Kontraktion raumartiger Hyperflächen entlang ihrer inversen mittleren Krümmung

DIPLOMARBEIT

vorgelegt von

Michael Holder

aus Mähringen

betreut von

Prof. Dr. G. Huisken

Tübingen, im Mai 1996

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Bewegung von kompakten, orientierbaren und in kosmologischen Raumzeiten immersierten Hyperflächen ohne Rand unter dem *inversen mittleren Krümmungsfluß* studiert. Wir zeigen, daß eine Lösung des zugehörigen, nichtlinearen parabolischen Systems partieller Differentialgleichungen so lange existiert, wie die Hyperfläche in einem glatten, kompakten Gebiet der kosmologischen Raumzeit enthalten bleibt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Allgemeine Relativitätstheorie modelliert gewisse Aspekte des physikalischen Universums durch Raumzeiten. Raumzeiten sind zeitorientierte, zusammenhängende Lorentzmannigfaltigkeiten (oft 4-dimensional).

Für isolierte Systeme in der Allgemeinen Relativitätstheorie (z.B. ein Stern) steht das Modell der asymptotisch flachen Raumzeiten. Eine solche Raumzeit nähert sich, weit entfernt vom System, dem Minkowskiraum (spezielle Relativitätstheorie). Im Gegensatz hierzu sind die kosmologischen Raumzeiten Modelle, in denen man das ganze „Universum" im „Großen" betrachten will. Unter einer kosmologischen Raumzeit versteht man eine Raumzeit $\mathcal{V}$, die eine globale Cauchyfläche enthält, d.h. man kann eine kosmologische Raumzeit wie folgt schreiben: $\mathcal{V} = \Sigma^n \times I$, wobei Σ^n eine Cauchyfläche und I ein Intervall ist. Eine Cauchyfläche ist eine raumartige Hyperfläche, die von keiner nicht raumartigen Kurve mehr als einmal geschnitten wird.

Wir betrachten hier in dieser Arbeit kosmologische Raumzeiten, die ausdrücklich eine Anfangs- bzw. Endsingularität zulassen. In der Physik wird die Anfangssingularität meist als „*big bang*" und die Endsingularität als „*big crunch*" bezeichnet. Des weiteren nehmen wir an, daß die zeitartige Konvergenzbedingung erfüllt ist, d.h. $\overline{Ric}(X, X) \geq 0$ für alle zeitartigen Vektorfelder X.

Man versucht solche Mannigfaltigkeiten besser zu verstehen, indem man Blätterungen in ihnen findet. *Gerhardt* zeigte in [GC1], daß in einer kosmologischen Raumzeit, in der die zeitartige Konvergenzbedingung erfüllt ist, eine Blätterung mit Hyperflächen konstanter mittlerer Krümmung und mindestens eine Maximalfläche existieren. Hierzu benötigte er die Existenz einer Anfangssingularität und einer Endsingularität, die von Flächen beliebig großer bzw. kleiner mittlerer Krümmung umschlossen werden. *Bartnik* löste in [BR1] das korrespondierende Problem für asymptotisch flache Raumzeiten. Beide Arbeiten haben jedoch den Nachteil, daß die Existenzbeweise nicht konstruktiv sind, da sie auf topologischen Fixpunkttheoremen beruhen.

Diesen Mangel beseitigten *Ecker* und *Huisken* in [EH1], indem sie den zugehörigen mittleren Krümmungsfluß betrachteten. Sie erhielten raumartige Hyperflächen mit vorgeschriebener mittlerer Krümmung $\mathcal{H}$ in kosmologischen Raumzeiten, die die zeitartige Konvergenzbedingung erfüllen, als asymptotischen Grenzwert der geometrischen Evolutionsgleichung $\frac{d}{ds}F = (H - \mathcal{H})\nu$. Das heißt, sie geben einen alternativen, konstruktiven Beweis für die Existenz von Maximalflächen und Flächen konstanter mittlerer Krümmung an. Auch sie mußten die Existenz von Barrieren annehmen, d.h. Flächen mit strikt größerer und strikt kleinerer mittleren Krümmung als $\mathcal{H}$.

Der „mittlere Krümmungsfluß“ hat also die Eigenschaft, Hyperflächen zu einer Maximalfläche hin zu deformieren. Wir wollen hier jedoch einen Fluß betrachten, der Hyperflächen von der Maximalfläche weg und zu der Anfangssingularität hin deformiert, den inversen mittleren Krümmungsfluß.

Sei also M_0 eine glatte, orientierbare, kompakte, raumartige Hyperfläche in einer kosmologischen Raumzeit $\mathcal{V}$. Wir nehmen an, daß M_0 gegeben ist durch eine Immersion

$$F_0 : M^n \to \mathcal{V}.$$

1.1 Definition. *Inverser mittlerer Krümmungsfluß (IMK)*

Eine Familie glatter Immersionen $F_s = F(\cdot, s) : M^n \to \mathcal{V}, s \in [0, Z)$ genügt dem inversen mittleren Krümmungsfluß, falls gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}F(p,s) &= -\Big(\frac{1}{H}\nu\Big)(p,s), \\ & \qquad\qquad p \in M^n, \quad s \geq 0, \\ F(p,0) &= F_0(p). \end{aligned} \tag{IMK}$$

Wobei $\nu(p,s)$ die zukunftsgerichtete Einheitsnormale auf $M_s := F(\cdot, s)(M^n)$ an der Stelle $F(p,s)$ ist und $H > 0$ die mittlere Krümmung auf M_s ist.

Die Evolution von Hyperflächen entlang ihrer mittleren Krümmung wurde ausführlich im Falle eines Riemannschen Umgebungsraumes studiert. *Huisken* betrachtete in [H1,H2] den sogenannten *inward flow* oder auch kontrahierenden Fluß, $\frac{d}{ds}F = -H\nu$, also einen Fluß der zur Singularität hin deformiert. Er konnte zeigen, daß konvexe Hyperflächen nach geeigneter Reskalierung gegen eine runde Sphäre konvergieren. Der *outward flow* oder expandierende Fluß wurde von *Gerhardt* [GC2] und *Urbas* [U1,U2] studiert. In unabhängig voneinander entstandenen Arbeiten konnten sie für kompakte, sternförmige $C^{2,\alpha}$-Flächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ und für verschiedene, expandierende Flüsse exponentielle Konvergenz der reskalierten Flächen zu runden Sphären beweisen. Die Arbeit von *Gerhardt* beinhaltet den Fluß $\frac{d}{ds}F = \frac{1}{H}\nu$, der mit dem hier verwendeten Fluß (*IMK*) eng verwandt ist.

Unser Ziel ist es, „Langzeitexistenz“ für den inversen mittleren Krümmungsfluß (*IMK*) zu beweisen. Im folgenden Kapitel werden wir die Notation festgelegen und wichtige, grundlegende Gleichungen herleiten. In Kapitel 3 zeigen wir dann, daß zu einer vorgegebenen, glatten „Startimmersion“ M_0 mindestens für ein kurzes Zeitintervall eine eindeutige, glatte Lösung des nichtlinearen parabolischen Systems partieller Differentialgleichungen (*IMK*) existiert (Theorem 3.6 bzw.

3.7). Hierzu schreibt man die Flächen M_s, für kleine Zeiten s, als Graph über M_0 und transformiert so das gegebene System (*IMK*) in eine „äquivalente" *skalare*, nichtlineare parabolische, partielle Differentialgleichung. Die Existenz einer Lösung für dieses Problem folgt aus Resultaten der nichtlinearen parabolischen Theorie [HA3].

In Kapitel 4 berechnen wir, ausgehend von der Evolution (*IMK*), die Evolutionsgleichungen für die Metrik, das Volumenelement, die äußere Normale, die Höhenfunktion, die Gradientenfunktion, die zweite Fundamentalform und die mit ihr zusammenhängenden Größen.

Mit Hilfe dieser Evolutionsgleichungen berechnen wir dann zunächst eine untere a priori Schranke für die mittlere Krümmung (Satz 5.2). Weiter erhalten wir eine obere a priori Schranke für die Gradientenfunktion (Satz 5.3) und die mittlere Krümmung (Satz 5.4), indem wir ähnliche Methoden, wie *Bartnik* [BR1], beziehungsweise *Ecker* und *Huisken* [EH1] für die Gradientenfunktion, anwenden. Die obere a priori Schranke für die zweite Fundamentalform (Satz 6.2) erhalten wir durch eine analoge Vorgehensweise zu der von *Gerhardt*, im Fall eines Expandierenden Flusses im $\mathbb{R}^{n+1}$ [GC2].

Aus den schon erhaltenen Schranken ergibt sich nun, mit einem Resultat von Krylov [KN: Kapitel 5], eine $C^{0,\alpha}$ Schranke für die zweiten Ableitungen der Höhenfunktion u (Satz 6.3), die uns dann schließlich, nach Standardergebnissen aus der Regularitätstheorie, die volle Regularität liefert.

Unter Annahme einer oberen Schranke an den Gradienten der mittleren Krümmung, können wir auf Satz 6.3 (also auf das Resultat von Krylov) verzichten und erhalten so in Kapitel 7, a priori Schranken für sämtliche Ableitungen der zweiten Fundamentalform und somit auch die volle Regularität.

Mit Hilfe der Schranken aus Kapitel 5 und 6 bzw. 7 und der Kurzzeitexistenz (Satz 3.7) können wir schließlich die „Langzeitexistenz" (Theorem 8.1) beweisen.

Im letzten Kapitel betrachten wir unseren Fluß in Robertson-Walker-Raumzeiten, ein besonderes Beispiel für kosmologische Raumzeiten. Im speziellen interessieren wir uns für die kosmologischen Friedmann Modelle, die für ein gutes Modell unseres Universums im „Großen" gehalten werden.

Mein Dank gilt an erster Stelle Herrn Professor Dr. Huisken, der mich die letzten beiden Jahre hervorragend betreut hat.
Ferner sei Volker Christ für seine Diskussionsbereitschaft und die sehr gute Zusammenarbeit zu Beginn der Arbeit, wie auch meinen Eltern, die mich während meines Mathematikstudiums in jeder Hinsicht unterstützten, gedankt. Nicht zu-

letzt danke ich auch Alexander Polden, für die Hilfe mit den Silicons & Co, Ralf Rigger, für die ab und zu nötigen Problemdiskussionen und Marie-Louise Schimmel, für die an manchen Tagen unverzichtbare Versorgung mit Kaffee.
Schließlich möchte ich mich noch ganz besonders bei meiner Frau Annette und bei meinem Sohn Jacob, für ihre endlose Geduld und die ständigen Aufmunterungen bedanken.

2 Notation und Grundlagen

Sei $\mathcal{V}$ eine (n+1)-dimensionale Raumzeit mit einer Lorentzmetrik $\overline{g} = \{ \overline{g}_{\alpha\beta}\}$, der Signatur $(-,+,+,...,+)$.Wir bezeichnen die zur Metrik gehörende Bilinearform mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$, den kanonischen Zusammenhang mit $\overline{\nabla}$ und den Krümmungstensor mit $\overline{Rm} = \{ \overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} \}$. Griechische Indizes laufen grundsätzlich von 0 bis n. Wie in [BR1] nehmen wir die Existenz einer globalen *Zeitfunktion* $t \in C^\infty(\mathcal{V})$, mit einem von Null verschiedenen, vergangenheitsorientierten, zeitartigen Vektorfeld $\overline{\nabla}t$, an. Die Referenzblätter $\mathcal{S}_{\mathrm{t}} := \{p \in \mathcal{V} \mid t(p) = \mathrm{t}\}$ haben einen zukunftsorientierten Einheitsnormalenvektor

$$T = -\psi\overline{\nabla}t,$$

wobei die *lapse Funktion* $\psi \in C^\infty(\mathcal{V})$ definiert ist durch

$$\psi^{-2} := -\langle\overline{\nabla}t, \overline{\nabla}t\rangle.$$

Wir bezeichnen ein angepaßtes Orthonormalsystem auf $\mathcal{S}_{\mathrm{t}}$ durch $e_0, e_1, \ldots, e_n$ so, daß $e_0 = T$.

Sei M eine glatte, raumartige Hyperfläche in $\mathcal{V}$, die eingebettet ist durch eine Abbildung

$$F : M^n \to \mathcal{V}.$$

Sei ν der zukunftsorientierte, zeitartige Einheitsnormalenvektor und wähle lokal ein angepasstes Orthonormalsystem $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n$ in $\mathcal{V}$ so, daß eingeschränkt auf M, $\tau_0 = \nu$ gilt. Wir bezeichnen mit $g = \{g_{ij}\}$ und $Rm = \{R_{ijkl}\}$ die induzierte Metrik, beziehungsweise den Riemannschen Krümmungstensor auf M. Lateinische Indizes laufen immer von 1 bis n. Desweiteren steht ∇ für die kovariante Ableitung und Δ für den Laplace-Beltrami Operator auf M bezüglich der Metrik g. Die zweite Fundamentalform $A = \{h_{ij}\}$ auf M ist gegeben durch

$$h_{ij} := \langle\overline{\nabla}_{\tau_i}\nu, \tau_j\rangle = -\langle\nu, \overline{\nabla}_{\tau_i}\tau_j\rangle.$$

Gleichheit gilt weil $\overline{\nabla}_{\tau_i}\langle\nu, \tau_j\rangle = 0$ (da $\langle\nu, \tau_j\rangle = 0$).

2.1 Bemerkungen.

(1) Wir werden des öfteren Rechnungen an einem Punkt $p_0 \in M$ durchführen. Wenn nun $\{x_i\}$ ein Koordinatensystem von M ist und $\{y_\alpha\}$ ein Koordinatensystem von $\mathcal{V}$ ist, so können diese Koordinatensysteme so gewählt werden, daß $\Gamma^k_{ij}(p_0) \equiv 0$, $\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk}(p_0) \equiv 0$, $\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}(p_0) \equiv 0$ und $\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\overline{g}_{\alpha\beta}(p_0) \equiv 0$ (Normalkoordinaten) ist. Hierbei bezeichnen Γ^k_{ij} und $\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$ die Christoffelsymbole auf M beziehungsweise

$\mathcal{V}$. Man kann sogar $\{y_\alpha\}$ so wählen, daß $\frac{\partial F^\alpha}{\partial x_i}(p_0) = \delta_i^\alpha$ gilt.
Wir können jedoch auch das Koordinatensystem $\{x_i\}$ so wählen, daß $h_{ij}(p_0)$ Diagonalform hat oder $g_{ij}(p_0) = \delta_{ij}$ gilt.
(2) Tensoridentitäten sind unabhängig vom Koordinatensystem. Wenn wir also durch Rechnung in einem speziellen Koordinatensystem eine Tensoridentität erhalten, so gilt diese in jedem Koordinatensystem.

Wie in [H1,EH1] summieren wir über zwei sich wiederholende Indizes:

$$\begin{aligned} H &:= h_i^i = h_{ij}g^{ij} \qquad (\text{lokal} = h_{ii}\,(s.o.)) \\ |A|^2 &:= h_{ij}h^{ij} = h_{ij}h_{kl}g^{ik}g^{jl} \quad (\text{lokal} = h_{ij}h_{ij}\,(s.o.)) \end{aligned}$$

Die Krümmung, die Ricci Krümmung $Ric = \{R_{ij}\}$ und die skalare Krümmung R auf M sind durch die Gauß Gleichung gegeben:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \overline{R}_{ijkl} - h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk}, \\ \text{Kontraktion} \Rightarrow R_{ik} &= \overline{R}_{ik} - Hh_{ik} + h_{il}h_{lk} + \overline{R}_{i0k0}, \\ \text{Kontraktion} \Rightarrow R &= \overline{R} - H^2 + |A|^2 + 2\overline{R}ic(\nu,\nu). \end{aligned}$$

Die Codazzi Gleichung gibt uns:

$$\nabla_k h_{ij} - \nabla_j h_{ik} = \overline{R}_{0ijk}.$$

Es gelten allgemein folgende Regeln für das Vertauschen von kovarianten Ableitungen:

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_j Y_k - \nabla_j \nabla_i Y_k &= -R_{ijkl}Y_l, \\ \nabla_i \nabla_j T_{kl} - \nabla_j \nabla_i T_{kl} &= R_{slij}T_{ks} + R_{skij}T_{sl}. \end{aligned}$$

Da $\overline{R}_{ijkl} = \langle \overline{R}(\tau_k, \tau_l)\tau_j, \tau_i\rangle$ und $R_{00ik} = 0$ (wegen Antisymmetrie) ist, erhalten wir noch die folgende Beziehung:

$$\overline{\nabla}_l \overline{R}_{0ijk} = \nabla_l \overline{R}_{0ijk} - \overline{R}_{0i0k}h_{jl} - \overline{R}_{0ij0}h_{kl} - \overline{R}_{mijk}h_{ml}.$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir die folgenden fundamentalen Identitäten (siehe auch [SSY,CY,NS]).

2.2 Lemma.

Es gilt:

$$\begin{aligned} (i)\Delta h_{ij} &= \nabla_i \nabla_j H + \overline{\nabla}_j \overline{R}_{0kik} + \overline{\nabla}_k \overline{R}_{0ijk} + H\overline{R}_{0ij0} \\ &\quad + h_{ij}(\overline{R}ic(\nu,\nu) + |A|^2) + h_{il}\overline{R}_{lkjk} + h_{lj}\overline{R}_{lkik} \\ &\quad + 2h_{lk}\overline{R}_{lijk} - Hh_{ik}h_{kj}, \\ (ii)\Delta |A|^2 &= \nabla_i \nabla_j Hh_{ij} + \overline{\nabla}_j \overline{R}_{0kik}h_{ij} + \overline{\nabla}_k \overline{R}_{0ijk}h_{ij} + H\overline{R}_{0ij0}h_{ij} \\ &\quad + |A|^2(\overline{R}ic(\nu,\nu) + |A|^2) + h_{il}h_{ij}\overline{R}_{lkjk} + h_{lj}h_{ij}\overline{R}_{lkik} \\ &\quad + 2h_{lk}h_{ij}\overline{R}_{lijk} - Hh_{ik}h_{kj}h_{ij}. \end{aligned}$$

Beweis durch Nachrechnen:

$$
\begin{aligned}
\Delta h_{ij} &= div(grad\, h_{ij}) = div(\nabla h_{ij}) = \nabla_k (\nabla_k h_{ij}) \\
&= \nabla_k (\nabla_j h_{ik}) + \nabla_k \overline{R}_{0ijk} = \nabla_j (\nabla_k h_{ik}) + h_{im} R_{mkjk} \\
&\quad + h_{mk} R_{mijk} + \nabla_k \overline{R}_{0ijk} \\
&= \nabla_j (\nabla_i h_{kk}) + \nabla_j \overline{R}_{0kik} + h_{im} R_{mkjk} + h_{mk} R_{mijk} + \nabla_k \overline{R}_{0ijk} \\
&= \nabla_i (\nabla_j H) + R_{skji} h_{ks} + R_{skji} h_{sk} + \nabla_j \overline{R}_{0kik} + h_{im} R_{mkjk} \\
&\quad + h_{mk} R_{mijk} + \nabla_k \overline{R}_{0ijk} \\
&= \nabla_i \nabla_j H + \overline{\nabla}_j \overline{R}_{0kik} + \overline{\nabla}_k \overline{R}_{0ijk} \\
&\quad + h_{im} (\overline{R}_{mkjk} - h_{mj} h_{kk} + h_{mk} h_{kj}) \\
&\quad + h_{mk} (\overline{R}_{mijk} - h_{mj} h_{ik} + h_{mk} h_{ij}) \\
&\quad + h_{ks} (\overline{R}_{skji} - h_{sj} h_{ki} + h_{si} h_{kj}) \\
&\quad + h_{sk} (\overline{R}_{skji} - h_{sj} h_{ki} + h_{si} h_{kj}) \\
&\quad + \overline{R}_{0k0k} h_{ij} + \overline{R}_{0ki0} h_{kj} + \overline{R}_{mkik} h_{mj} \\
&\quad + \overline{R}_{0i0k} h_{jk} + \overline{R}_{0ij0} h_{kk} + \overline{R}_{mijk} h_{mk} \\
&= \nabla_i \nabla_j H + \overline{\nabla}_j \overline{R}_{0kik} + \overline{\nabla}_k \overline{R}_{0ijk} + h_{ij} (\overline{R}ic(\nu,\nu) + |A|^2) \\
&\quad + H \overline{R}_{0ij0} + h_{il} \overline{R}_{lkjk} + h_{lj} \overline{R}_{lkik} + 2 h_{lk} \overline{R}_{lijk} - H h_{ik} h_{kj} + 0.
\end{aligned}
$$

