion ist genau dann stabil, wenn die zweite Variation des Funktionals $J(t)$ ist für alle Variationen mit $\int_\Sigma \varphi\, \mathrm{d}\mu = 0$ nichtnegativ ist, also $J''(0) \geq 0$ ist.

Beweis: Die zweite Variation von $J(t)$ ist gegeben durch

$$J''(0) = -\int_\Sigma \partial_t H|_{t=0}\varphi\, \mathrm{d}\mu\,,$$

wobei im Falle einer normalen Variation

$$\partial_t H|_{t=0} = -{}^\Sigma\Delta\varphi - (|{}^\Sigma A|^2 + {}^M\mathrm{Ric}(\nu,\nu))\varphi$$

ist, siehe [5] Korollar 3.5. Für beliebige Variationen verweisen wir auf den Anhang von [10].

Der zweite Aussage der Proposition folgt aus der Tatsache, daß es zu jeder glatten Funktion $\varphi : \Sigma \to M$ mit $\int_\Sigma \varphi\, \mathrm{d}\mu = 0$ eine volumenerhaltende, normale Variation mit Variations–Vektorfeld $\varphi\nu$ gibt, wenn wir außerdem beachten, daß für volumenerhaltende Variationen $J''(0) = A''(0) + nH_0 V''(0) = A''(0)$ ist. □

Im folgenden berechnen wir die geometrischen Größen auf den im Ursprung zentrierten Sphären, um entscheiden zu können, wann diese stabil sind.

Lemma 6.5 *Die im Ursprung (Zentrum der Kugelsymmetrie) von $(M, {}^3g)$ zentrierten Sphären S_r sind zweidimensionale Flächen konstanter mittlerer Krümmung. Es ist*

$$\begin{array}{rclcrcl} {}^2H_i^2 &=& \frac{4}{r^2}(1-2m(r)/r) &,& {}^2H_a^2 &=& \frac{4}{r^2}(1-2M_0/r) \\ |{}^2A_i|^2 &=& \frac{2}{r^2}(1-2m(r)/r) &,& |{}^2A_a|^2 &=& \frac{2}{r^2}(1-2M_0/r) \\ {}^2G_i &=& \frac{1}{r^2} &,& {}^2G_a &=& \frac{1}{r^2}\,. \end{array}$$

Beweis: Wir berechnen nur die für das Sterninnere angegebenen Gleichungen. Die äußere Einheitsnormale an S_r ist $\nu = (1-2m(r)/r)^{\frac{1}{2}}\,\partial_r$. Für die zweite Fundamentalform von S_r in $(M, {}^3g)$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned} {}^2h_{ij} &= -{}^3g({}^3\nabla_i\partial_j, \nu) \;=\; -{}^3\Gamma_{ij}^k\,{}^3g(\partial_k, (1-2m(r)/r)^{\frac{1}{2}}\,\partial_r) \\ &= -(1-2m(r)/r)^{-\frac{1}{2}}\,{}^3\Gamma_{ij}^r \;=\; (1-2m(r)/r)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r\sin^2\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$${}^2h_i^{\,j} = {}^2h_{ik}\,{}^2g^{kj} = (1-2m(r)/r)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix},$$

woraus sich die Ergebnisse für die mittlere Krümmung und die volle Norm der zweiten Fundamentalform ergeben.

Da die Sphären isometrisch in $(M, {}^3g)$ immersiert sind, rechnet man mit der Definition der Gaußkrümmung, ${}^2G = {}^2\mathrm{R}_{1212}/(\det {}^2g)$, auch die letzte Behauptung leicht nach. □

Das folgende dimensionsabhängige Ergebnis wurde häufig in Arbeiten von Schoen und Yau verwendet.

Lemma 6.6 *Für eine beliebige zweidimensionale isometrisch immersierte Hyperfläche mit Normalenfeld ν in einer dreidimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit $(M, {}^3g)$ gilt:*

$${}^3\mathrm{Ric}(\nu,\nu) = \frac{1}{2}{}^3\mathrm{R} - {}^2G - \frac{1}{2}|{}^2A|^2 + \frac{1}{2}\,{}^2H^2\,.$$

Beweis: In Normalkoordinaten ist

$$\begin{array}{rrcl} & {}^2G &=& {}^2\mathrm{R}_{ijij} \;=\; {}^3\mathrm{R}_{ijij} + {}^2h_{ii}{}^2h_{jj} - {}^2h_{ij}^2 \;=\; {}^3\mathrm{R}_{ijij} - \frac{1}{2}|{}^2A|^2 + \frac{1}{2}\,{}^2H^2 \\ \text{und} & {}^3\mathrm{R}_{ijij} &=& \frac{1}{2}{}^3\mathrm{R} - {}^3\mathrm{R}_{\nu\nu}\,, \end{array}$$

wobei die Ergebnisse nur in den angegebenen Dimensionen richtig sind. Zusammensetzen der beiden Gleichungen liefert die Behauptung. □

Nun können wir Theorem 6.1 beweisen.

Nach Proposition 6.2 verschwindet die erste Variation $J'(0)$, weil die mittlere Krümmung auf den im Ursprung zentrierten Sphären konstant ist.