Beachte:

$$
\begin{aligned}
h_{ks} (\overline{R}_{skji} - h_{sj} h_{ki} + h_{si} h_{kj}) + h_{sk} (\overline{R}_{skji} - h_{sj} h_{ki} + h_{si} h_{kj}) = 0, \\
h_{mk} h_{mk} h_{ij} = h_{ij} |A|^2, \quad \overline{R}_{0k0k} = \overline{R}ic(\nu,\nu).
\end{aligned}
$$

Somit folgt (i).

$$
\begin{aligned}
\Delta |A|^2 &= \nabla_k \nabla_k (h_{ij} h_{ij}) = \nabla_k (\nabla_k h_{ij} \cdot h_{ij} + h_{ij} \cdot \nabla_k h_{ij}) \\
&= \nabla_k 2 (\nabla_k h_{ij} \cdot h_{ij}) = 2 (\nabla_k \nabla_k h_{ij} \cdot h_{ij} + 2 (\nabla_k h_{ij} \cdot \nabla_k h_{ij}) \\
\Rightarrow \frac{1}{2} \Delta |A|^2 &= \Delta h_{ij} \cdot h_{ij} + |\nabla A|^2
\end{aligned}
$$

und mit (i) folgt (ii). □

Für die a priori Abschätzungen ist es wichtig die *Höhenfuktion* u durch

$$u(p) := t(F(p))$$

einzuführen und die *Gradientenfunktion* v, die den Winkel zwischen M und der Referenzfläche $\mathcal{S}_t$ mißt, durch

$$v := -\langle \nu, T \rangle$$

einzuführen. Wie in [BR1,2.8] erhalten wir die Identität

$$\Delta u = div \overline{\nabla} t + \psi^{-1} v H. \tag{2.1}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\nabla u &= \nabla t = (\overline{\nabla} t)^T = \overline{\nabla} t + \langle \overline{\nabla} t, \nu\rangle \nu = \overline{\nabla} t + \psi^{-1} v \nu \\ \Rightarrow \Delta u &= div(\nabla u) = div \overline{\nabla} t + div(\psi^{-1} v \nu) = div \overline{\nabla} t + \psi^{-1} v H,\end{aligned}$$

da: $div\ \nu = H$ ist. Beachte: „a^T“ bezeichnet die Projektion des Vektors a auf den Tangentialraum von M, d.h. $a^T := a + \langle a, \nu\rangle \nu$. □

Des weiteren gilt noch folgende Ungleichung:

$$\langle \tau_\alpha, e_\beta \rangle \leq v$$

für alle $0 \leq \alpha, \beta \leq n$. Somit können wir die Einschränkung jedes p-Tensors $B \in T^p(\mathcal{V})$ auf M abschätzen durch

$$\| B|_{TM} \|_\infty \leq v^p \|B\|_\infty. \tag{2.2}$$

Für einen Tensor B bezeichnen wir mit $\|B\|_{l,G}$ die C^l-Norm von B auf dem Gebiet $G \subset \mathcal{V}$.
Ab und zu benötigen wir noch die folgende, elementare Ungleichung für reelle Zahlen a, b:

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2. \tag{2.3}$$

2.3 Lemma. *Erste Variationsformel für H.*

Wir haben

$$\Delta v = v(|A^2| + \overline{R}ic(\nu,\nu)) - \langle T, \nabla H\rangle + T(H_T). \tag{2.4}$$

Wobei $T(H_T)$ die Variation der mittleren Krümmung von M unter dem Deformationsvektorfeld T ist. Diese kann man auch in Termen des Killing Tensors $\mathcal{L}_T g(X,Y) = \langle \nabla_X\ T, Y\rangle + \langle \nabla_Y\ T, X\rangle$ schreiben:

$$\begin{aligned} T(H_T) &= \frac{1}{2}(\overline{\nabla}_\nu \mathcal{L}_T g)(e_i, e_i) - (\overline{\nabla}_{e_i} \mathcal{L}_T g)(\nu, e_i) - \frac{1}{2} H \mathcal{L}_T g(\nu,\nu) \\ &\quad - \mathcal{L}_T g(e_i, e_j) A(e_i, e_j). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Beweis: Siehe Anhang oder [BR1,CB,FM].

3 Kurzzeitexistenz

Der erste Schritt zur Lösung des Problems (IMK) ist der Nachweis der Existenz einer Lösung auf einem sehr kleinen Zeitintervall $[0, \delta]$. Die Existenz einer Lösung für „lange“ Zeiten erhält man dann aus Gradienten- und Krümmungsabschätzungen, indem man mit Hilfe der Kurzzeitexistenz zeigt, daß eine glatte Lösung auf einem Zeitintervall $[0,T]$, die dort eine Krümmungsschranke erfüllt, sich fortsetzen läßt zu einer glatten Lösung auf $[0,T+\delta)$.

Da das nichtlineare System partieller Differentialgleichungen (*IMK*) nicht strikt parabolisch ist, müssen wir um die Kurzzeitexistenz zu zeigen, das Problem in ein äquivalentes Problem einer *skalaren* Funktion $w : M^n \times [0,\delta] \to \mathbb{R}$ transformieren, welches nach Resultaten der Theorie nichtlinearer parabolischer Evolutionsgleichungen [HA3] eine eindeutige Lösung für kurze Zeiten besitzt.

Der Existenzbeweis, den wir hier führen, lehnt sich eng an einen Beweis aus [EH2] oder auch [SA] an, wo er für den mittleren Krümmungsfluß von Hyperflächen ohne Rand, bzw. mit Neumann Randwerten im Euklidischen Raum, geführt wird.

Sei $M_0 = F_0(M^n)$ eine glatte Immersion von M^n in $\mathcal{V}$ mit zukunftsgerichteter Einheitsnormalen N_0 und seien $(x^1,...,x^n)$ Koordinaten auf M^n. Zu gegebenem $x_0 = (x_0^1,...,x_0^n) \in M^n$ gibt es dann eine Umgebung $\mathcal{T}_{x_0} \subset M^n$, so daß in einer Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ von $\mathcal{W}_{x_0} := F_0(\mathcal{T}_{x_0})$ ein glattes Vektorfeld ξ existiert, mit den Eigenschaften:

$$\xi|_{\mathcal{W}_{x_0}} = N_0 \ , \quad \|\xi\| \equiv 1 \ .$$

Sei Φ der zu diesem Vektorfeld gehörende Fluß, $\Phi(x,s) :=$ derjenige Punkt in $\mathcal{V}$, den man erreicht, wenn man im Punkt $F_0(x)$ startet und ein Stück der Länge $|s|$ der Flußlinie durch $F_0(x)$ entlangläuft, d.h.

$$\Phi(x,s) = \int_0^s \Phi'(x,\sigma)d\sigma = \int_0^s \xi(\Phi(x,\sigma))d\sigma \ .$$

In einer Tubenumgebung $\mathcal{U}_\varepsilon := \{\,\Phi(x,s) \ : \ x \in M^n\,,\, |s| < \varepsilon\,\}$ von M_0 in $\mathcal{V}$ erhält man dann Koordinaten wie folgt: [1] Ist $p = \Phi(x,s)$, so seien $(x^1,...,x^n)(p)$ die Koordinaten von $x \in M^n$ und $x^0(p) := s$ (d.h. $(x^1,...,x^n)(p)$ sind die Koordinaten des Fußpunktes der Flußlinie durch p auf M_0 und $x^0(p)$ die Länge der Flußlinie zwischen p und diesem Fußpunkt mit Vorzeichen). Ein Spezialfall der so konstruierten Koordinaten sind die Gaußkoordinaten (man fordert noch $\nabla_\xi\, \xi = 0$). Bezüglich diesen Koordinaten hat man an jedem Punkt von $\mathcal{U}_\varepsilon$ eine Standardbasis $\{\bar\tau_\alpha\} = \{\xi, \bar\tau_1, ..., \bar\tau_n\}$ von $T\mathcal{V}$ mit Lorentzmetrik $\overline{g}_{\alpha\beta} := \langle \bar\tau_\alpha, \bar\tau_\beta\rangle$, $(\overline{g}^{\alpha\beta}) = (\overline{g}_{\alpha\beta})^{-1}$ und Zusammenhang mit Christoffelsymbolen $\overline{\Gamma}^\rho_{\alpha\beta}$. Es wird sich zeigen, daß die Flächen M_s für kleine Zeiten s in diesen Koordinaten als Graphen einer Skalarfunktion $w : M^n \times [0,\delta] \longrightarrow \mathcal{V}$ geschrieben werden können, d.h. $M_s = \{\, p \in \mathcal{V} : p = \Phi(x, w(x,s))\,,\, x \in M^n\,\}$. Im weiteren wird nicht mehr zwischen einem Punkt $p \in \mathcal{V}$ und seinem Koordinatenvektor

[1] Man betrachtet also eine Immersion der Produktmannigfaltigkeit $M^n \times (-\varepsilon,\varepsilon)$ in $\mathcal{V}$, die lokal gegeben ist durch $(x,\sigma) \to \Phi(x,\sigma)$.

$x(p)$ unterschieden. Damit hat man zunächst:

3.1 Lemma. Graphen in krummlinigen Koordinaten

Sei $F : M^n \to \mathcal{V}, F(x_1, \dots, x_n) = (w(x_1, \dots, x_n), x_1, x_2, \dots, x_n)$. *Dann gilt:*

(i) *Standardtangentialvektorfelder an* $F(M^n)$ *sind*

$$X_k(x_1, \dots, x_n) = (D_k w, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)(x_1, \dots, x_n) \ ,$$

(ii) *ein Einheitsnormalenfeld (zukunftsgerichtet) ist gegeben durch*

$$\bar{\nu}(x)^\alpha = \tfrac{1}{\bar{v}} \overline{g}^{\alpha\beta} (Dw)_\beta$$

mit $(Dw)_\beta = -1$ *für* $\beta = 0$, $(Dw)_\beta = D_i w$ *sonst,* $\overline{g}^{\alpha\beta} = \overline{g}^{\alpha\beta}(w(x), x)$ *und* $\bar{v} := \sqrt{-\overline{g}^{\varrho\delta}(Dw)_\varrho (Dw)_\delta}$ *;*

(iii) $\langle \bar{\nu}, \bar{\tau}_k \rangle (w(x), x) = \bar{v}^{-1} D_k w(x)$ *und* $\langle \bar{\nu}, N \rangle (w(x), x) = -\bar{v}^{-1}$ *;*

(iv) *die Fundamentalformen von* $F(M^n)$ *sind gegeben durch*

$$g_{ij}(x) = (\overline{g}_{ij} + \overline{g}_{i0} D_j w + \overline{g}_{0j} D_i w + D_i w D_j w)(x),$$

$$h_{ij}(x) = \bar{v}^{-1} \Big(D_i D_j w - \overline{\Gamma}^k_{\alpha\beta} X_i^\alpha X_j^\beta D_k w + \overline{\Gamma}^0_{\alpha\beta} X_k^\alpha X_j^\beta \Big)(x) \ .$$

Beweis:

(i) : Klar.

(ii) : Rechne nach, daß für $1 \le k \le n$ gilt: $\langle X_k, \bar{\nu} \rangle (w(x), x) = 0$ und die Gleichung für $\bar{v}$ ergibt sich aus der Normierung.

(iii) : Ebenfalls Nachrechnen.

(iv) : $g_{ij}(x) = \langle X_i, X_j \rangle (x) = \overline{g}_{\alpha\beta} X_k^\alpha X_j^\beta$.

Mit den Weingarten Gleichungen:

$$h_{ij} = \Big(- \tfrac{\partial^2 F^\alpha}{\partial x_i \partial x_j} + \Gamma^k_{ij} \tfrac{\partial F^\alpha}{\partial x_k} - \overline{\Gamma}^\alpha_{\rho\sigma} \tfrac{\partial F^\rho}{\partial x_i} \tfrac{\partial F^\sigma}{\partial x_j} \Big) \nu^\beta \overline{g}_{\alpha\beta}$$

erhalten wir durch Einsetzen von $F(x) = (w(x), x)$ die Behauptung. $\square$

Nehme an, wir hätten eine glatte Lösung $w : M^n \times [0, \delta] \to \mathbb{R}$ von

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial s}(x, s) = (-\bar{v}\frac{1}{\tilde{H}})(x, t) \qquad \forall (x, s) \in M^n \times [0, \delta], \\ &w(\cdot, 0) = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

wobei $\tilde{H} > 0$ die mittlere Krümmung des Graphen von w ist und $\bar{v}$ wie in Lemma 3.1 ist. Dann setzen wir

$$\tilde{F} : M^n \times [0, \delta] \to \mathcal{V}, \quad \tilde{F}(x, s) := (w(x, s), x),$$

und $\tilde{M}_s := \tilde{F}(M^n, s)$ und wir erhalten eine glatte Immersion in $\mathcal{V}$. Der so definierte Fluß (3.1) wird im weiteren als *Graphenfluß* (GF) bezeichnet. Wir werden nun zeigen, daß der Graphenfluß (GF) und der inverse mittlere Krümmungsfluß (IMK) im folgenden Sinne äquivalent sind:

3.2 Satz. (GF) ist äquivalent zu (IMK)

Zu jeder Lösung von (3.1) existiert eine Lösung von (IMK) und umgekehrt derart, daß sich die Lösungen nur um einen tangentialen Diffeomorphismus unterscheiden.

Dies bedeutet, daß die Flächen M_s und $\tilde{M}_s$ als Teilmengen von $\mathcal{V}$ gleich sind für alle $s \in [0, \delta]$. Jedoch ist die Bewegung eines Punktes x_0 unter den beiden Flüssen unterschiedlich, d.h. es ist im allgemeinen $F(x_0, s) \neq \tilde{F}(x_0, s)$ für $s > 0$. Die Abbildung 1 veranschaulicht diesen Unterschied.
Der *Beweis* ergibt sich direkt aus den beiden folgenden Lemmata. Hier jedoch zunächst:

3.3 Satz. Kurzzeitexistenz von (GF)

(3.1) *besitzt auf einem kleinen Zeitintervall eine eindeutige Lösung*

$$w \in C^\infty(M^n \times (0, \delta]) \cap C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(M^n \times [0, \delta]).$$

Beweis:
Es ist zu zeigen, daß (3.1) ein nichtlineares parabolisches Problem im Sinne von

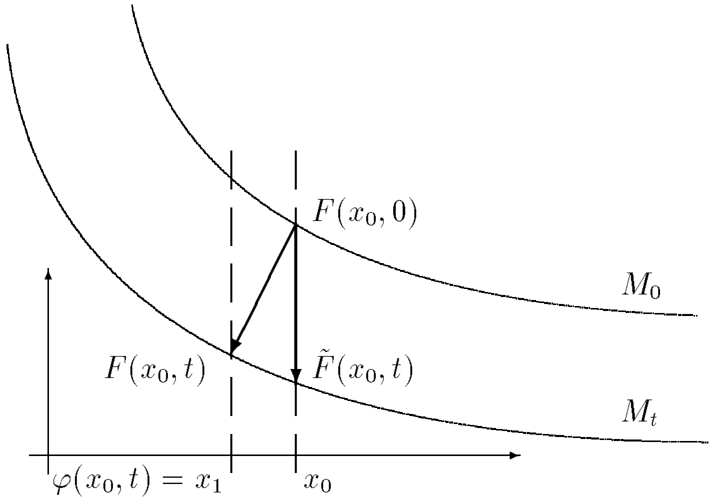

Abbildung 1: Unterschiedliche Bewegung von Punkten unter dem inversen mittleren Krümmungsfluß und dem Graphenfluß.

[HA3] ist, dann folgt mit [HA3] die Behauptung. Das Problem heißt parabolisch wenn für

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= -(\frac{1}{g^{ij}h_{ij}}\bar{v}) \\ &= -\bar{v}^2 \frac{1}{(g^{ij}D_iD_jw) + f(x, s, w, Dw)} \\ &=: P(x, s, w, D_kw, D_iD_jw) =: P(x, s, w, r_k, z_{ij})\end{aligned}$$

gilt, daß die Matrix

$$\frac{\partial}{\partial z_{ij}} P$$

positiv definit ist. Ausrechnen ergibt

$$\frac{\partial}{\partial z_{ij}} P = \bar{v}^2 g^{ij} \frac{1}{\tilde{H}^2}.$$

Dieser Ausdruck ist positiv definit, weil g^{ij} als erste Fundamentalform (Metrik) von $\tilde{M}_t$ positiv definit ist.

3.4 Lemma. $(GF) \rightsquigarrow (IMK)$

Sei eine glatte Lösung von (3.1) *gegeben. Dann gilt:*

$F : M^n \times [0, \delta] \to \mathcal{V}, F(x, s) := \tilde{F}(\varphi(x, s), s)$ *löst* (*IMK*), *wobei* $\varphi : M^n \times [0,\delta] \to M^n$ *eindeutig definiert ist durch das System gewöhnlicher Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\varphi(x,s) &= -\Big(D_x\tilde{F}\Big)^{-1}\cdot\Big(\frac{\partial}{\partial s}\tilde{F}\Big)^T(\varphi(x,s),s), \\ \varphi(x,0) &= x. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Hierbei bezeichnet „a^T“ die Projektion des Vektors a auf den Tangentialraum von $\tilde{M}_s$, d.h. $a^T := a + \langle a, \tilde{\nu}\rangle\tilde{\nu}$. Beachte: es gilt nach Konstruktion, daß $\bar{\nu}(x,s) = \tilde{\nu}(\varphi(x,s),s)$ und $H(x,s) = \tilde{H}(\varphi(x,s),s)$!

Beweis:
Für die Evolutionsgleichung gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}F(x,s) &= \frac{d}{ds}\tilde{F}(\varphi(x,s),s) \\ &= \Big(D_x\tilde{F}(\varphi(x,s),s)\Big)\cdot\frac{d\varphi}{ds}(x,s) + \frac{\partial}{\partial s}\tilde{F}(\varphi(x,s),s) \\ &\overset{(3.2)}{=} -\Big(\frac{\partial}{\partial s}\tilde{F}\Big)^T(\varphi(x,s),s) + \frac{\partial}{\partial s}\tilde{F}(\varphi(x,s),s) \\ &= -\langle\frac{\partial}{\partial s}\tilde{F},\tilde{\nu}\rangle\tilde{\nu}(\varphi(x,s),s) = -\langle(\frac{\partial w}{\partial s},0),\tilde{\nu}\rangle\tilde{\nu}(\varphi(x,s),s) \\ &\overset{(3.1)}{=} \Big(\frac{1}{\tilde{H}}\bar{v}(\overline{g}_{o\alpha}\tilde{\nu}^\alpha)\tilde{\nu}\Big)(\varphi(x,s),s) \\ &= -\frac{1}{\tilde{H}}\tilde{\nu}(\varphi(x,s),s) = -\frac{1}{H}\nu(x,s). \end{aligned}$$

□

3.5 Lemma. $(IMK) \rightsquigarrow (GF)$

Sei eine glatte Lösung von (IMK) gegeben, die man als Graph über M_0 *schreiben kann, dann definieren wir*

$$\tilde{F}(\varphi(x,s),s) := (w(\varphi(x,s),s),\varphi(x,s)) := F(x,s)$$

mit einem tangentialen Diffeomorphismus φ *und einer skalaren Funktion* w *wie oben. Dann gilt:*

$w : M^n \times [0,\delta] \to \mathbb{R}$ *ist eine Lösung von* (3.1).

Beweis:
Ausgehend von der Evolutionsgleichung für F erhalten wir

$$\frac{d}{ds}F(x,s) = (\frac{d}{ds}w(\varphi(x,s),s),\frac{d}{ds}\varphi(x,s)).$$

Berechne nun

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{d\varphi}{ds}(x,s)\Big)^i &= \Big(\frac{d}{ds}F(x,s)\Big)^i = \Big(-\frac{1}{H}\nu\Big)^i(x,s)\\
&= \Big(-\frac{1}{\tilde H}\tilde\nu\Big)^i(\varphi(x,s),s)\\
&= \Big(-\frac{1}{\tilde H}\bar v^{-1}\overline{g}^{i\beta}(Dw)_\beta\Big)(\varphi(x,s),s)
\end{aligned}$$

und genauso

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{ds}(\varphi(x,s),s) &= \Big(\frac{d}{ds}F(x,s)\Big)^0 = \Big(-\frac{1}{H}\nu\Big)^0(x,s)\\
&= \Big(-\frac{1}{\tilde H}\tilde\nu\Big)^0(\varphi(x,s),s)\\
&= \Big(-\frac{1}{\tilde H}\bar v^{-1}\overline{g}^{0\beta}(Dw)_\beta\Big)(\varphi(x,s),s).
\end{aligned}$$

Aber es gilt auch

$$\frac{dw}{ds}(\varphi(x,s),s) = D_iw(\varphi(x,s),s)\Big(\frac{d\varphi}{ds}(x,s)\Big)^i + \frac{\partial w}{\partial s}(\varphi(x,s),s).$$

Somit bekommen wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial s}(\varphi(x,s),s) &= -\frac{1}{\tilde H}\bar v^{-1}\Big(-\overline{g}^{0\beta}(Dw)_\beta(-1) - \overline{g}^{i\beta}(Dw)_\beta D_iw\Big)\\
&= -\frac{1}{\tilde H}\bar v^{-1}\Big(-\overline{g}^{0\beta}(Dw)_\beta(Dw)_0 - \overline{g}^{i\beta}(Dw)_\beta(Dw)_i\Big)\\
&= -\frac{1}{\tilde H}\bar v^{-1}\Big(-\overline{g}^{\alpha\beta}(Dw)_\alpha(Dw)_\beta\Big)\\
&\overset{3.1(ii)}{=} -(\frac{1}{\tilde H}\bar v)(\varphi(x,s),s),
\end{aligned}$$

d.h. mit $y := \varphi(x,s)$ und $\varphi(x,0) = x$ erfüllt w die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial s}(y,s) = -(\frac{1}{\tilde H}\bar v)(y,s), \qquad \forall (y,s)\in M^n\times[0,\delta],\\
&w(\cdot,0) = 0.
\end{aligned}$$

□

Der Satz 3.2 ergibt sich dann direkt aus Lemma 3.4 und Lemma 3.5 . Schließlich erhalten wir:

3.6 Theorem. Kurzzeitexistenz I

(IMK) besitzt auf einem kleinen Zeitintervall eine eindeutige Lösung

$$F \in C^\infty(M^n \times (0,\delta], \mathcal{V}) \cap C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(M^n \times [0,\delta], \mathcal{V}).$$

Diese Regularität ist optimal, falls $F_0(M^n) \in C^{2,\alpha}$, wenn jedoch $F_0(M^n) \in C^\infty$ wie in Kapitel 1 vorausgesetzt, dann ist auch $F \in C^\infty(M^n \times [0,\delta], \mathcal{V})$.

Dazu äquivalent ist:

3.7 Theorem. Kurzzeitexistenz II

Sei M^n und $\mathcal{V}$ wie in Kapitel 1. Nehme an, daß $M_0 = F_0(M^n)$ eine glatte, kompakte, raumartige Hyperfläche mit positiver mittlerer Krümmung in $\mathcal{V}$ ist. Dann existiert eine eindeutige Familie $M_s = F(\cdot, s)(M^n)$ glatter, kompakter, raumartiger Hyperflächen, die das Anfangswertproblem (IMK) auf einem Intervall $s \in [0, s_0)$ löst.

Beweis:
Die Existenz folgt direkt aus Satz 3.2 und Satz 3.3. Die Eindeutigkeit folgt mit Satz 3.3, denn: Sind F_1 und F_2 Lösungen von (*IMK*) mit $F_1(\cdot,0) = F_2(\cdot,0)$. Seien weiter φ_1, bzw. φ_2 die eindeutig bestimmten tangentiellen Diffeomorphismen (wie oben), die F_1, bzw. F_2 Lösungen w_1, bzw. w_2 von (3.1) zuordnen. Dann ist, nach Satz 3.3, $w_1 = w_2$ und durch (3.2) wird ein eindeutiger tangentieller Diffeomorphismus φ bestimmt, der dieser Lösung des (GF) eine eindeutige Lösung des (*IMK*) zuordnet. Somit ist $\varphi_1 = \varphi = \varphi_2$ und $F_1 = F_2$, die Behauptung folgt. □

4 Evolutionsgleichungen

Ausgehend von der Evolutionsgleichung

$$\frac{d}{ds}F = -\frac{1}{H}\nu,$$

werden wir die Evolutionsgleichungen für die Höhe, den Gradienten, die Krümmung und anderer wichtiger Größen auf M_s berechnen.

Wir gehen genau wie in [H1,EH1] vor und berechnen nun zuerst die Ableitungen der Metrik g, des Volumenelementes μ und der Einheitsnormalen ν auf M :

4.1 Lemma.

Wir haben folgende Gleichungen:

$$(i) \qquad \frac{d}{ds}g_{ij} = -2\frac{1}{H}h_{ij},$$

$$(ii) \qquad \frac{d}{ds}\nu = \nabla\Big(-\frac{1}{H}\Big),$$

$$(iii) \qquad \frac{d}{ds}\mu = H\cdot\Big(-\frac{1}{H}\Big)\mu.$$

Beweis durch Nachrechnen lokal an einem Punkt, in Koordinaten:

$$
\begin{aligned}
(i) \quad g_{ij} &= \langle\frac{\partial F}{\partial x_i},\frac{\partial F}{\partial x_j}\rangle \quad \Rightarrow \\
\frac{d}{ds}g_{ij} &= \frac{d}{ds}\langle\frac{\partial F}{\partial x_i},\frac{\partial F}{\partial x_j}\rangle = \langle\frac{d}{ds}\frac{\partial F}{\partial x_i},\frac{\partial F}{\partial x_j}\rangle + \langle\frac{\partial F}{\partial x_i},\frac{d}{ds}\frac{\partial F}{\partial x_j}\rangle \\
&= 2\langle\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{d}{ds}F,\frac{\partial F}{\partial x_j}\rangle = 2\Big(-\frac{1}{H}\Big)\langle\frac{\partial}{\partial x_i}\nu,\frac{\partial F}{\partial x_j}\rangle = -2\frac{1}{H}h_{ij}, \\
(ii) \quad \frac{d}{ds}\nu &= -\underbrace{\langle\frac{d}{ds}\nu,\nu\rangle}_{=\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\langle\nu,\nu\rangle=0}\nu + \langle\frac{d}{ds}\nu,\frac{\partial}{\partial x_i}F\rangle\frac{\partial}{\partial x_j}Fg^{ij} = \langle\frac{d}{ds}\nu,\frac{\partial}{\partial x_i}F\rangle\frac{\partial}{\partial x_j}Fg^{ij} \\
&= -\langle\nu,\frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial x_i}F\rangle\frac{\partial}{\partial x_j}Fg^{ij} = -\langle\nu,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(-\frac{1}{H}\Big)\nu\rangle\frac{\partial}{\partial x_j}Fg^{ij} \\
&= -\langle\nu,\nu\rangle\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(-\frac{1}{H}\Big)\frac{\partial}{\partial x_j}Fg^{ij} = \nabla\Big(-\frac{1}{H}\Big) = \frac{1}{H^2}\nabla H, \\
(iii) \quad \frac{d}{ds}\mu &= \frac{d}{ds}\sqrt{det(g_{ij})} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}}det(g_{ij})g_{ij}\frac{d}{ds}g_{ij} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{det(g_{ij})}g_{ij}\Big(-2\frac{1}{H}\Big)h_{ij} = -\mu g_{ij}h_{ij}\frac{1}{H} = -\mu. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Für den Beweis des folgenden Lemmas benötigen wir noch folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}u &= \frac{d}{ds}\Big(t(F(p))\Big) = \langle\overline{\nabla}t,\frac{d}{ds}F\rangle = -\frac{1}{H}\langle\overline{\nabla}t,\nu\rangle = -\frac{1}{H}\psi^{-1}v, \qquad (4.1)\\
\frac{d}{ds}v &= -\frac{d}{ds}(\langle T,\nu\rangle) = -\langle T,\frac{d}{ds}\nu\rangle - \langle\frac{d}{ds}T,\nu\rangle = -\langle T,\frac{1}{H^2}\nabla H\rangle - \langle\overline{\nabla}_{\frac{d}{ds}F}T,\nu\rangle \\
&= -\langle T,\frac{1}{H^2}\nabla H\rangle + \frac{1}{H}\langle\overline{\nabla}_\nu T,\nu\rangle. \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

4.2 Lemma. Evolutionsgleichungen für die Höhen- und Gradientenfunktion.

Es gilt:

$$(i) \quad \Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)u = -\frac{1}{H^2}div\overline{\nabla}t - \frac{2}{H}\psi^{-1}v,$$

$$(ii) \quad \Big(\frac{d}{ds} - \frac{1}{H^2}\Delta\Big)v = \frac{1}{H}\langle \overline{\nabla}_\nu T, \nu\rangle - \frac{1}{H^2}T(H_T) - \frac{1}{H^2}v(|A^2| + \overline{R}ic(\nu,\nu)).$$

Beweis : Addition von (2.1) und (4.1) beziehungsweise Lemma 2.3 und (4.2). □

4.3 Lemma. Evolutionsgleichungen für die zweite Fundamentalform und Folgerungen.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
(i) \quad \Big(\frac{d}{ds} - \frac{1}{H^2}\Delta\Big)h_{ij} &= -2\frac{1}{H^3}\nabla_i H\nabla_j H - 2\frac{1}{H}\overline{R}_{i00j} - 2\frac{1}{H^2}h_{kl}\overline{R}_{lijk} \\
&\quad -\frac{1}{H^2}h_{jl}\overline{R}_{lkik} - \frac{1}{H^2}h_{li}\overline{R}_{lkjk} - \frac{1}{H^2}\overline{\nabla}_k\,\overline{R}_{0ijk} \\
&\quad -\frac{1}{H^2}\overline{\nabla}_j\,\overline{R}_{0kik} - \frac{1}{H^2}h_{ij}(|A^2| + \overline{R}ic(\nu,\nu)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii) \quad \Big(\frac{d}{ds} - \frac{1}{H^2}\Delta\Big)|A|^2 &= -4\frac{1}{H^3}h_{ij}\nabla_i H\nabla_j H - 4\frac{1}{H}h_{ij}\overline{R}_{i00j} - 2\frac{1}{H^2}|A|^4 \\
&\quad -4\frac{1}{H^2}h_{ij}h_{kl}\overline{R}_{lijk} - 2\frac{1}{H^2}h_{ij}h_{jl}\overline{R}_{lkik} \\
&\quad -2\frac{1}{H^2}h_{li}h_{ij}\overline{R}_{lkjk} - 2\frac{1}{H^2}h_{ij}\overline{\nabla}_k\,\overline{R}_{0ijk} \\
&\quad -2\frac{1}{H^2}h_{ij}\overline{\nabla}_j\,\overline{R}_{0kik} - 2\frac{1}{H^2}|A|^2\overline{R}ic(\nu,\nu) \\
&\quad -2\frac{1}{H^2}|\nabla A|^2 + 4\frac{1}{H}h_{ij}h_{jl}h_{li},
\end{aligned}$$

$$(iii) \quad \Big(\frac{d}{ds} - \frac{1}{H^2}\Delta\Big)H = -2\frac{1}{H^3}\nabla_i H\nabla_i H + \frac{1}{H}(|A^2| + \overline{R}ic(\nu,\nu)).$$

Vorweg: Allgemein gilt (Gauß-Weingarten-Gleichungen):

$$h_{ij} = \Big(-\frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial x_i \partial x_j} + \Gamma_{ij}^k\frac{\partial F^\alpha}{\partial x_k} - \overline{\Gamma}_{\rho\sigma}^\alpha\frac{\partial F^\rho}{\partial x_i}\frac{\partial F^\sigma}{\partial x_j}\Big)\nu^\beta \overline{g}_{\alpha\beta},$$

$$\frac{\partial \nu^\alpha}{\partial x_j} + \overline{\Gamma}_{\rho\sigma}^\alpha\frac{\partial F^\rho}{\partial x_j}\nu^\sigma = h_{jl}g^{lm}\frac{\partial F^\alpha}{\partial x_m}.$$

Beweis: Wir rechnen wieder lokal in einem Punkt und wählen lokal das Koordinatensystem so, daß die $\overline{\Gamma}_{\rho\sigma}^\alpha \equiv 0$ sind, d.h. $\overline{R}_{i00j} = \frac{\partial}{\partial x_0}\overline{\Gamma}_{ij}^\alpha g_{\alpha 0} - \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\Gamma}_{j0}^\alpha g_{0\alpha} + 0$.

Um (i) zu beweisen berechnen wir zuerst $\frac{d}{ds}h_{ij}$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}h_{ij} &= \frac{d}{ds}\Big\{\Big(-\frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial x_i\partial x_j} + \Gamma_{ij}^k\frac{\partial F^\alpha}{\partial x_k} - \overline{\Gamma}_{\rho\sigma}^\alpha\frac{\partial F^\rho}{\partial x_i}\frac{\partial F^\sigma}{\partial x_j}\Big)\nu^\beta\overline{g}_{\alpha\beta}\Big\} \\
&= -\frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial x_i\partial x_j}\nu^\beta\overline{g}_{\alpha\beta}\Big) + \frac{d}{ds}\underbrace{\Big(\Gamma_{ij}^k\frac{\partial F^\alpha}{\partial x_k}\nu^\beta\overline{g}_{\alpha\beta}\Big)}_{=0}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{d}{ds}\Big(\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\rho\sigma}\frac{\partial F^{\rho}}{\partial x_i}\frac{\partial F^{\sigma}}{\partial x_j}\nu^{\beta}\overline{g}_{\alpha\beta}\Big) \\
= & \underbrace{-\Big\langle\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{d}{ds}F,\nu\Big\rangle}_{(a)}\underbrace{-\Big\langle\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j},\frac{d}{ds}\nu\Big\rangle}_{(b)} \\
& \underbrace{-\frac{d}{ds}\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\rho\sigma}\frac{\partial F^{\rho}}{\partial x_i}\frac{\partial F^{\sigma}}{\partial x_j}\nu^{\beta}\overline{g}_{\alpha\beta}}_{(c)}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a) &= -\Big\langle\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\Big(-\frac{1}{H}\nu\Big),\nu\Big\rangle \\
&= -\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\Big(-\frac{1}{H}\Big)\langle\nu,\nu\rangle-\Big(-\frac{1}{H}\Big)\Big\langle\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\nu\Big),\nu\Big\rangle \\
&\quad -\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(-\frac{1}{H}\Big)\underbrace{\langle\frac{\partial}{\partial x_i}\nu,\nu\rangle}_{=0\ Da\ \langle\nu,\nu\rangle=-1}-\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(-\frac{1}{H}\Big)\underbrace{\langle\frac{\partial}{\partial x_j}\nu,\nu\rangle}_{=0\ Da\ \langle\nu,\nu\rangle=-1} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\Big(-\frac{1}{H}\Big)+\frac{1}{H}\Big\langle\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(h_{jl}g^{lm}\frac{\partial F}{\partial x_m}\Big),\nu\Big\rangle-\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\rho\sigma}\frac{\partial F^{\rho}}{\partial x_j}\nu^{\sigma}\nu^{\beta}\overline{g}_{\alpha\beta}\Big) \\
&= \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\Big(-\frac{1}{H}\Big)}_{\nabla_i\nabla_j\left(-\frac{1}{H}\right)}+\frac{1}{H}\underbrace{\Big\langle h_{jl}g^{lm}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_m},\nu\Big\rangle}_{=-h_{jl}h_{li}}-\underbrace{\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\rho\sigma}\frac{\partial F^{\rho}}{\partial x_j}\nu^{\sigma}\nu^{\beta}\overline{g}_{\alpha\beta}}_{=\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\Gamma}^{\alpha}_{j0}g_{0\alpha}\ (\alpha)}+0, \\
&= \nabla_i\nabla_j\Big(-\frac{1}{H}\Big)-\frac{1}{H}h_{jl}h_{li}-\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\Gamma}^{\alpha}_{j0}g_{0\alpha}. \\
(b) &= 0+h_{ij}\nu^{\beta}\frac{\partial F^{\alpha}}{\partial x_m}\overline{g}_{\alpha\beta}g^{lm}\frac{\partial}{\partial x_l}\Big(-\frac{1}{H}\Big)=0, \qquad da\ \langle\nu,\tau_m\rangle=0. \\
(c) &= -\overline{\nabla}_{-\frac{1}{H}\nu}\Big(\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\rho\sigma}\frac{\partial F^{\rho}}{\partial x_i}\frac{\partial F^{\sigma}}{\partial x_j}\nu^{\beta}\overline{g}_{\alpha\beta}\Big)=\frac{1}{H}\overline{\nabla}_{\nu}\Big(\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\rho\sigma}\frac{\partial F^{\rho}}{\partial x_i}\frac{\partial F^{\sigma}}{\partial x_j}\nu^{\beta}\overline{g}_{\alpha\beta}\Big) \\
&= \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial y^{\delta}}\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\rho\sigma}\nu^{\delta}\frac{\partial F^{\rho}}{\partial x_i}\frac{\partial F^{\sigma}}{\partial x_j}\nu^{\beta}\overline{g}_{\alpha\beta}=\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial x_0}\overline{\Gamma}^{\alpha}_{ij}g_{\alpha 0}\ (\beta).
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich insgesamt

$$(a)+(b)+(c)=\nabla_i\nabla_j\Big(-\frac{1}{H}\Big)-\frac{1}{H}(h_{il}h_{lj}+\underbrace{\overline{R}_{i00j}}_{(\alpha)+(\beta)}).$$

Hiermit und mit Lemma 2.2 folgt (i).

Für den Beweis von (ii) berechnen wir zuerst $\frac{d}{ds}|A|^2$:

$$\frac{d}{ds}|A|^2 = \frac{d}{ds}(h_{ij}h_{kl}g^{ik}g^{jl})=2h_{ij}\frac{d}{ds}h_{ij}+h_{ij}h_{kl}\frac{d}{ds}g^{ik}g^{jl}+h_{ij}h_{kl}g^{ik}\frac{d}{ds}g^{jl}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2h_{ij}\frac{d}{ds}h_{ij} + h_{ij}h_{kl}(-\frac{d}{ds}g_{rs}g^{ri}g^{sk})g^{jl} + h_{ij}h_{kl}(-\frac{d}{ds}g_{rs}g^{ri}g^{sk})g^{ik} \\
&= 2h_{ij}\frac{d}{ds}h_{ij} + h_{ij}h_{kl}2\frac{1}{H}h_{rs}g^{ri}g^{sk}g^{jl} + h_{ij}h_{kl}2\frac{1}{H}h_{rs}g^{rj}g^{sl}g^{ik} \\
&= 2h_{ij}\frac{d}{ds}h_{ij} + 4\frac{1}{H}h_{ij}h_{jl}h_{li}.
\end{aligned}
$$

Dann ergibt sich zunächst

$$
\begin{aligned}
\Big(\frac{d}{ds} - \frac{1}{H^2}\Delta\Big)|A|^2 &= 2h_{ij}\frac{d}{ds}h_{ij} + 4\frac{1}{H}h_{ij}h_{jl}h_{li} - 2h_{ij}\frac{1}{H^2}\Delta h_{ij} \\
&\quad -2\frac{1}{H^2}\nabla_k h_{ij}\nabla_k h_{ij} \\
&= 2h_{ij}\Big(\frac{d}{ds} - \frac{1}{H^2}\Delta\Big)h_{ij} + 4\frac{1}{H}h_{ij}h_{jl}h_{li} - 2\frac{1}{H^2}|\nabla A|^2
\end{aligned}
$$

und mit (i) folgt (ii).