Das Vorzeichen der zweiten Variation $J''(0)$ rechnen wir getrennt für das Sterninnere und den Außenraum aus. Mit $\lambda_1 = \frac{2}{r^2}$ bezeichnen wir den ersten Eigenwert des Dirichletproblems auf der Sphäre. Setzen wir Lemma 6.6 in die zweite Variationsformel ein und berücksichtigen die Rayleigh–Darstellung des ersten Eigenwertes, so ist nach Proposition 6.4 die Blätterung genau dann stabil, wenn für jede Sphäre S_r

$$\begin{aligned} J''(0) &= \int_{S_r} \Big((-{}^2\Delta\varphi)\varphi - (|{}^2A|^2 + {}^3\mathrm{Ric}(\nu,\nu))\varphi^2 \Big)\,\mathrm{d}\mu \\ &\geq \int_{S_r} \left(\lambda_1 - \frac{1}{2}{}^3\mathrm{R} + {}^2G - \frac{1}{2}|{}^2A|^2 - \frac{1}{2}\,{}^2H^2 \right) \varphi^2\,\mathrm{d}\mu \\ &=: \int_{S_r} Q\varphi^2\,\mathrm{d}\mu \;\geq\; 0 \end{aligned}$$

ist. Verwenden wir nun Lemma 6.5, um Q zu berechnen, so erhalten wir

$$Q_i = -8\pi\varepsilon(r) + 6m(r)/r^3 \quad \text{und} \quad Q_a = 6M_0/r^3$$

für das Sterninnere und den Außenraum, wobei wir noch die Energy–Constraint–Gleichung[5] ${}^3\mathrm{R} = 16\pi T_{nn} = 16\pi\varepsilon$ für ideale Flüssigkeiten verwendet haben[6].

Da $Q_a \geq 0$, ist die Blätterung im Außenraum stets stabil. Im Sterninnern dagegen ist die Blätterung stabil, wenn $Q_i \geq 0$, also $8\pi\varepsilon(r) \leq 6m(r)/r^3$ ist. Setzen wir $m(r)$ ein, so erhalten wir daraus die Integralungleichung

$$\frac{r^3}{3}\varepsilon(r) \leq \int_0^r \varepsilon(r')r'^2\,\mathrm{d}r'\,.$$

Durch Differenzieren erkennt man leicht, daß wegen $\varepsilon \geq 0$ diese Ungleichung genau dann erfüllt ist, wenn $\varepsilon'(r) \leq 0$ ist. Damit ist Proposition 6.1 bewiesen. □

Will man die mittlere Krümmung der Sphären als Radialkoordinate verwenden, so sollte man noch die Monotonie von ${}^2H(r)$ untersuchen. Da $m(r)$ streng monoton wachsend ist, ist im Sterninnern ${}^2H_i(r)$ streng monoton fallend, wie man leicht aus Lemma 6.5 ablesen kann. Dagegen zeigt eine kurze Rechnung, daß im Außenraum ${}^2H_a(r)$ nur für $M_0/R < 1/3$ streng monoton fallend ist, während im Bereich $1/3 < M_0/R < 1/2$ die mittlere Krümmung im Außenraum für $R < r < 3M_0$ streng monoton wachsend und für $r > 3M_0$ wieder streng monoton fallend ist. Am Sternrand ist die mittlere Krümmung nur stetig.

[5] Im statischen Fall ist die raumartige Hyperfläche total geodätisch, d.h. ${}^3h_{ij} = 0$, und daher ist $2\,{}^4\mathrm{G}_{nn} = {}^3\mathrm{R}$.

[6] Im Außenraum ist $\varepsilon = 0$.

Literatur

[1] R. Schoen & S.-T. Yau. *On the Proof of the Positive Mass Conjecture in General Relativity*. Comm. Math. Phys. **65**, 45–76 (1979).

[2] R. Schoen & S.-T. Yau. *Proof of the Positive Mass Theorem. II*. Comm. Math. Phys. **79**, 231–260 (1981).

[3] Y. Choquet–Bruhat & J. W. York. *The Cauchy Problem*. In: General Relativity and Gravitation, Volume 1, ed. A. Held, Plenum Press (1980).

[4] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Volume Three*. Second Edition. Publish or Perish, Inc. (1979), ISBN 0–914098–83–7.

[5] G. Huisken. *Contracting convex hypersurfaces in Riemannian manifolds by their mean curvature*. Invent. Math. **84**, 463–480 (1986)

[6] R. Abraham & J. E. Marsden & T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Second Edition. Springer–Verlag (1988), ISBN 3–540–96790–7.

[7] R. Schoen & S.-T. Yau. *The Existence of a Black Hole Due to Condensation of Matter*. Comm. Math. Phys. **90**, 575–579 (1983).

[8] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press (1984), ISBN 0–226–87032–4.

[9] G. Huisken & S. T. Yau. *Definition of Center of Mass for Isolated Physical Systems and Unique Foliations by Stable Spheres with Constant Mean Curvature*. Invent. Math. **124**, 281–311 (1996).

[10] J. L. Barbosa & M. do Carmo. *Stability of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature*. Math. Z. **185**, 339–353 (1984).

[11] J. L. Barbosa & M. do Carmo & J. Eschenburg. *Stability of Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in Riemannian Manifolds*. Informes de Matemática do IMPA Série A–061/86 (1986).