(iii) ist eine direkte Konsequenz aus Lemma 2.3, kann aber auch durch Spurbildung, aus (i) erhalten werden. □

5 Schranken für die mittlere Krümmung und den Gradienten

In diesem Kapitel werden wir zuerst, mit Hilfe des folgenden Lemmas, eine a priori Abschätzung nach unten für die Mittlere Krümmung H erhalten. Im weiteren erhalten wir, durch ein ähnliches Vorgehen wie in [BR1,EH1], eine obere a priori Schranke für die Gradientenfunktion v und schließlich, unter Anwendung ähnlicher Methoden wie bei der Gradientenschranke, eine obere a priori Schranke für H.

5.1 **Lemma.** Minimum Lemma.

Sei g eine glatte Funktion mit $g = g(t,y); t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^k$. Sei

$$f(t) = \inf\Big\{g(t,y) : y \in Y\Big\},$$

wobei Y eine kompakte Menge ist. Dann ist $f(t)$ Lipschitz und

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t) \geq \inf\Big\{\frac{\partial}{\partial t}g(t,y) : y \in Y(t)\Big\},$$

mit $Y(t) = \Big\{y : g(t,y) = f(t)\Big\}$.

Beweis: [z.B.: HA2] Wähle eine Zeitfolge t_j monoton fallend gegen t ($t_j \searrow t$), mit

$$\lim_{t_j \searrow t} \frac{f(t_j) - f(t)}{t_j - t} = \liminf_{h \searrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}. \tag{5.1}$$

Wähle $y_j \in Y$ mit $f(t_j) = g(t_j, y_j)$. Das ist möglich weil Y kompakt ist und somit das Minimum angenommen wird. Ebenfalls wegen der Kompaktheit von Y, existiert eine Teilfolge $y_{j'}$ mit $y_{j'} \to y$. Stetigkeit von $f(t)$ liefert uns $f(t) = g(t, y)$ und somit ist $y \in Y(t)$. Da $g(t, y_j) \geq g(t, y)$ (min $\leq$ beliebiger Funktionswert), folgt

$$f(t_j) - f(t) \geq g(t_j, y_j) - g(t, y_j). \tag{5.2}$$

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes erhalten wir die Existenz eines $T_j \in [t_j, t]$, mit der Eigenschaft

$$\frac{g(t_j, y_j) - g(t, y_j)}{t_j - t} = \frac{\partial}{\partial t} g(T_j, y_j). \tag{5.3}$$

Weil $T_j \to t$ folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} g(T_j, y_j) \to \frac{\partial}{\partial t} g(T, y) \geq \inf \Big\{ \frac{\partial}{\partial t} g(t, y) : y \in Y(t) \Big\}. \tag{5.4}$$

Außerdem gilt ganz allgemein für Lipschitzfunktionen, daß

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t) \geq C \quad \text{ist, wenn} \quad \liminf_{h \searrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \geq C. \tag{5.5}$$

Nun teilen wir (5.2) durch $t_j - t \geq 0$ und erhalten mit Hilfe von (5.1),(5.3),(5.4) und (5.5) die Behauptung. $\square$

Sei im Folgenden M_s eine glatte Lösung von (IMK) auf dem Intervall $0 \leq s < s_0$, so daß M_s in einer glatten und kompakten Teilmenge $G \subset \mathcal{V}$, für alle $0 \leq s < s_0$, enthalten ist.

5.2 Satz. Untere Schranke für H.

Behauptung: Falls $H \geq H_0 > 0$ auf M_0, dann haben wir für die mittlere Krümmung auf M_s folgende a priori Abschätzung:

$$H \geq e^{s\frac{1}{n}} H_0.$$

Hierzu genügt es zu zeigen, daß die Funktion $f(s) := \min \Big\{ He^{-s\frac{1}{n}}(p, s) : p \in M^n \Big\}$ wächst, d.h.

$$\frac{d}{ds} f \geq 0.$$

Beweis: Definiere $Y(s) := \Big\{p : He^{-s\frac{1}{n}}(p,s) = f(s)\Big\}$ und benutze Lemma 5.1:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}f(s) &\geq \min\Big\{\frac{d}{ds}(He^{-s\frac{1}{n}})(p,s)|p \in Y(s)\Big\} \\
&= \min\Big\{\Big(e^{-s\frac{1}{n}}\Big(\frac{1}{H^2}\Delta H - \frac{2}{H^3}\nabla_i H \nabla_i H \\
&\qquad + \frac{1}{H}(|A|^2 + \overline{R}ic(\nu,\nu) - \frac{1}{n}H^2)\Big)\Big)(p,s)|p \in Y(s)\Big\} \\
&\geq \min\Big\{\Big(e^{-s\frac{1}{n}}\Big(0 - 0 + \frac{1}{n}H + 0 - \frac{1}{n}H\Big)\Big)\Big\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$
□

Bemerkung: Da $H > 0$ erhält man direkt aus Lemma 4.1 ($\frac{d}{ds}u < 0$) für die Höhenfunktion u deren Beschränktheit: $u \leq u_0 (= sup_{M_0} u)$.

5.3 Satz. Gradientenschranke

Die Gradientenfunktion erfüllt folgende a priori Abschätzung auf M_s:

$$v(p,s) \leq \Big(1 + \sup_{M_0} v\Big) \sup_{(q,r)\in M^n\times[0,s_0]} \exp\left(\lambda[u(q,r) - u(p,s)]\right)\cdot \exp(\hat{K}s),$$

wobei

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lambda\Big(n, \|\mathcal{L}_T g\|_{1,G}, \|T\|_{1,G}, \|\psi^{-1}\|_{1,G}, \|\overline{R}iem\|_{0,G}\Big), \\
\hat{K} &= 2\frac{2n}{4n+1} + \frac{1}{2}\lambda.
\end{aligned}$$

Beweis: Wir betrachten die Funktion $ve^{\lambda u - \hat{K}s}$ und gehen vor wie in [B 1, Theorem 3.1]. Seien $\lambda, \hat{K} > 0$ Konstanten, die wir später wählen und definiere

$$C_\lambda := \Big(1 + \sup_{M_0} v\Big) \sup_{M^n\times[0,s_0]} e^{\lambda u}.$$

Angenommen $ve^{\lambda u - \hat{K}s}$ erreicht zum ersten Mal C_λ im Punkt $(p_1, s_1) \in M^n \times (0, s_0]$. Dann gilt an diesem Punkt (Maximum)

$$\begin{aligned}
0 &\leq \Big(\frac{d}{ds} - \frac{1}{H^2}\Delta\Big)ve^{\lambda u - \hat{K}s}, &(5.6) \\
0 &= \nabla(ve^{\lambda u - \hat{K}s}). &(5.7)
\end{aligned}$$

Aus (5.7) folgt

$$\begin{aligned}
\nabla v \cdot e^{\lambda u - \hat{K}s} &= -\lambda \nabla u \cdot ve^{\lambda u - \hat{K}s} \\
&\Leftrightarrow \nabla v = -\lambda v \nabla u. &(5.8)
\end{aligned}$$

Wenn wir nun (5.6) ausrechnen und durch $e^{\lambda u-\hat{K}s}$ dividieren erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda v\Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)u+\Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)v-\lambda\frac{1}{H^2}\nabla_i u\nabla_i v \\ &\quad +\lambda\nabla_i u\underbrace{(\nabla_i v+\lambda v\nabla_i u)}_{=0 \text{ mit } (5.8)}-\hat{K}v. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Einsetzen von (5.8) in (5.9) ergibt uns:

$$0 \leq \lambda v\Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)u+\Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)v+\frac{1}{H^2}\lambda^2|\nabla u|^2 v-\hat{K}v. \tag{5.10}$$

Als nächstes schätzen wir die beiden ersten Terme nach oben ab. Aus Lemma 4.2 (i) wissen wir, daß $\left(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\right)u=-\frac{1}{H^2}div\overline{\nabla}t-\frac{2}{H}\psi^{-1}v$ und da

$$\begin{aligned} -div\overline{\nabla}t &= div(T\psi^{-1})=\langle\tau_i,\nabla_i T\rangle\psi^{-1}+\langle\tau_i,\nabla_i\psi^{-1}T\rangle \\ &= \langle\tau_i,\nabla_T\tau_i\rangle\psi^{-1}+\nabla_i\psi^{-1}\langle\tau_i,T\rangle\leq\underbrace{\frac{1}{2}\nabla_T\underbrace{\langle\tau_i,\tau_i\rangle}_{=1}}_{=0}\psi^{-1}+\nabla_i\psi^{-1}v \\ &\leq \tilde{C}_0(\|\psi^{-1}\|_{1,G})v^2, \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)u &\leq \Big|\Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)u\Big|\leq\frac{1}{H^2}\tilde{C}_0v^2+\frac{2}{H}\psi^{-1}v \\ &\leq \frac{1}{H^2}\tilde{C}_1(\tilde{C}_0)v^2+\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Anmerkung: Wir verwenden hierbei, daß $\nabla_i\psi^{-1}\leq|\nabla\psi^{-1}|\leq\tilde{C}_1(\|\psi^{-1}\|_{1,G})v$.
Lemma 4.2 (ii) gibt uns

$$\Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)v = \frac{1}{H}\langle\overline{\nabla}_\nu T,\nu\rangle-\frac{1}{H^2}T(H_T)-\frac{1}{H^2}v(|A^2|+\overline{R}ic(\nu,\nu)). \tag{5.12}$$

Mit Hilfe von

$$\langle\overline{\nabla}_\nu T,\nu\rangle\leq\tilde{C}_2'(\|T\|_{1,G}) \tag{5.13}$$

und (Lemma 2.3)

$$\begin{aligned} T(H_T) &= \frac{1}{2}(\nabla_\nu\mathcal{L}_T g)(\tau_i,\tau_i)-(\nabla_{\tau_i}\mathcal{L}_T g)(\nu,\tau_i)-\frac{1}{2}\mathrm{H}\mathcal{L}_T g(\nu,\nu) \\ &\quad -\mathcal{L}_T g(\tau_i,\tau_j)A(\tau_i,\tau_j), \\ \Rightarrow |T(H_T)| &\leq \tilde{C}_3'(\|\mathcal{L}_T g\|_{1,G})+\tilde{C}_3'(\|\mathcal{L}_T g\|_{0,G})(1+|A|v^2+H) \\ &\leq \tilde{C}_3(\|\mathcal{L}_T g\|_{1,G})(1+|A|v^2+H), \end{aligned} \tag{5.14}$$

ergibt sich ((5.13) und (5.14) in (5.12))

$$\begin{aligned}\Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)v &\le -\frac{1}{H^2}v|A|^2+\frac{1}{H^2}\tilde{C}_4(\|\mathcal{L}_T g\|_{1,G},\|T\|_{1,G},n)(1+|A|v^2)\\ &\quad -\frac{1}{H^2}v\overline{Ric}(\nu,\nu). \end{aligned}\tag{5.15}$$

Unter Verwendung von (2.3) erhalten wir folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}\tilde{C}_4(1+|A|v^2) &= \tilde{C}_4+v(\tilde{C}_4v|A|)\le \tilde{C}_4+v\Big(\frac{\tilde{C}_4^2}{4\varepsilon_1}v^2+\varepsilon_1|A|^2\Big)\\ &\le \tilde{C}_5(\tilde{C}_4,\varepsilon_1^{-1})v^3+\varepsilon_1 v|A|^2.\end{aligned}\tag{5.16}$$

Wir setzen nun (5.16) in (5.15) ein und nützen aus, daß $\overline{Ric}(\nu,\nu)\ge 0$ ist. Wir erhalten somit

$$\Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)v \le -(1-\varepsilon_1)\frac{1}{H^2}v|A|^2+\frac{1}{H^2}\tilde{C}_5v^3.\tag{5.17}$$

Seien $\{\lambda_i | 1\le i\le n\}$ die Menge der Eigenwerte von A mit $\lambda_1=\max_i|\lambda_i|$, dann gilt

$$|A|^2\ge\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\lambda_1^2-H^2.\tag{5.18}$$

Beweis von (5.18):

$$\begin{aligned}|A|^2 &= \lambda_1^2+\sum_{i=2}^n\lambda_i^2\ge\lambda_1^2+\frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=2}^n\lambda_i\Big)^2=\lambda_1^2+\frac{1}{n-1}(\lambda_1-H)^2\\ &= \lambda_1^2+\frac{1}{n-1}\lambda_1^2+\frac{1}{n-1}H^2-\frac{2}{n-1}\lambda_1H\\ &= \lambda_1^2\Big(1+\frac{1}{n}\Big)+\frac{1}{(n-1)n}\lambda_1^2-\frac{2}{n-1}\lambda_1H+\frac{1}{n-1}H^2.\end{aligned}$$

Aus (2.3) (mit $\varepsilon=\frac{1}{n}$) folgt $\frac{2}{n-1}\lambda_1H\le\frac{1}{(n-1)n}\lambda_1^2+\frac{n}{n-1}H^2$. Das ergibt:

$$\begin{aligned}|A|^2 &\ge \Big(1+\frac{1}{n}\Big)\lambda_1^2+\Big(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{(n-1)n}\Big)\lambda_1^2-\Big(\frac{n}{(n-1)n}-\frac{1}{(n-1)n}\Big)H^2\\ &= \Big(1+\frac{1}{n}\Big)\lambda_1^2-H^2.\end{aligned}$$

□

Es gilt des weiteren :

$$|\nabla v|^2\le\tilde{C}_6(\tilde{C}_2,\varepsilon_2^{-1})v^4+(1+\varepsilon_2)v^2\lambda_1^2.\tag{5.19}$$

Beweis von (5.19):

$$\begin{aligned}
|\nabla v|^2 &= \overline{\nabla}_i v \overline{\nabla}_i v = -\overline{\nabla}_i v \langle \overline{\nabla}_i T, \nu\rangle - \overline{\nabla}_i v \langle T, \overline{\nabla}_i \nu\rangle \\
&= -\overline{\nabla}_i v \langle \overline{\nabla}_i T, \nu\rangle - \langle T, \tau_l\rangle h_{il} \overline{\nabla}_i v \leq |\nabla v| v^2 \|T\|_{1,G} + \sum_{i=1}^n |\lambda_i| |\langle T, \tau_i\rangle| |\overline{\nabla}_i v| \\
&\leq |\nabla v| v^2 \|T\|_{1,G} + |\lambda_1| v \cdot 1 \cdot |\nabla v| \leq |\nabla v| (\tilde{C}_2(\|T\|_{1,G}) v^2 + v|\lambda_1|).
\end{aligned}$$

Dividieren der Ungleichung durch $|\nabla v|$ und anschließendes Quadrieren führt zu folgendem Ergebnis:

$$\begin{aligned}
|\nabla v|^2 &\leq (\tilde{C}_2 v^2 + v|\lambda_1|)^2 = \tilde{(}C_2)^2 v^4 + \tilde{C}_2 v^3 |\lambda_1| + v^2 |\lambda_1|^2 \\
&\leq \tilde{(}C_2)^2 v^4 + \frac{1}{4\varepsilon_2} \tilde{(}C_2)^2 v^4 + \varepsilon_2 v^2 \lambda_1^2 + v^2 |\lambda_1|^2 \\
&= \tilde{C}_6(\tilde{C}_2, \varepsilon_2^{-1}) v^4 + (1+\varepsilon_2) v^2 \lambda_1^2.
\end{aligned}$$

□

Wir multiplizieren (5.18) mit v^2, benutzen (5.19) und erhalten

$$\begin{aligned}
v^2 |A|^2 &\geq \lambda_1^2 v^2 \Big(1 + \frac{1}{n}\Big) - v^2 H^2 \\
&\geq \frac{1}{1+\varepsilon_2} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big) |\nabla v|^2 - \tilde{C}_6 v^4 \frac{1}{1+\varepsilon_2} - H^2 v^2.
\end{aligned}$$

Und mit $\varepsilon_2 = \frac{2n}{(2n+1)n}$ folgt:

$$v^2 |A|^2 \geq \Big(1 + \frac{1}{2n}\Big) |\nabla v|^2 - \tilde{C}_7(\tilde{C}_6, \varepsilon_2) v^4 - H^2 v^2.$$

Mit Hilfe von (5.8) ergibt das:

$$v^2 |A|^2 \geq \Big(1 + \frac{1}{2n}\Big) \lambda^2 v^2 |\nabla u|^2 - \tilde{C}_7 v^4 - H^2 v^2. \tag{5.20}$$

Durch v dividieren und Umformen führt zu

$$\Big(1 + \frac{1}{4n}\Big) \lambda^2 v |\nabla u|^2 \leq -\frac{1}{4n} \lambda^2 v |\nabla u|^2 + v|A|^2 + \tilde{C}_7 v^3 + H^2 v. \tag{5.21}$$

Wähle ε_1 so, daß $(1-\varepsilon_1)\Big(1 + \frac{1}{4n}\Big) = 1 \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{1}{4n+1}$. Multipliziere (5.21) mit $(1-\varepsilon_1)$, dann haben wir

$$\begin{aligned}
\lambda^2 v |\nabla u|^2 \leq\ & -\underbrace{(1-\varepsilon_1)\frac{1}{4n}}_{=\varepsilon_1} \lambda^2 v |\nabla u|^2 + (1-\varepsilon_1) v |A|^2 \\
& + (1-\varepsilon_1)\tilde{C}_7 v^3 + (1-\varepsilon_1) H^2 v.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Einsetzen von (5.11), (5.17) und (5.22) in (5.10) führt uns zu der Ungleichung:

$$\begin{aligned}
0 \quad \leq \quad & \lambda \frac{1}{H^2}\tilde{C}_1 v^3 - (1-\varepsilon_1)\frac{1}{H^2} v|A|^2 + \frac{1}{H^2}\tilde{C}_5 v^3 + (1-\varepsilon_1)\frac{1}{H^2} v|A|^2 \\
& + \frac{1}{H^2}(1-\varepsilon_1)\tilde{C}_7 v^3 + (1-\varepsilon_1)\frac{1}{H^2} H^2 v \\
& - \frac{1}{H^2}\varepsilon_1 \lambda^2 v |\nabla u|^2 - \hat{K} v + \frac{1}{2}\lambda v.
\end{aligned}$$

Wir multiplizieren diese Ungleichung mit $\frac{4n+1}{2n}$, fassen zusammen und haben somit

$$0 \quad \leq \quad \frac{1}{H^2}\tilde{C}_8 v^3(\lambda+1) + 2\frac{1}{H^2}H^2 v - \frac{1}{H^2}\frac{1}{2n}\lambda^2 v|\nabla u|^2 - \frac{4n+1}{2n}\hat{K} v + \frac{4n+1}{4n}\lambda v,$$

wobei $\tilde{C}_8 = \tilde{C}_8(\tilde{C}_1, \tilde{C}_5, \tilde{C}_7, n)$. Diese Ungleichung multiplizieren wir mit H^2 und wählen $\hat{K} = 2\frac{2n}{4n+1} + \frac{1}{2}\lambda$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 \quad \leq \quad & \tilde{C}_8 v^3(\lambda+1) - \frac{1}{2n}\lambda^2 v|\nabla u|^2 + \underbrace{2H^2 v + H^2\frac{4n+1}{4n}\lambda v - H^2\frac{4n+1}{2n}\hat{K} v}_{\leq 0} \\
\leq \quad & \tilde{C}_8 v^3(\lambda+1) - \frac{1}{2n}\lambda^2 v|\nabla u|^2.
\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\frac{1}{2n}\lambda^2 v|\nabla u|^2 \leq \tilde{C}_8 v^3(\lambda+1)$$

und da $|\nabla u|^2 = \psi^{-2}(v^2-1)$ erhalten wir schließlich

$$\frac{1}{2n}\lambda^2\psi^{-2}(v^2-1) \quad \leq \quad \tilde{C}_8 v^2(\lambda+1).$$

Nach Definition von C_λ ist aber $v(p_1, s_1) \geq 2$ und wir erhalten aus obiger Ungleichung einen Widerspruch für ein entsprechend großes λ. Wenn wir nun u durch $-u$ ersetzen erhalten wir zunächst:

$$0 \quad \leq \quad \Big(\frac{d}{ds} - \frac{1}{H^2}\Delta\Big) v e^{-\lambda u - \hat{K}s}, \tag{5.23}$$

$$0 \quad = \quad \nabla v e^{-\lambda u - \hat{K}s}. \tag{5.24}$$

Aus (5.24) folgt

$$\nabla v = \lambda v \nabla u. \tag{5.25}$$

Wenn wir nun (5.23) ausrechnen und durch $e^{-\lambda u-\hat{K}s}$ dividieren erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad & -\lambda v\Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)u+\Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)v+\lambda\frac{1}{H^2}\nabla_i u\nabla_i v \\ & -\lambda\nabla_i u\underbrace{(\nabla_i v-\lambda v\nabla_i u)}_{=0\ mit\ (5.25)}-\hat{K}v. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Einsetzen von (5.24) in (5.26) gibt uns:

$$0 \quad \leq \quad -\lambda v\Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)u+\Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)v+\frac{1}{H^2}\lambda^2|\nabla u|^2v-\hat{K}v. \tag{5.27}$$

Da $-\Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)u \leq |\Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)u|$, erhält man genau wie bei $+u$ einen Widerspruch für λ groß genug. Somit folgt die Behauptung. □

5.4 Satz. *Obere Schranke für H.*

Für die mittlere Krümmung H erhalten wir folgende a priori Abschätzung auf M_s:

$$H \leq \tilde{C}_9,$$

hierbei ist

$$\tilde{C}_9=\max\Big\{\sup_{M_0} Hv^q,\ \sup_{M^n\times[0,s_0]}\Big(\frac{1}{H}\tilde{C}_{10}v^{4+\varepsilon_1}\Big)\Big\}$$

mit $\tilde{C}_{10}=\tilde{C}_{10}(n,\varepsilon_1^{-1},\|\mathcal{L}_T g\|_{1,G},\|T\|_{1,G})$ und ε_1 wie in der Gradientenschranke.

Beweis: Hierzu betrachten wir die Funktion Hv^q in ihrem Maximum, wobei q eine positive Konstante ist, die wir später wählen. Angenommen Hv^q erreicht zum ersten mal $\tilde{C}_9+\delta$ (Maximum), für $\delta>0$ beliebig, im Punkt $(p_1,s_1) \in M^n\times(0,s_0]$, dann gilt in diesem Punkt:

$$\nabla(Hv^q)=0, \tag{5.28}$$

$$\Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)Hv^q \geq 0. \tag{5.29}$$

Aus (5.28) folgt

$$\begin{aligned} -v^q\nabla_i H &= qv^{q-1}H\nabla_i v \\ \Leftrightarrow \nabla_i H &= -q\frac{H}{v}\nabla_i v. \end{aligned} \tag{5.30}$$

(5.29) führt zu

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \frac{d}{ds}H\cdot v^q + \frac{d}{ds}v\cdot qv^{q-1}H - \frac{1}{H^2}\nabla_i\left(v^q\nabla_i H + qv^{q-1}H\nabla_i v\right)\\
&= \Big(\frac{d}{ds} - \frac{1}{H^2}\Delta\Big)H\cdot v^q + \Big(\frac{d}{ds} - \frac{1}{H^2}\Delta\Big)v\cdot qHv^{q-1}\\
&\quad -\frac{1}{H^2}\nabla_i v\nabla_i v\cdot q(q-1)v^{q-2}H - 2\frac{1}{H^2}\nabla_i H\nabla_i v\cdot qv^{q-1}\\
&= \frac{1}{H}(|A|^2 + \overline{R}ic(\nu,\nu))v^q - \frac{1}{H^2}v(|A|^2 + \overline{R}ic(\nu,\nu))qv^{q-1}H\\
&\quad -2\frac{1}{H^3}v^q|\nabla H|^2 + \frac{1}{H}\langle\nabla_\nu T,\nu\rangle qv^{q-1}H - \frac{1}{H^2}T(H_T)qv^{q-1}H\\
&\quad -\frac{1}{H^2}\nabla_i v\nabla_i v\cdot q(q-1)v^{q-2}H - 2\frac{1}{H^2}\nabla_i H\nabla_i v\cdot qv^{q-1}\\
&\overset{(5.30)}{=} \frac{1}{H}\langle\nabla_\nu T,\nu\rangle qv^{q-1}H - \frac{1}{H^2}T(H_T)qv^{q-1}H\\
&\quad -\frac{1}{H}(q-1)(|A|^2 + \overline{R}ic(\nu,\nu))v^q - 2\frac{1}{H^3}\nabla_i v\nabla_i v\cdot q^2H^2v^{q-2}\\
&\quad -\frac{1}{H^2}\nabla_i v\nabla_i v\cdot q(q-1)v^{q-2}H + 2\frac{1}{H^2}\nabla_i v\nabla_i v\cdot q^2Hv^{q-2}.
\end{aligned}
$$

Mit der Hilfe der Ungleichungen (5.13) und (5.14) erhalten wir dann

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{H^2}Hv^{q-1}q\tilde{C}_4(1+|A|v^2) - \frac{1}{H}(q-1)(|A|^2 + \overline{R}ic(\nu,\nu))v^q\\
&\quad +(2q^2 - 2q^2 - q(q-1))\frac{1}{H}|\nabla v|^2v^{q-2}.
\end{aligned}
$$

Setze $\tilde{C}_4(q) = \tilde{C}_4\cdot q$ und wir erhalten, wie in (5.16) des Satzes 5.4

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \tilde{C}_5(\tilde{C}_4(q),\varepsilon_1^{-1})v^3\frac{1}{H}v^{q-1} + \frac{1}{H}v^{q-1}\varepsilon_1 v|A|^2\\
&\quad -\frac{1}{H}(q-1)(|A|^2 + \overline{R}ic(\nu,\nu))v^q - q(q-1)\frac{1}{H}|\nabla v|^2v^{q-2}.
\end{aligned}
$$

Setze nun $q := 2+\varepsilon_1$, fasse zusammen und benutze $v \geq 1$ und $\overline{R}ic(\nu,\nu) \geq 0$. Dann ergibt sich

$$
0 \leq \frac{1}{H}\tilde{C}_5v^{4+\varepsilon_1} - \frac{1}{H}|A|^2v^{2+\varepsilon_1}.
$$

Da $|A|^2 \geq \frac{1}{n}H^2$ erhalten wir schließlich im Punkt (p_1,s_1):

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{H}H^2v^{2+\varepsilon_1} &\leq \frac{1}{H}n\tilde{C}_5v^{2+\varepsilon_1}v^2\\
\overset{\tilde{C}_{10}\equiv n\tilde{C}_5}{\Leftrightarrow} Hv^q &\leq \frac{1}{H}\tilde{C}_{10}v^{q+2}\\
\Leftrightarrow \tilde{C}_9 + \delta &\leq \frac{1}{H}\tilde{C}_{10}v^{q+2} \leq \tilde{C}_9
\end{aligned}
$$

und wir erhalten einen Widerspruch. Somit ist $Hv^q \leq \tilde{C}_9$ und weil $H \leq Hv^q$ ist ($v \geq 1$), folgt die Behauptung. □

6 Schranke für die totale Krümmung und $C^{2,\alpha}$ Schranke für die Höhenfunktion u

Mit Hilfe der schon erhaltenen a priori Schranken für die mittlere Krümmung und die Gradientenfunktion, erhalten wir hier nun eine obere a priori Schranken für die totale Krümmung und schließlich die $C^{0,\alpha}$ Schranke für die zweite Ableitung der Höhenfunktion u.

Auch in diesem Kapitel sei M_s eine glatte Lösung von (IMK) auf dem Intervall $0 \leq s < s_0$ so, daß M_s in einer glatten und kompakten Teilmenge $G \subset \mathcal{V}$, für alle $0 \leq s < s_0$, enthalten ist.

6.1 Bemerkung

Direkt aus Lemma 4.3 (ii) erhalten wir folgende Abschätzung auf M_s

$$\begin{aligned}\Big(\frac{d}{ds} - \frac{1}{H^2}\Delta\Big)|A|^2 \quad &\leq \quad -4\frac{1}{H^3}h_{ij}\nabla_i H\nabla_j H - 2\frac{1}{H^2}|\nabla A|^2 - 2\frac{1}{H^2}|A|^4 \\ &\quad +4\frac{1}{H^2}Hh_{ij}h_{jl}h_{li} + \frac{1}{H^2}C_0(1+|A|^2), \qquad (6.1)\end{aligned}$$

wobei $C_0 = C_0\Big(\sup_{M^n\times[0,s_0]} v, n, \|\overline{R}iem\|_{1,G}\Big)$.

Es gelingt uns jedoch nicht direkt aus dieser Abschätzung eine obere a priori Schranke für die totale Krümmung herzuleiten. Die Schranke für die totale Krümmung erhalten wir ähnlich wie in [GC2], wo sie für Riemannsche Hyperflächen im $\mathbb{R}^n$ erarbeitet wird.

6.2 Satz. Obere Schranke für h_{ij}

Für $|A|$ gilt auf M_s folgende a priori Abschätzung:

$$|A| \leq \bar{C}_0,$$

wobei

$$\bar{C}_0 = \max\Big\{\sup_{M^n\times[0,s_0]}\Big(2\bar{C}_1 n + 4H\sqrt{n}+1\Big), \sup_{M_0}|A|\Big\},$$

mit $\bar{C}_1 = \bar{C}_1\Big(H_0^{-1}, \|\overline{R}iem\|_{1,G}\Big)$ und H_0 wie in Satz 5.2.

Anmerkung: Für h_{ij} reicht eine Schranke nach oben da H strikt positiv ist.

Beweis: Betrachte hierzu Funktionen der Art

$$w := \frac{h_{ij}\eta^i\eta^j}{g_{ij}\eta^i\eta^j}.$$

Angenommen w erreicht zum ersten mal $\bar{C}_0 + \delta$ (Maximum), für $\delta > 0$ beliebig, im Punkt $(p_1, s_1) \in M^n \times (0, s_0]$. Dann gilt in diesem Punkt

$$\Big(\frac{d}{ds} - \frac{1}{H^2}\Delta\Big) w \geq 0, \tag{6.2}$$

$$\nabla w = 0. \tag{6.3}$$

Wir wählen nun das Koordinatensystem in einer räumlichen Umgebung $\mathcal{H} \subset M_{s_1}$ von (p_1, s_1) (s_1 festgehalten) o.B.d.A. so, daß dort $\eta = (0, 0, \dots, 1)$ und $g_{ni} = \delta_{ni}$ gilt (wobei δ_{ni} = Kroneckerdelta) und gleichzeitig im Punkt (p_1, s_1) $\frac{d}{ds}\eta^i = 0$ und $\nabla_j \eta^i = 0$ gilt. Wir haben dann im Punkt (p_1, s_1):

$$\frac{d}{ds}\Big(\frac{h_{ij}\eta^i\eta^j}{g_{ij}\eta^i\eta^j}\Big) = \frac{(\frac{d}{ds}h_{ij}\eta^i\eta^j)(g_{ij}\eta^i\eta^j) - (h_{ij}\eta^i\eta^j)(\frac{d}{ds}g_{ij}\eta^i\eta^j)}{(g_{ij}\eta^i\eta^j)^2} \tag{6.4}$$

und

$$\begin{aligned}
\Delta\Big(\frac{h_{ij}\eta^i\eta^j}{g_{ij}\eta^i\eta^j}\Big) &= \nabla_k \Big(\frac{(\nabla_k h_{ij}\eta^i\eta^j + 2h_{ij}\nabla_k \eta^i\eta^j)(g_{ij}\eta^i\eta^j)}{(g_{ij}\eta^i\eta^j)^2} \\
&\qquad - \frac{(h_{ij}\eta^i\eta^j)(\nabla_k g_{ij}\eta^i\eta^j + 2g_{ij}\nabla_k \eta^i\eta^j)}{(g_{ij}\eta^i\eta^j)^2}\Big) \\
&= \frac{(\Delta h_{ij}\cdot\eta^i\eta^j)(g_{ij}\eta^i\eta^j) + (2h_{ij}\eta^i\Delta\eta^j)(g_{ij}\eta^i\eta^j)}{(g_{ij}\eta^i\eta^j)^2} \\
&\qquad - \frac{(2g_{ij}\eta^i\Delta\eta^j)(h_{ij}\eta^i\eta^j) + 0}{(g_{ij}\eta^i\eta^j)^2} + 0 \\
&= \Delta h_{nn}.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Beachte, daß sich die $\Delta\eta_i$ Terme gerade wegheben. Nun setzen wir Lemma 4.1 (i) und Lemma 4.3 (i) in (6.4) ein, dann ergibt sich aus (6.2):

$$\begin{aligned}
0 \leq\ & \frac{1}{H^2}\Delta h_{nn} - 2\frac{1}{H^3}\nabla_n H \nabla_n H - \frac{1}{H}\overline{R}_{n00n} - \frac{1}{H^2}h_{nn}(|A|^2 + \overline{R}ic(\nu,\nu)) \\
& -2\frac{1}{H^2}h_{kl}\overline{R}_{lnnk} - \frac{1}{H^2}h_{nl}\overline{R}_{lknk} - \frac{1}{H^2}h_{ln}\overline{R}_{lknk} \\
& -\frac{1}{H^2}\overline{\nabla}_k \overline{R}_{0nnk} - \frac{1}{H^2}\overline{\nabla}_n \overline{R}_{0knk} - 2\frac{1}{H}h_{nn}h_{nn} - \frac{1}{H^2}\Delta h_{nn} \\
\leq\ & -\frac{1}{H^2}h_{nn}|A|^2 + 2\frac{1}{H^2}H h_{nn}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{H^2}h_{nn}^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\bar{C}_1\Big(\sup_{M^n\times[0,s_0]} H^{-1}, \|\overline{R}iem\|_{1,G}\Big)\\
\leq\ & \frac{1}{H^2}h_{nn}\Big(2Hh_{nn} - h_{nn}^2 + \frac{1}{2}h_{nn}\Big) + \bar{C}_1\\
\leq\ & \frac{1}{H^2}h_{nn}\Big(2H^2 + \frac{1}{2}h_{nn}^2 - h_{nn}^2 + \frac{1}{2}h_{nn}\Big) + \bar{C}_1\\
\leq\ & -\frac{1}{2}h_{nn}^2 + \bar{C}_1\cdot\frac{H^2}{h_{nn}} + 2H^2 + \frac{1}{2}h_{nn}\\
\leq\ & -\frac{1}{2}h_{nn}^2 + \bar{C}_1\cdot H\sqrt{n} + 2H^2 + \frac{1}{2}h_{nn}\\
\Leftrightarrow\ & h_{nn} \leq 2\bar{C}_1 n + 4H\sqrt{n} + 1.
\end{aligned}
$$

Da im Punkt (p_1, s_1) $h_{nn} = \bar{C}_0 + \delta$ gilt, folgt: $\bar{C}_0 + \delta \leq \bar{C}_1 n + 4H\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n}}{4H} \leq \bar{C}_0$ und wir erhalten einen Wiederspruch. Somit ist $w \leq \bar{C}_0$ und wir erhalten:

$$|A| \leq \bar{C}_0. \qquad \square$$

Bemerkung: Eine sorgfältige allgemeine Darstellung dieses Maximumsprinzip für Tensoren findet man z.B. bei Hamilton [HA1].

Es ist wohlbekannt, daß man aus den schon hergeleiteten Schranken an v, H und h_{ij} (wie in den Arbeiten von Gerhardt [GC: Theorem 4.2] und Urbas [U1: (3.55)]) folgende a priori Abschätzung für $\nabla^2 u$ in $C^{0,\alpha}(G)$ erhält.

6.3 Satz

Die zweiten Ableitungen von u sind gleichmässig Beschränkt in $C^{0,\alpha}(G)$, wobei die Abschätzung nur von $\|u_0\|_{2,\alpha}, n$ und der Elliptizitätskonstante von (IMK) abhängt.

Hierbei ist $u_0 = u(\cdot, 0)$, also u auf M_0 und $\|\cdot\|_{2,\alpha}$ die $C^{2,\alpha}$-Norm.

Für den *Beweis* verweisen wir auf [KN; Kapitel 5].

Mit Satz 6.3 und Standardergebnissen aus der Regularitätstheorie erhalten wir die volle Regularität von u und können nun sofort die Langzeitexistenz (Theorem 8.1) beweisen.

7 Schranke für die höheren Ableitungen der totalen Krümmung

Bevor wir zum Resultat der Langzeitexistenz kommen, leiten wir hier in diesem Kapitel noch a priori Schranken für die höheren Ableitungen der zweiten Fundamentalform her, für den Fall, daß wir bereits eine obere a priori Schranke für die erste Ableitung der mittleren Krümmung kennen. Hierzu benutzen wir die bereits erhaltenen a priori Schranken aus Kapitel 5 und Satz 6.2. Dies bedeutet, daß wir die volle Regularität zeigen, ohne auf Krylov [KN] zurückzugreifen, nur unter der Annahme einer oberen a priori Schranke an $|\nabla H|^2$. Diese Schranken an die höheren Ableitungen der zweiten Fundamentalform erhalten wir, ähnlich wie in [H4], durch einen Induktionsbeweis.

Auch in diesem Kapitel sei M_s eine glatte Lösung von (IMK) auf dem Intervall $0 \leq s < s_0$ so, daß M_s in einer glatten und kompakten Teilmenge $G \subset \mathcal{V}$, für alle $0 \leq s < s_0$, enthalten ist.

Bevor wir Abschätzungen für $\left(\frac{d}{ds} - \frac{1}{H^2}\Delta\right)|\nabla^m A|^2$ im allgemeinen herleiten, betrachten wir zunächst den Fall m=1 etwas genauer.

7.1 Lemma.

Auf M_s gilt:

$$\left(\frac{d}{ds} - \frac{1}{H^2}\Delta\right)|\nabla A|^2 \leq -\frac{1}{H^2}(2-\varepsilon)|\nabla^2 A|^2 + C_1(1 + |\nabla A|^2),$$

wobei

$$C_1 = C_1(n, \sup_{M^n\times[0,s_0]} v, \|\overline{Riem}\|_{2,G}, \sup_{M^n\times[0,s_0]} A, H_0^{-1}, \sup_{M^n\times[0,s_0]} H, \sup_{M^n\times[0,s_0]} \nabla H).$$

mit H_0 wie in Satz 5.2.

Vorweg:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}g^{ij} &= -\frac{d}{ds}g_{rs}g^{ri}g^{sj}, \\
\Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2}g^{il}(\nabla_j\, g_{kl} + \nabla_k\, g_{jl} - \nabla_l\, g_{jk}) \\
(lokal) \;\Rightarrow \frac{d}{ds}\Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}g^{il}(\nabla_j\, g_{kl} + \nabla_k\, g_{jl} - \nabla_l\, g_{jk}) \\
&\quad +\frac{1}{2}g^{il}(\nabla_j\, \frac{d}{ds}g_{kl} + \nabla_k\, \frac{d}{ds}g_{jl} - \nabla_l\, \frac{d}{ds}g_{jk})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}g^{ri}\frac{d}{ds}g_{rs}\underbrace{g^{sl}(\nabla_j g_{kl}+\nabla_k g_{jl}-\nabla_l g_{jk})}_{=\Gamma^i_{jk}=0(\text{lokal})}\\
&\quad -2\frac{1}{2}g^{il}\Big(\nabla_j(\frac{1}{H}h_{kl})+\nabla_k(\frac{1}{H}h_{jl})-\nabla_l(\frac{1}{H}h_{jk})\Big)\\
&= -g^{il}\Big(\nabla_j(\frac{1}{H}h_{kl})+\nabla_k(\frac{1}{H}h_{jl})-\nabla_l(\frac{1}{H}h_{jk})\Big).
\end{aligned}
$$

Hierzu beachte, daß lokal in Koordinaten, $\nabla_i g_{kl} = \frac{\partial}{\partial x_i}g_{kl}$ ist und somit ∇_i mit $\frac{d}{ds}$ vertauscht.

Beweis: Berechne zuerst $\frac{d}{ds}|\nabla A|^2$:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}|\nabla A|^2 &= \frac{d}{ds}(\nabla_i h_{kl}\nabla_j h_{mn}g^{ij}g^{km}g^{ln})\\
&= \frac{d}{ds}\Big((\frac{\partial}{\partial x_i}h_{kl}-\Gamma^r_{ik}h_{rl}-\Gamma^r_{il}h_{kr})\\
&\qquad \cdot(\frac{\partial}{\partial x_j}h_{mn}-\Gamma^r_{jm}h_{rn}-\Gamma^r_{jn}h_{mr})g^{ij}g^{km}g^{ln}\Big)\\
&= \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{d}{ds}h_{kl}-\frac{d}{ds}\Gamma^r_{ik}h_{rl}-\frac{d}{ds}\Gamma^r_{il}h_{kr}\Big)\\
&\qquad \cdot\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}h_{mn}-\Gamma^r_{jm}h_{rn}-\Gamma^r_{jn}h_{mr}\Big)g^{ij}g^{km}g^{ln}\\
&\quad +\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}h_{kl}-\Gamma^r_{ik}h_{rl}-\Gamma^r_{il}h_{kr}\Big)\\
&\qquad \cdot\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{d}{ds}h_{mn}-\frac{d}{ds}\Gamma^r_{jm}h_{rn}-\frac{d}{ds}\Gamma^r_{jn}h_{mr}\Big)g^{ij}g^{km}g^{ln}\\
&\quad +\nabla_i h_{kl}\nabla_j h_{mn}\frac{d}{ds}g^{ij}g^{km}g^{ln}+\nabla_i h_{kl}\nabla_j h_{mn}g^{ij}\frac{d}{ds}g^{km}g^{ln}\\
&\quad +\nabla_i h_{kl}\nabla_j h_{mn}g^{ij}g^{km}\frac{d}{ds}g^{ln}+0.
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

Die Null steht für Produkte, die ein Γ^i_{jk} enthalten, denn wir können das Koordinatensystem lokal so wählen, daß diese identisch Null sind. Wenn wir

$$
\begin{aligned}
\nabla_i h_{kl}\nabla_j h_{mn}\frac{d}{ds}g^{ij}g^{km}g^{ln} &= -\nabla_i h_{kl}\nabla_j h_{mn}g^{is}\frac{d}{ds}g_{rs}g^{rj}g^{km}g^{ln}\\
&= -\nabla_i h_{kl}\nabla_j h_{mn}g^{is}(-2\frac{1}{H}h_{rs})g^{rj}g^{km}g^{ln}\\
&= 2\frac{1}{H}\nabla_i h_{kl}\nabla_j h_{mn}g^{is}h_{rs}g^{rj}g^{km}g^{ln}\\
&= \breve{C}_1(\sup_{M^n\times[0,s_0]}A,\sup_{M^n\times[0,s_0]}H^{-1})|\nabla A|^2
\end{aligned}
$$

in (7.1) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}|\nabla A|^2 &= 2\nabla_i \frac{d}{ds}h_{kl}\nabla_j h_{mn}g^{ij}g^{km}g^{ln} + 3\breve{C}_1|\nabla A|^2 \\
&\quad -2\nabla_i h_{kl}\Big(\frac{d}{ds}\Gamma^r_{jm}h_{rn} + \frac{d}{ds}\Gamma^r_{jn}h_{mr}\Big)g^{ij}g^{km}g^{ln} \\
&= 2\nabla_i h_{kl}h_{rn}g^{rz}\Big(\nabla_j(\frac{1}{H}h_{mz}) + \nabla_m(\frac{1}{H}h_{jz}) - \nabla_z(\frac{1}{H}h_{jm})\Big)g^{ij}g^{km}g^{ln} \\
&\quad +2\nabla_i h_{kl}h_{rm}g^{rz}\Big(\nabla_j(\frac{1}{H}h_{nz}) + \nabla_n(\frac{1}{H}h_{jz}) - \nabla_z(\frac{1}{H}h_{jn})\Big)g^{ij}g^{km}g^{ln} \\
&\quad +2\langle\nabla_i \frac{d}{ds}h_{kl}, \nabla_i h_{kl}\rangle + 3\breve{C}_1|\nabla A|^2. \qquad (7.2)
\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.3 (i) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
2\langle\nabla_i \frac{d}{ds}h_{kl}, \nabla_i h_{kl}\rangle &= 2\frac{1}{H^2}\langle\nabla_i \Delta h_{kl}, \nabla_i h_{kl}\rangle \\
&+\Big(-4\frac{1}{H^3}\nabla_i(\nabla_k H\nabla_l H) - 4\frac{1}{H}\nabla_i \overline{R}_{k00l} - 2\frac{1}{H^2}\nabla_i h_{kl}(|A^2| + \overline{R}ic(\nu,\nu)) \\
&-2\frac{1}{H^2}h_{ij}(\nabla_i|A^2| + \nabla_i\overline{R}ic(\nu,\nu)) - 4\frac{1}{H^2}\nabla_i h_{uv}\overline{R}_{vklu} - 4\frac{1}{H^2}h_{uv}\nabla_i\overline{R}_{vklu} \\
&-2\frac{1}{H^2}\nabla_i h_{vk}\overline{R}_{vulu} - 2\frac{1}{H^2}h_{vk}\nabla_i\overline{R}_{vulu} - 2\frac{1}{H^2}\nabla_i h_{lv}\overline{R}_{vuku} \\
&-2\frac{1}{H^2}h_{lv}\nabla_i\overline{R}_{vuku} - 2\frac{1}{H^2}\nabla_i\overline{\nabla}_u\overline{R}_{0klu} - 2\frac{1}{H^2}\nabla_i\overline{\nabla}_l\overline{R}_{0uku} - 4\frac{1}{H^3}\nabla_i H\Delta h_{kl} \\
&+12\frac{1}{H^4}\nabla_i H\nabla_k H\nabla_l H + 4\frac{1}{H^2}\nabla_i H\overline{R}_{k00l} + 8\frac{1}{H^3}\nabla_i H h_{uv}\overline{R}_{vklu} \\
&+4\frac{1}{H^3}\nabla_i H h_{vk}\overline{R}_{vulu} + 4\frac{1}{H^3}\nabla_i H h_{lv}\overline{R}_{vuku} + 4\frac{1}{H^3}\nabla_i H\overline{\nabla}_u\overline{R}_{0klu} \\
&+4\frac{1}{H^3}\nabla_i H\overline{\nabla}_l\overline{R}_{0uku} + 4\frac{1}{H^3}\nabla_i H h_{kl}(|A^2| + \overline{R}ic(\nu,\nu))\Big)\nabla_j h_{mn}g^{ij}g^{km}g^{ln}. \\
&\qquad (7.3)
\end{aligned}$$

Außerdem erhalten wir noch

$$\begin{aligned}
\frac{1}{H^2}\Delta|\nabla A|^2 &= 2\frac{1}{H^2}\langle\Delta\nabla_i h_{kl}, \nabla_i h_{kl}\rangle + \frac{1}{H^2}\langle\nabla_v\nabla_i h_{kl}, \nabla_v\nabla_i h_{kl}\rangle \\
&\overset{(\alpha)}{=} 2\frac{1}{H^2}\langle\nabla_i \Delta h_{kl}, \nabla_i h_{kl}\rangle + 2\frac{1}{H^2}|\nabla^2 A|^2 + c_1(\|\overline{R}iem\|_{0,G})|\nabla A|^2 \\
&\quad +c_2(\|\overline{R}iem\|_{0,G})|A|^2, \qquad (7.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_i\overline{\nabla}_u\overline{R}_{0klu} &= \overline{\nabla}_i\overline{\nabla}_u\overline{R}_{0klu} + \overline{\nabla}_u\overline{R}_{0k0u}h_{li} + \overline{\nabla}_u\overline{R}_{0kl0}h_{ui} + \overline{\nabla}_0\overline{R}_{0klu}h_{ui} \\
&\quad +\overline{\nabla}_u\overline{R}_{mklu}h_{mi} + \underbrace{\overline{\nabla}_u\overline{R}_{00lu}h_{ki}}_{=0} \\
&= \overline{\nabla}_i\overline{\nabla}_u\overline{R}_{0klu} + c_3(\|\overline{R}iem\|_{1,G}, |A|^2), \qquad (7.5)
\end{aligned}$$

$$\nabla_i \overline{R}_{vulu} \quad = \quad \overline{\nabla}_i \overline{R}_{vulu} + c_4(\|\overline{Riem}\|_{0,G}, |A|^2), \tag{7.6}$$

$$-4\frac{1}{H^3}\nabla_i H \Delta h_{kl} \nabla_i h_{kl} \quad \leq \quad \frac{1}{H^2}\frac{\varepsilon}{2}|\nabla^2 A|^2 + \frac{8}{\varepsilon}\frac{1}{H^4}|\nabla H|^2 |\nabla A|^2, \tag{7.7}$$

$$-8\frac{1}{H^3}\nabla_i \nabla_k H \nabla_l H \nabla_i h_{kl} \quad \leq \quad \frac{1}{H^2}\frac{\varepsilon}{2}|\nabla^2 A|^2 + \frac{32}{\varepsilon}\frac{1}{H^4}|\nabla H|^2 |\nabla A|^2, \tag{7.8}$$

wobei (α) mit der Regel für das Vertauschen von kovarianten Ableitungen und den Gauß Gleichungen folgt.
Setze (7.3) in (7.2) ein und mit (7.4)-(7.8) folgt die Behauptung. □

Um das folgende Lemma beweisen zu können, führen wir eine vereinfachte Schreibweise ein. Wie in [HA1] und [H1] schreiben wir $S * T$ für jede Linearkombination von Tensoren, die durch eine Kontraktion von S und T durch g entsteht. Die m-te kovariante Ableitung eines Tensors T werden wir mit ∇^m bezeichnen. Mit dieser Notation wird die zeitliche Ableitung der Christoffelsymbole (siehe Vorweg in 7.1), mit der Evolutionsgleichung für g, zu

$$\frac{d}{ds}\Gamma^i_{jk} = -g^{il}\Big(\nabla_j(\frac{1}{H}h_{kl}) + \nabla_k(\frac{1}{H}h_{jl}) - \nabla_l(\frac{1}{H}h_{jk})\Big) = A * \nabla A.$$

Nun können wir wie in [HA1,§13] vorgehen und erhalten

7.2 Lemma.

Auf M_s gilt:

$$\Big(\frac{d}{ds} - \frac{1}{H^2}\Delta\Big)|\nabla^m A|^2 \leq -\frac{1}{H^2}(2-\varepsilon)|\nabla^{m+1}A|^2 + C_m(1 + |\nabla^m A|^2),$$

wobei

$$C_m = C_m\Big(n, \sup_{M^n\times[0,s_0]} v, \|\overline{Riem}\|_{m+1,G}, \sum_{i=0}^{m-1} \sup_{M^n\times[0,s_0]} \nabla^i A, H_0^{-1}, \sup_{M^n\times[0,s_0]} \nabla H\Big).$$

mit H_0 wie in Satz 5.2.

Beweis: Berechnen wir zuerst $\frac{d}{ds}|\nabla^m A|^2$. Wir rechnen wieder in lokoalen Koordinaten, in denen $\Gamma^i_{jk} = 0$ gilt.

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}|\nabla^m A|^2 &= \frac{d}{ds}\langle \nabla^m h_{kl}, \nabla^m h_{kl}\rangle \\ &= \frac{d}{ds}\Big(\nabla_{i_1 i_2 \ldots i_m} h_{kl} \nabla_{j_1 j_2 \ldots j_m} h_{pq} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \ldots g^{i_m j_m} g^{kp} g^{lq}\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\Big(\nabla_{i_1 i_2 \ldots i_m}\frac{d}{ds}h_{kl}\nabla_{j_1 j_2 \ldots j_m}h_{pq}g^{i_1 j_1}g^{i_2 j_2}\ldots g^{i_m j_m}g^{kp}g^{lq}\\
&\quad +\nabla_{i_1 i_2 \ldots i_m}h_{kl}\nabla_{j_1 j_2 \ldots j_m}h_{pq}\frac{d}{ds}g^{i_1 j_1}g^{i_2 j_2}\ldots g^{i_m j_m}g^{kp}g^{lq}+\cdots\\
&\quad \cdots+\nabla_{i_1 i_2 \ldots i_m}h_{kl}\nabla_{j_1 j_2 \ldots j_m}h_{pq}g^{i_1 j_1}g^{i_2 j_2}\ldots g^{i_m j_m}g^{kp}g^{lq}\\
&\quad +\Big(\sum_{d=1}^{m-1}\frac{d}{ds}\Gamma^r_{i_d k}h_{rl}\Big)\nabla_{j_1 j_2 \ldots j_m}h_{pq}g^{i_1 j_1}g^{i_2 j_2}\ldots g^{i_m j_m}g^{kp}g^{lq}\Big)\\
&= 2\langle\nabla^m\frac{d}{ds}h_{kl},\nabla^m h_{kl}\rangle+\nabla A*\nabla^m A*\nabla^m A\\
&\quad +\sum_{i+j+k=m}\nabla^i A*\nabla^j A*\nabla^k A*\nabla^m A. \qquad (7.9)
\end{aligned}$$

Berechnen wir nun den ersten Term mit Hilfe von Lemma 4.3 (i):

$$\begin{aligned}
\langle\nabla^m\frac{d}{ds}h_{kl},\nabla^m h_{kl}\rangle &\leq \langle\nabla^m(\frac{1}{H^2}\Delta h_{kl}+2\frac{1}{H^3}|\nabla H|^2+2\frac{1}{H}\overline{R}iem\\
&\qquad +\tilde{c}_1\frac{1}{H^2}A*\overline{R}iem+\frac{1}{H^2}\overline{\nabla R}iem+\frac{1}{H^2}A*A*A,\nabla^m h_{kl}\rangle\\
&\leq 2\langle\frac{1}{H^2}\nabla^m\Delta h_{kl},\nabla^m h_{kl}\rangle-4\langle\frac{1}{H^3}\nabla H\nabla^{m-1}\Delta h_{kl},\nabla^m h_{kl}\rangle\\
&\quad +\tilde{c}_2(H)\sum_{i+j=m-2}\nabla^{i+2}A*\nabla^{j+2}A*\nabla^m A+4\frac{1}{H^3}\nabla^{m+1}H\nabla H*\nabla^m A\\
&\quad +\tilde{c}_3(H)\Big(\nabla^m A*\nabla A*\nabla A*\nabla^m A+\sum_{i+j+k=m-1}\nabla^i A*\nabla^{j+1}A*\nabla^{k+1}A\nabla^m A\\
&\quad +\sum_{i+j=m}\nabla^i A*\nabla^j\overline{R}iem*\nabla^m A+\sum_{i+j+k=m}\nabla^i A*\nabla^j\overline{R}iem*\nabla^k A*\nabla^m A\\
&\quad +\sum_{i+j=m}\nabla^i A*\nabla^j\overline{\nabla R}iem*\nabla^m A\\
&\quad +\sum_{i+j+k+l=m}\nabla^i A*\nabla^j A*\nabla^k A*\nabla^l A*\nabla^m A\Big). \qquad (7.10)
\end{aligned}$$

Es fehlen uns noch

$$\begin{aligned}
\Delta|\nabla^m A|^2 &= \nabla_i\nabla_i\langle\nabla^m h_{kl},\nabla^m h_{kl}\rangle\\
&= 2\langle\Delta\nabla^m h_{kl},\nabla^m h_{kl}\rangle+2\langle\nabla_i\nabla^m h_{kl},\nabla_i\nabla^m h_{kl}\rangle\\
&= 2\langle\Delta\nabla^m h_{kl},\nabla^m h_{kl}\rangle+2|\nabla^{m+1}A|^2 \qquad (7.11)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\nabla^m\Delta h_{kl} &= \Delta\nabla^m h_{kl}+\sum_{i=0}^{m}\nabla^i(Riem*A)\\
&= \Delta\nabla^m h_{kl}+\sum_{i=0}^{m}\nabla^i(\overline{R}iem*A)+\sum_{i=0}^{m}\nabla^i(A*A*A). \qquad (7.12)
\end{aligned}$$

In der Gleichung (7.12) haben wir einen Term, in dem $\nabla^w \overline{R}iem$ auftaucht; diesen wollen wir nun in die Form

$$\overline{\nabla}^w \overline{R}iem + \bar{c}_w(\|\overline{R}iem\|_{w-1,G}, \sum_{j<w} |\nabla^j A|^2) \tag{7.13}$$

bringen. Hierbei ist

$$\bar{c}_w = \sum_{j,k<w} \overline{\nabla}^j \overline{R}iem * \nabla^k A * \bigodot_{|\alpha|\le w-2}^{w-1} A,$$

mit

$$\bigodot_{|\alpha|\le w-2}^{w-1} A := \begin{cases} 1 & : \quad w = 0,1 \\ \sum\limits_{|\alpha|\le w-2} \nabla^{i_1} A * \nabla^{i_2} * \ldots * \nabla^{i_s} A & : \quad w \ge 2 \end{cases}$$

$$|\alpha| := \sum_{l=1}^{s} i_l, \quad s \le w-1.$$

Beweis von (7.13): Durch Induktion nach w.
Induktionsanfang: $w = 0$ ist klar, $w = 1$ ist die Gleichung (7.6).
Nun berechnen wir noch mit Hilfe von (7.6) den Fall $w = 2$:

$$\begin{aligned} \nabla\nabla\overline{R}iem &= \nabla(\overline{\nabla}\overline{R}iem + \overline{R}iem * A) \\ &= \nabla\overline{\nabla}\overline{R}iem + \nabla\overline{R}iem * A + \overline{R}iem * \nabla A \\ &= \overline{\nabla\nabla}\overline{R}iem + \overline{\nabla}\overline{R}iem * A + (\overline{\nabla}\overline{R}iem + \overline{R}iem * A) * A \\ &\quad +\overline{R}iem * \nabla A \\ &= \overline{\nabla\nabla}\overline{R}iem + \sum_{j,k<2} \overline{\nabla}^j \overline{R}iem * \nabla^k A * \bigodot_{|\alpha|\le 0}^{1} A. \end{aligned}$$

Induktionsschritt: Sei Behauptung richtig für w, zeige Behauptung ist richtig für $w+1$:

$$\begin{aligned} \nabla^{w+1}\overline{R}iem &= \nabla\nabla^w \overline{R}iem =_\alpha \nabla(\overline{\nabla}^w \overline{R}iem + \sum_{j,k<w} \overline{\nabla}^j \overline{R}iem * \nabla^k A * \bigodot_{|\alpha|\le w-2}^{w-1} A) \\ &= \nabla\overline{\nabla}^w \overline{R}iem + \nabla \sum_{j,k<w} \overline{\nabla}^j \overline{R}iem * \nabla^k A * \bigodot_{|\alpha|\le w-2}^{w-1} A \\ &= \overline{\nabla}^{w+1}\overline{R}iem + \overline{\nabla}^w Riem * A + \sum_{j,k<w} \nabla\overline{\nabla}^j \overline{R}iem * \nabla^k A * \bigodot_{|\alpha|\le w-2}^{w-1} A \\ &\quad + \sum_{j,k<w} \overline{\nabla}^j \overline{R}iem * \nabla\nabla^k A * \bigodot_{|\alpha|\le w-2}^{w-1} A \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \sum_{j,k<w} \overline{\nabla}^j \overline{Riem} * \nabla^k A * \nabla \bigodot_{|\alpha|\leq w-2}^{w-1} A \\
= \;& \overline{\nabla}^{w+1} \overline{Riem} + \overline{\nabla}^w Riem * A + \sum_{j,k<w} \overline{\nabla}^{j+1} \overline{Riem} * \nabla^k A * \bigodot_{|\alpha|\leq w-2}^{w-1} A \\
& + \sum_{j,k<w} (\overline{\nabla}^j \overline{Riem} * A) * \nabla^k A * \bigodot_{|\alpha|\leq w-2}^{w-1} A \\
& + \sum_{j,k<w} \overline{\nabla}^j \overline{Riem} * \nabla^{k+1} A * \bigodot_{|\alpha|\leq w-2}^{w-1} A \\
& + \sum_{j,k<w} \overline{\nabla}^j \overline{Riem} * \nabla^k A * \bigodot_{|\alpha|\leq w-1}^{w-1} A \\
= \;& \overline{\nabla}^{w+1} \overline{Riem} + \sum_{j,k<w+1} \overline{\nabla}^j \overline{Riem} * \nabla^k A * \bigodot_{|\alpha|\leq w-1}^{w} A.
\end{aligned}
$$

□

Anmerkung: Hieraus erhält man, durch analoges Vorgehen,

$$
\nabla^q \overline{\nabla} \overline{Riem} \leq \overline{\nabla}^{q+1} \overline{Riem} + \hat{c}_q(\|\overline{Riem}\|_{q,G}, \sum_{j<q} |\nabla^j A|^2). \tag{7.14}
$$

Um den Beweis des Lemmas zu vollenden, benötigen wir noch Abschätzungen für die Terme in (7.10) die (m+1)-te Ableitungen von A enthalten:

$$
\begin{aligned}
-4\langle \frac{1}{H^3} \nabla H \nabla^{m-1} \Delta h_{kl}, \nabla^m h_{kl} \rangle \;&\leq\; \frac{1}{H^2}\frac{\varepsilon}{2} |\nabla^{m+1} A|^2 + \frac{8}{\varepsilon}\frac{1}{H^4} |\nabla H|^2 |\nabla^m A|^2, & (7.15) \\
4\frac{1}{H^3} \nabla^{m+1} H \nabla H * \nabla^m A \;&\leq\; \frac{1}{H^2}\frac{\varepsilon}{2} |\nabla^{m+1} A|^2 + \frac{8}{\varepsilon}\frac{1}{H^4} |\nabla H|^2 |\nabla^m A|^2. & (7.16)
\end{aligned}
$$

Bilde nun die Differenz von (7.9) und (7.11), berücksichtige (7.10), (7.12) - (7.16) und die Behauptung des Satzes folgt. □

7.3 **Theorem.** Obere Schranke für $|\nabla^m A|^2$

Sei M_s eine glatte Lösung von (IMK) auf dem Intervall $0 \leq s < s_0$, so daß M_s in einer glatten und kompakten Teilmenge $G \subset \mathcal{V}$, für alle $0 \leq s < s_0$, enthalten ist. Dann erfüllt $|\nabla^m A|^2$ auf M_s die folgende a priori Abschätzung. Für alle $m \geq 0$ gibt es ein K_m so, daß

$$
|\nabla^m A|^2 \leq K_m,
$$

wobei $K_m = K_m(C_m, C_{m-1}, \max_{M_0} |\nabla^m A|^2)$ und C_m, C_{m-1} wie in Lemma 7.2.

Beweis: Durch Induktion, ähnlich wie in [H4].

Induktionsanfang: $m = 0$ ist klar, da $|A|^2$ beschränkt ist (siehe Satz 6.2).

Induktionsschritt: Sei die Behauptung richtig für m. Zeige, daß die Behauptung richtig ist für $m+1$. Betrachte hierzu die Funktion $f := |\nabla^{m+1}A|^2 + N|\nabla^m A|^2$, mit $N \geq 2C_{m+1}$ (C_{m+1} wie in Lemma 7.2). Dann gilt mit Lemma 7.2

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}f &\leq \Delta f + (C_{m+1} - N)|\nabla^{m+1}A|^2 + C_m|\nabla^m A|^2 + C_m \\ &\leq \Delta f - C_{m+1}f + C_m + (C_m + C_{m+1})|\nabla^m A|^2.\end{aligned}$$

Somit ist f und somit auch $|\nabla^{m+1}A|^2$ gleichmäßig beschränkt durch eine Konstante K_{m+1}, die von C_m, C_{m+1} und $\max\limits_{M_0}|\nabla^{m+1}A|^2$ abhängt. □

8 Langzeitexistenz und Folgerungen

In diesem Kapitel erhalten wir nun, mit dem Resultat über die Kurzzeitexistenz glatter Lösungen und den Schranken aus den Kapiteln 5 und 6 bzw. 7, die Existenz von Lösungen von (*IMK*) „für lange Zeiten“:

8.1 Theorem.

Seien $M^n, \mathcal{V}$ wie in Kapitel 1 und nehme an, daß $M_0 = F_0(M^n)$ eine glatte, kompakte, raumartige Hyperfläche in $\mathcal{V}$ ist. Sei $M_s = F(\cdot, s)(M^n)$ eine Familie glatter, kompakter, raumartiger Hyperflächen, die das Anfangswertproblem (IMK) auf einem Intervall $s \in [0, s_0)$ lösen. Bleibt M_s in einer glatten und kompakten Region von $\mathcal{V}$ wenn $s \to s_0$, so kann die Lösung über s_0 hinaus fortgesetzt werden.

Beweis: Nach Voraussetzung bleibt M_s in einer glatten und kompakten Region von $\mathcal{V}$ und u ist gleichmäßig beschränkt. Deshalb folgern wir aus den a priori Schranken der Kapitel 5 und 6 bzw. 7, daß M_s gegen eine glatte Fläche M_{s_0} konvergiert wenn $s \to s_0$. Somit kann die Lösung M_s, mit dem Resultat über die Kurzzeitexistenz (Thm. 3.7), über s_0 hinaus fortgesetzt werden.

Hieraus folgt nun sofort, daß die Blätterung alle Zeitschnitte $\Sigma^n \times \{\tau\}$ in der Vergangenheit von M_0 erreicht, die noch ganz im glatten Bereich von $\mathcal{V}$ liegen:

8.2 Korollar.

Sei $[b, t_0]$, $b < t_0$ ein Zeitintervall, d.h. b ist in der Vergangenheit von t_0, mit $\Sigma^n \times [b, t_0]$ glatt und $\Sigma^n \times \{t_0\} \cap D_-(M_0) \neq \emptyset$. Wenn weiter M_s, $s \in [0, S)$, eine *maximale Lösung von (IMK) ist, so existiert für jedes* $\tau \in [b, t_0]$ *ein* $s_\tau \in [0, S)$ *mit* $\Sigma^n \times \{\tau\} \cap M_{s_\tau} \neq \emptyset$.

Hierbei bezeichnet $D_-(M_0)$ den Einflußbereich (*past domain of dependence*) von M_0 in Richtung Anfangssingularität. Das sind alle Punkte $p \in \mathcal{V}$, für die gilt, jede nicht raumartige, zukunftsgerichtete und nicht erweiterbare Kurve durch p schneidet M_0.

8.3 Korollar.

Falls der "inverse mittlere Krümmungsfluß" (IMK) für alle Zeiten existiert, so geht $\mathrm{Vol}(M_s)$ *gegen Null für* $s \to \infty$ *und die Blätterung läuft bis in die Anfangssingularität.*

Beweis von 8.2 und 8.3: Das Volumen nimmt exponentiell ab, weil aus Lemma 4.1 (*iii*) folgt, daß $\frac{d}{ds} \int d\mu = -\int d\mu$. □

Wir haben somit einen alternativen Beweis für ein Resultat von *Hawking* und *Penrose*, das besagt, daß eine kosmologischen Raumzeit, in der die zeitartige Konvergenzbedingung erfüllt ist und in der eine raumartige Hyperfläche mit strikt positiver mittlerer Krümmung existiert, eine Anfangssingularität besitzt [HE].

Bemerkung: Man kommt hier im Gegensatz zu bisherigen Ergebnissen (z.B. [GC1,EH1]) <u>ohne</u> Barierеflächen aus.

9 Beispiel

Im letzten Kapitel werden wir noch die Robertson-Walker-Raumzeiten, als ein einfaches Beispiel für kosmologische Raumzeiten betrachten. Wie in [ON: Kap.12] definieren wir

9.1 Definition. Robertson-Walker-Raumzeit

Sei S *eine zusammenhängende, 3-dimensionale, Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung* $k = 1, 0$ *oder* -1. *Sei* $f > 0$ *eine glatte Funktion auf einem offenen Intervall* $I \subset \mathbb{R}^1_1$, *wobei* $\mathbb{R}^1_1$ *der eindimensionale Minkowski Raum ist. Dann heißt das warped product*

$$M(k, f) := I \times_f S$$

Robertson-Walker-Raumzeit.

Explizit heißt das, $M(k,f)$ ist die Mannigfaltigkeit $I \times S$ mit dem Linienelement $-dt^2 + f^2(t)d\sigma^2$, dabei ist $d\sigma^2$ das Linienelement auf S (geliftet auf $I \times S$). Die Metrik auf $M(k,f)$ ist also gegeben durch

$$g_{\alpha\beta} := \begin{cases} -1 & : \quad \alpha = \beta = 0 \\ 0 & : \quad \alpha = 0, \beta \neq 0 \\ 0 & : \quad \alpha \neq 0, \beta = 0 \\ f(t)\tilde{g}_{ij} & : \quad \alpha = i, \beta = j \end{cases}$$

und $\tilde{g}_{ij}$ ist die Metrik auf S (geliftet auf $I \times S$). Wie bisher (jetzt ist $n = 3$) laufen griechische Indizes von 0 bis 3 und lateinische von 1 bis 3. Die Mannigfaltigkeit ist zeitorientiert, wenn man fordert, daß $U = \partial_t$ zukunftsgerichtet ist. Wir sagen, das Intervall I ist maximal, wenn wir f nicht zu einer glatten, positiven Funktion auf einem strikt größeren Intervall fortsetzen können.

Standardmäßig wählt man für S die einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten: $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{R}^3$ und S^3. Die Analysis des Zusammenhangs und der Krümmung der Robertson-Walker-Raumzeit folgt aus allgemeinen Resultaten über warped products, z.B. [ON: Kap.7].

9.2 Definitionen.

Für die weiteren Rechnungen brauchen wir die folgenden Definitionen für allgemeine Produktmannigfaltigkeiten $I \times M$:

(i) $T_{(s,p)}(M) := T_{(s,p)}(s \times M)$

(ii) Die Projektion auf M *ist gegeben durch* $\pi : I \times M \to M$, *mit* $\pi(s,p) = p$. *Die zu* π *gehörige Abbildung zwischen den Tangentialräumen bezeichnen wir dann mit* $d\pi : T_{(s,p)}(I \times M) \to T_{(s,p)}(M)$.

(iii) Für einen Vektor $x \in T_p(M)$ *bezeichnen wir mit dem Lift von* x *auf* $(s,p) \in I \times M$ *den eindeutigen Vektor* $\tilde{x} \in T_{(s,p)}(M)$, *mit der Eigenschaft, daß* $d\pi(\tilde{x}) = x$ *ist.*

(iv) Für ein Vektorfeld X *auf* M *bezeichnen wir mit dem Lift von* X *auf* $I \times M$ *das Vektorfeld* $\tilde{X}$, *das an jedem Punkt* $(s,p) \in I \times M$ *den Wert des Liftes des Vektors* $X(p)$ *auf* (s,p) ($\cong \tilde{X}(p)$) *annimmt. Die Menge aller solcher Lifts von Vektorfeldern* $\tilde{X}$ *bezeichnen wir mit* $\mathcal{L}(M)$.

Sei also $\mathcal{L}(S)$ die Menge aller Lifts, von Vektorfeldern auf S, auf $M(k,f)$. Dann haben wir als Korollar zu den Ergebnissen aus [ON: Kap.7](7.35, 7.43):

9.3 Korollar.

Wenn X, $Y \in \mathcal{L}(\mathrm{S})$ in $M(k,f)$, dann gilt

$$\begin{aligned}
&(1)\ D_U U = 0,\\
&(2)\ D_U X = D_X U = \left(\frac{f'}{f}\right) X,\\
&(3)\ nor D_X Y = A(X,Y) = \langle X,Y\rangle \left(\frac{f'}{f}\right) U,\\
&(4)\ Ric(U,U) = -3\frac{f''}{f},\\
&(5)\ Ric(U,X) = 0,\\
&(6)\ Ric(X,Y) = \left(2\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + 2\frac{k}{f^2} + \frac{f''}{f}\right)\langle X,Y\rangle,
\end{aligned}$$

wobei nor die orthogonale Projektion in U-Richtung ist, sie ist gegeben durch $norW = -\langle W,U\rangle U$.

9.4 Konkrete Beispiele.

Sei nun $\mathcal{V} := S \times_f I$ und ist M_0 gegeben durch die Immersion $F_0 : M^n \to \mathcal{V}$, wobei $F_0(M^n) = S \times_f t(0)$, dann ist $f(t(0))$ eindeutig festgelegt. In dem Fall, daß $M^n := S^3_R$ und $\mathcal{V} := S^3_1 \times_f I$ erhalten wir $f(t(0))^2 = R$. Betrachten wir nun unseren Fluß:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}F(s) = -\Big(\frac{1}{H}\nu\Big)(s), \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad s \geq 0,\\
&F(0) = F_0.
\end{aligned}$$

Wobei $\nu(s)$ die zukunftsgerichtete Einheitsnormale auf $M_s = F(s)(M^n)$ und H die mittlere Krümmung auf M_s ist.
Beachte hierbei, daß wir $F(s)$ mit $t(s)$ auf eindeutige Weise identifizieren können. Wir haben somit die folgende Evolutionsgleichung für t:

$$\frac{d}{ds}t(s) = -\frac{1}{H}(t(s)), \qquad s \geq 0.$$

Nach Korollar 9.3 ergibt dies

$$\frac{d}{ds}t(s) = -\frac{f(t)}{nf'(t)}.$$

Da wir in dieser Arbeit von strikt positiver, mittlerer Krümmung und der zeitartigen Konvergenzbedingung ($\overline{Ric}(\nu,\nu) \geq 0$) ausgehen, muß die Funktion f der Robertson-Walker-Raumzeit folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{array}{rl} (i) & f > 0, \quad \text{per Definition} \\ (ii) & f'(t) > 0, \\ (iii) & f''(t) \leq 0 \quad \forall t \end{array}$$

Betrachten wir zunächst zwei einfache Beispiele:
(A) $f(t) = a + b{\cdot}t$, $t \in (-\frac{a}{b}, \infty)$;
(B) $f(t) = \sqrt{a - b{\cdot}t^2}$, $t \in (-\sqrt{\frac{a}{b}}, \sqrt{\frac{a}{b}})$.
Mit positiven Konstanten a und b.
Im Fall (A) führt uns das zu der gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{ds}t(s) = -\frac{a + b{\cdot}t}{nb} = -\frac{a}{nb} - \frac{t}{n}.$$

Somit erhalten wir $t(s) = -\frac{a}{b} + (t(0) + \frac{a}{b})e^{-\frac{s}{n}}$. Der Wert $t(s) = -\frac{a}{b}$ wird angenommen für $s \to \infty$.
Im Fall (B) ergibt sich die Gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d}{ds}t(s) = -\frac{\sqrt{a - b{\cdot}t^2}}{n\frac{-2bt}{2\sqrt{a-bt^2}}} = \frac{a - b{\cdot}t^2}{nbt} = \frac{a}{nbt} - \frac{t}{n}.$$

Es muß hier gelten, daß $t \in (-\sqrt{\frac{a}{b}}, 0)$, wegen Bedingung (ii). Wir erhalten schließlich $t(s) = -\sqrt{\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b} + t(0)^2)e^{-\frac{2s}{n}}}$ und der Wert $t(s) = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ wird angenommen für $s \to \infty$. Als letztes Beispiel betrachten wir

(C) Kosmologische Friedmann-Modelle [HE,ON].

Ein kosmologisches Friedmann Modell ist eine Robertson-Walker-Raumzeit, so daß die „galaktische Flüssigkeit“ ein „Staub“ ist und $H = nf'/f$ positiv ist für ein t_0. Ein „Staub“ ist eine „perfekte Flüssigkeit“ mit Druck $\phi = 0$ und Energiedichte $\rho > 0$. Im „Großen“ sollte dies ein gutes Modell für unser Universum sein. In einer Robertson-Walker-Raumzeit $M(k, f)$ mit nichtkonstantem f sind äquivalent:
Ein „Staub“ zu sein ist äquivalent dazu, daß die Friedmann-Gleichung $f'^2 + k = A/f$, mit $A = 8\pi\mathrm{M}/3$, erfüllt ist oder, daß $\rho f^3 = \mathrm{M}$ gilt (siehe [ON: Kap.12]); M ist hierbei eine positive Konstante die von der Masse abhängt. Somit lauten die Skalierungsfunktionen, wenn wir den *big bang* zum Zeitpunkt $t_* = 0$ setzen, in den drei Fällen:

$$(1) \qquad k = 0: \quad f(t) = Ct^{\frac{2}{3}},\ mit\ 4C^3 = 9A;$$

$$(2) \qquad k=1: \quad t=\frac{1}{2}A(\theta-\sin\theta), \quad f=\frac{1}{2}A(1-\cos\theta) \qquad \theta\in(0,2\pi);$$

$$(3) \qquad k=-1: \quad t=\frac{1}{2}A(\sinh\eta-\eta), \quad f=\frac{1}{2}A(\cosh\eta-1) \qquad \eta>0.$$

Im Fall (1) ergibt sich somit die folgende gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\frac{d}{ds}t(s) = -\frac{3}{2n}t.$$

Somit erhalten wir $t(s) = t(0)e^{-\frac{3}{2n}s}$ und der Wert $t_* = 0$ wird angenommen für $s \to \infty$.

Da wir in den Fällen (2) und (3) nur eine Parameterlösung kennen, werden wir die Parameterfunktion $\theta(s)$ (bzw. $\eta(s)$) durch das Lösen der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichung bestimmen.

$$\frac{d}{ds}\theta(t(s)) = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{ds} = -\frac{d\theta}{dt}\frac{f}{n\frac{df}{dt}} = -\frac{d\theta}{dt}\frac{f}{n\frac{df}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}} = -\frac{f}{n\frac{df}{d\theta}} \tag{9.1}$$

Wir erhalten also im Fall (2) die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{ds}\theta(t(s)) = -\frac{1-\cos\theta}{n\sin\theta},$$

mit der (bis auf den Anfangswert θ_0) eindeutigen Lösung $\theta(s) = \arcsin(\exp[(-s+n\ln[\sin(\theta_0/2)^2])/2n])$ und der Wert $t(s)=0$ wird angenommen für $s\to\infty$.
Für den Fall (3) erhalten wir dann, mit $\theta=\eta$ in (9.1), die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{ds}\eta(t(s)) = -\frac{\cosh\eta-1}{n\sinh\eta}.$$

Somit erhalten wir $\eta(s) = \operatorname{arcsinh}(\exp[(-s+n\ln[\sinh(\eta_0/2)^2])/2n])$ und der Wert $t(s)=0$ wird angenommen für $s\to\infty$.

Anmerkungen: (I) Die Anfangswerte θ_0 (bzw. η_0) sind bei bekanntem $t(0)$ eindeutig gegeben durch $t(\theta_0)=t(0)$ (bzw. $t(\eta_0)=t(0)$) und der Forderung $f'>0$.
(II) Die Fälle (2) und (3) haben in der Nähe der Singularität das gleiche qualitative Verhalten wie (1) (siehe z.B.[HE]).

Für die Friedmannuniversen kann man mit Hilfe der Hubblekonstante $\mathrm{H}_0 = f_0'/f_0$ (=1/n $H(0)$) und der derzeitigen Energiedichte ρ_0, sofern man diese kennt, das entsprechende Alter berechnen. Falls wir das Alter unseres Universums wissen, können wir bestimmen, in welchem Fall von Friedmannuniversum wir uns befinden. Mit den derzeitigen Vermutungen über ρ_0, H_0 und dem Alter unseres

Universums ist man der Auffassung, daß der Fall $k = -1$ das realistischste Friedmann-Modell für unser Universum ist. Die Energiedichte müßte ungefähr um den Faktor 2 (bzw. 4) größer sein, um im Fall $k = 0$ (bzw. $k = 1$) ein Alter in der selben Größenordnung wie im Fall $k = -1$ zu erhalten [ON].

A Beweis der ersten Variationsformel von H

Hier ist nun ein ausführlicher Beweis von Lemma 2.2, der sich eng an den Beweis in [B1] anlehnt. Es ist zu zeigen:

$$\Delta v = v(|A^2| + \overline{R}ic(\nu,\nu)) - \langle T, \nabla H\rangle + T(H_T). \tag{A.1}$$

Wobei $T(H_T)$ die Variation der mittleren Krümmung von M unter dem Deformationsvektorfeld T ist. Diese kann man auch in Termen des *Killing Tensors* $\mathcal{L}_T g$ ($\mathcal{L}_T g(X,Y) = \langle \overline{\nabla}_X\, T, Y\rangle + \langle \overline{\nabla}_Y\, T, X\rangle$) schreiben:

$$\begin{aligned} T(H_T) \;\;=\;\; & \frac{1}{2}(\overline{\nabla}_\nu\, \mathcal{L}_T g)(e_i,e_i) - (\overline{\nabla}_{e_i}\, \mathcal{L}_T g)(\nu, e_i) - \frac{1}{2} H \mathcal{L}_T g(\nu,\nu) \\ & - \mathcal{L}_T g(e_i,e_j) A(e_i,e_j). \end{aligned} \tag{A.2}$$

Beweis:
Wir rechnen an einem festen Punkt $p \in M$, wo wir das orthonormale n-Bein $\{e_i\}$ auf M so wählen, daß $\nabla_{e_i} e_i(p) = 0$ ist. Sei X ein transversales Vektorfeld, mit dem zugehörigen Fluß $\phi_s : \mathcal{V} \to \mathcal{V}, s \leq \varepsilon$, dann erweitern wir das n-Bein $\{e_i\}$ durch $e_i(s) := \phi_s(e_i)$. Wir erhalten somit ein tangentielles n-Bein an $M_s := \phi_s(M)$, mit Metrik $g_{ij}(s) := \langle e_i(s), e_j(s)\rangle$. Und es gilt per Definition $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ und $\mathcal{L}_X e_i = [X, e_i] = 0$. Sei $N(s)$ die zukunftsgerichtete Einheitsnormale zu M_s, dann ist die zweite Fundamentalform gegeben durch $h_{ij}(s) = \langle e_i, \overline{\nabla}_{ei}\, N\rangle(s)$. Für einen Vektor X ist die tangentiale bzw. normale Projektion wie bisher gegeben durch $X^T := \langle X, e_i\rangle e_i$ bzw. $X^N := -\langle X, N\rangle N$ und es gilt $X = X^T + X^N$.
Direkte Rechnung im Punkt p ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta\langle X, N\rangle &= e_i e_i \langle X, N\rangle = e_i\langle \overline{\nabla}_{e_i}\, X, N\rangle + e_i\langle X, \overline{\nabla}_{e_i}\, N\rangle \\ &\overset{A}{=} \langle \overline{\nabla}_{e_i}\, \overline{\nabla}_X\, e_i, N\rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_i}\, X, \overline{\nabla}_{e_i}\, N\rangle + e_i\langle X, h_{ij} g^{jk} e_k\rangle \\ &\overset{B}{=} \langle \overline{\nabla}_X\, \overline{\nabla}_{e_i}\, e_i, N\rangle + \langle \overline{R}(e_i, X)e_i, N\rangle + \langle \overline{\nabla}_X\, e_i, \overline{\nabla}_{e_i}\, N\rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_i}\, X, e_j\rangle h_{ij} \\ &\quad + \langle X, \overline{\nabla}_{e_i}\, e_j\rangle h_{ij} + \langle X, e_j\rangle e_i(h_{ij}) \\ &\overset{C}{=} -\langle \overline{R}(e_i, X)N, e_i\rangle + X\langle \overline{\nabla}_{e_i}\, e_i, N\rangle + 2\langle \overline{\nabla}_{e_i}\, X, e_j\rangle h_{ij} + \langle X, \overline{\nabla}_{e_i}\, e_j\rangle h_{ij} \\ &\quad + \langle X, e_j\rangle(e_j(H) + \langle \overline{R}(e_i, e_j)N, e_i\rangle) \\ &\overset{D}{=} -\overline{R}ic(X, N) + X\langle \overline{\nabla}_{e_i}\, e_i, N\rangle - X(g^{ij})h_{ij} + \langle X, \overline{\nabla}_{e_i}\, e_j\rangle h_{ij} \\ &\quad + X^T(H) + \overline{R}ic(X^T, N) \\ &\overset{E}{=} \langle X, N\rangle(\overline{R}ic(N,N) + |A|^2) + \langle X, \nabla H\rangle - X(H_X). \end{aligned}$$

Nebenrechnung A:

$$\begin{aligned} &(a) \qquad [X, e_i] = 0 \Rightarrow \overline{\nabla}_{e_i}\, X = \overline{\nabla}_X\, e_i, \\ &(b) \qquad \overline{\nabla}_{e_i}\, N = h_{ij} g^{jk} e_k. \end{aligned}$$

Nebenrechnung B:

$$\langle \overline{\nabla}_{e_i}\, \overline{\nabla}_X\, e_i, N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X\, \overline{\nabla}_{e_i}\, e_i, N\rangle + \langle \overline{R}(e_i, X)e_i, N\rangle.$$

Nebenrechnung C:

$$
\begin{aligned}
(a)\quad & \langle \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_{e_i} e_i, N\rangle = X\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, N\rangle - \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, \overline{\nabla}_X N\rangle \\
& = X\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, N\rangle - \langle HN + \nabla_{e_i} e_i, \overline{\nabla}_X N\rangle \\
& = X\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, N\rangle - H\cdot\frac{1}{2}X\langle N, N\rangle = X\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, N\rangle, \\
(b)\quad & \langle \overline{\nabla}_X e_i, \overline{\nabla}_{e_i} N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X e_i, e_j\rangle h_{ij}, \\
(c)\quad & e_i(h_{ij}) = \langle e_i, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_j} N\rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, \overline{\nabla}_{e_j} N\rangle \\
& = \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, \overline{\nabla}_{e_j} N\rangle + \langle e_i, \overline{\nabla}_{e_j} \overline{\nabla}_{e_i} N\rangle + \langle \overline{R}(e_i, e_j)N, e_i\rangle \\
& = \underbrace{\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, e_j\rangle}_{=|\nabla_{e_i} e_i|=0} h_{ij} + \langle \overline{R}(e_i, e_j)N, e_i\rangle + \overline{\nabla}_{e_j}\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_i} N\rangle + \underbrace{\langle \overline{\nabla}_{e_j} e_i, \overline{\nabla}_{e_i} N\rangle}_{=|\nabla_{e_j} e_i|h_{ij}=0} \\
& = e_j(H) + \langle \overline{R}(e_i, e_j)N, e_i\rangle.
\end{aligned}
$$

Nebenrechnung D:

$$
\begin{aligned}
(a)\quad & 2\langle \overline{\nabla}_{e_i} X, e_j\rangle h_{ij} = 2\frac{1}{2}X\langle e_i, e_j\rangle h_{ij} = X(g_{ij})h_{ij} = -X(g^{ij})h_{ij}, \\
(b)\quad & -\langle \overline{R}(e_i, X)N, e_i\rangle = -\overline{R}ic(X, N), \\
(c)\quad & X^T = \langle X, e_j\rangle e_j \Rightarrow \langle X, e_j\rangle e_j(H) = X^T(H), \\
(d)\quad & \langle X, e_j\rangle\langle \overline{R}(e_i, e_j)N, e_i\rangle = \langle X, e_j\rangle\langle \overline{R}(N, e_i)e_i, e_j\rangle = \langle \overline{R}(N, e_i)e_i, \langle X, e_j\rangle e_j\rangle \\
& = \langle \overline{R}(N, e_i)e_i, X^T\rangle = \langle \overline{R}(e_i, X^T)N, e_i\rangle = \overline{R}ic(X^T, N).
\end{aligned}
$$

Nebenrechnung E:

$$
\begin{aligned}
(a)\quad & \langle X, \overline{\nabla}_{e_i} e_j\rangle h_{ij} = \langle X, h_{ij}N + \nabla_{e_i} e_j\rangle h_{ij} = \langle X, N\rangle |A|^2, \\
(b)\quad & \overline{R}ic(X^T, N) - \overline{R}ic(X, N) = -\overline{R}ic(X^N, N) = -\overline{R}ic(-\langle X, N\rangle N, N) \\
& = \langle X, N\rangle \overline{R}ic(N, N), \\
(c)\quad & X^T(H) = \langle X, e_j(H)e_j\rangle = \langle X, \nabla H\rangle, \\
(d)\quad & X(H_X) = X\langle e_i, \nabla_{e_i} N\rangle + X(g^{ij})h_{ij} = -X\langle \nabla_{e_i} e_i, N\rangle + X(g^{ij})h_{ij}.
\end{aligned}
$$

Setze $X := T$ und es folgt (A.1). Für den Beweis von (A.2) berechnen wir am Punkt p:

$$
\begin{aligned}
X(H_X)(p) &= -h_{ij}\cdot X\langle e_i, e_j\rangle + X\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_i} N\rangle \\
&\overset{I}{=} -h_{ij}\mathcal{L}_X g(e_i, e_j) + \langle \overline{\nabla}_X e_i, \overline{\nabla}_{e_i} N\rangle + \langle e_i, \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_{e_i} N\rangle \\
&\overset{II}{=} -h_{ij}\mathcal{L}_X g(e_i, e_j) + e_i(\langle \overline{\nabla}_X e_i, N\rangle + \langle e_i, \overline{\nabla}_X N\rangle) + \langle \overline{R}(X, e_i)N, e_i\rangle \\
&\quad -\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, \overline{\nabla}_X N\rangle - e_i\langle \overline{\nabla}_X e_i, N\rangle + \langle \overline{\nabla}_X e_i, \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_{e_i} N\rangle \\
&\overset{III}{=} -h_{ij}\mathcal{L}_X g(e_i, e_j) + \langle \overline{\nabla}_N \overline{\nabla}_{e_i} X, e_i\rangle - \langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_N X, e_i\rangle - \langle \overline{\nabla}_{\overline{\nabla}_N e_i} X, e_i\rangle \\
&\quad +\langle \overline{\nabla}_{\overline{\nabla}_{e_i} N} X, e_i\rangle - e_i\langle \overline{\nabla}_{e_i} X, N\rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_i} X, \overline{\nabla}_{e_i} N\rangle \\
&\overset{IV}{=} \frac{1}{2}N\Big(\mathcal{L}_X g(e_i, e_i)\Big) - \mathcal{L}_X g(\overline{\nabla}_N e_i, e_i) - e_i\Big(\mathcal{L}_X g(N, e_i)\Big) + \langle \overline{\nabla}_N X, \overline{\nabla}_{e_i} e_i\rangle
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\overset{V}{=} \frac{1}{2}\overline{\nabla}_N \mathcal{L}_X g(e_i,e_i) - \overline{\nabla}_{e_i} \mathcal{L}_X g(N,e_i) - \mathcal{L}_X g(\overline{\nabla}_{e_i} N, e_i) - \mathcal{L}_X g(N, \overline{\nabla}_{e_i} e_i) \\
&\quad + \frac{1}{2} H \mathcal{L}_X g(N,N) \\
&\overset{VI}{=} \frac{1}{2}\overline{\nabla}_N \mathcal{L}_X g(e_i,e_i) - \overline{\nabla}_{e_i} \mathcal{L}_X g(N,e_i) - \mathcal{L}_X g_{ij} h_{ij} - \frac{1}{2} H \mathcal{L}_X g(N,N).
\end{aligned}$$

Nebenrechnung I:

$$\begin{aligned}
(a) &\quad \mathcal{L}_X g(e_i,e_j) := \langle \overline{\nabla}_{e_i} X, e_j\rangle + \langle e_i, \overline{\nabla}_{e_j} X\rangle, \\
(b) &\quad \overline{\nabla}_X e_i - \overline{\nabla}_{e_i} X = [X, e_i] = 0.
\end{aligned}$$

Nebenrechnung II:
Einfügen von $e_i\langle \overline{\nabla}_X e_i, N\rangle - e_i\langle \overline{\nabla}_X e_i, N\rangle$ und

$$\begin{aligned}
\langle e_i, \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_{e_i} N\rangle &= \langle e_i, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_X N\rangle + \langle \overline{R}(X,e_i)N, e_i\rangle \\
&= e_i\langle e_i, \overline{\nabla}_X N\rangle - \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, \overline{\nabla}_X N\rangle + \langle \overline{R}(X,e_i)N, e_i\rangle.
\end{aligned}$$

Nebenrechnung III:
Beachte $[N, e_i] := \overline{\nabla}_N e_i - \overline{\nabla}_{e_i} N$.

$$\begin{aligned}
(a) &\quad \langle \overline{\nabla}_X e_i, N\rangle = -\langle e_i, \overline{\nabla}_X N\rangle \Rightarrow e_i(\langle \overline{\nabla}_X e_i, N\rangle + \langle e_i, \overline{\nabla}_X N\rangle) = 0, \\
(b) &\quad \overline{\nabla}_{e_i} e_i = h_{ii} N + \nabla_{e_i} e_i \\
&\quad \Rightarrow -\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, \overline{\nabla}_X N\rangle = -h_{ii}\langle N, \overline{\nabla}_X N\rangle - \langle \nabla_{e_i} e_i, \overline{\nabla}_X N\rangle \\
&\quad\qquad = -h_{ii}\frac{1}{2}\overline{\nabla}_X \langle N, N\rangle - 0 = 0, \\
(c) &\quad \overline{R}(X,Y)Z := \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z \\
&\quad \Rightarrow \langle \overline{R}(X,e_i)N, e_i\rangle = \langle \overline{R}(N,e_i)X, e_i\rangle \\
&\quad\qquad = \langle \overline{\nabla}_N \overline{\nabla}_{e_i} X - \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_N X - \overline{\nabla}_{[N,e_i]} X, e_i\rangle.
\end{aligned}$$

Nebenrechnung IV:

$$\begin{aligned}
(a) &\quad -h_{ij}\mathcal{L}_X g(e_i,e_j) = -\langle \overline{\nabla}_{e_i} X, \overline{\nabla}_{e_i} N\rangle - \langle e_i, \overline{\nabla}_{e_j} X\rangle h_{ij}, \\
(b) &\quad \langle \overline{\nabla}_N \overline{\nabla}_{e_i} X, e_i\rangle = \frac{1}{2} N\Big(\mathcal{L}_X g(e_i,e_i)\Big) - \langle \overline{\nabla}_{e_i} X, \overline{\nabla}_N e_i\rangle, \\
(c) &\quad -\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_N X, e_i\rangle - e_i\langle \overline{\nabla}_{e_i} X, N\rangle = -e_i\Big(\mathcal{L}_X g(N,e_i)\Big) + \langle \overline{\nabla}_N X, \overline{\nabla}_{e_i} e_i\rangle, \\
(d) &\quad -\langle \overline{\nabla}_{\overline{\nabla}_N e_i} X, e_i\rangle = -\mathcal{L}_X g(\overline{\nabla}_N e_i, e_i) + \langle \overline{\nabla}_N e_i, \overline{\nabla}_{e_i} X\rangle, \\
(e) &\quad \langle \overline{\nabla}_{\overline{\nabla}_{e_i} N} X, e_i\rangle = \langle \overline{\nabla}_{h_{ij} e_j} X, e_i\rangle = h_{ij}\langle \overline{\nabla}_{e_j} X, e_i\rangle.
\end{aligned}$$

Nebenrechnung V:

$$\begin{aligned}
(a) &\quad \frac{1}{2} N\Big(\mathcal{L}_X g(e_i,e_i)\Big) = \frac{1}{2}\overline{\nabla}_N (\mathcal{L}_X) g(e_i,e_i) + \frac{1}{2} 2\mathcal{L}_X g(\overline{\nabla}_N e_i, e_i), \\
(b) &\quad \langle \overline{\nabla}_N X, \overline{\nabla}_{e_i} e_i\rangle = H\langle \overline{\nabla}_N X, N\rangle = \frac{1}{2} H \mathcal{L}_X g(N,N), \\
(c) &\quad -e_i\Big(\mathcal{L}_X g(N,e_i)\Big) = -\overline{\nabla}_{e_i} \mathcal{L}_X g(N,e_i) - \mathcal{L}_X g(\overline{\nabla}_{e_i} N, e_i) - \mathcal{L}_X g(N, \overline{\nabla}_{e_i} e_i).
\end{aligned}$$

Nebenrechnung VI:

$$\begin{array}{ll} (a) & -\mathcal{L}_X g(\overline{\nabla}_{e_i} N, e_i) = -\mathcal{L}_X g(h_{ij} e_j, e_i), \\ (b) & -\mathcal{L}_X g(N, \overline{\nabla}_{e_i} e_i) = -H \mathcal{L}_X g(N, N). \end{array}$$

Setze $X := T$ und (A.2) folgt. $\square$

Literatur

[BR1] R. Bartnik,
Existence of maximal surfaces in asymptotically flat spacetimes,
Communications on Mathematical Physics 94, S.155-175 (1984)

[BR2] R. Bartnik,
Remarks on cosmological spacetimes and constant mean curvature surfaces,
Communications on Mathematical Physics 117, S.615-624 (1988)

[CB] Y. Choquet-Bruhat,
Maximal submanifolds and submanifolds with constant mean extrinsic curvature of a Lorentzian manifold,
Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie IV,
Volume 3, S.361-376 (1976)

[CY] S.-Y. Cheng, S.-T. Yau,
Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces,
Annals of Mathematics 104, S.407-419 (1976)

[EH1] K. Ecker, G. Huisken,
Parabolic methods for the construction of spacelike slices of prescribed mean curvature in cosmological spacetimes,
Communications on Mathematical Physics 35, S.595-613 (1991)

[EH2] K. Ecker, G. Huisken,
Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature,
Inventiones mathematicae 105, S.547-569 (1991)

[FM] A. Fischer, J. Marsden,
Topics in the dynamics of General Relativity, in isolated gravitating systems in General Relativity,
Italian Physics Society, S.322-395 (1979)

[GC1] C. Gerhardt,
H-surfaces in Lorentzian manifolds,
Communications on Mathematical Physics 89, S.523-553 (1983)

[GC2] C. Gerhardt,
Flow of nonconvex hypersurfaces into spheres,
Journal of Differential Geometry 32, S.299-314 (1990)

[H1] G. Huisken,
Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres,
Journal of Differential Geometry 10, S.237-266 (1984)

[H2] G. Huisken,
Contracting convex hypersurfaces in Riemannian manifolds by their mean curvature,
Inventiones mathematicae 84, S.463-480 (1986)

[H3] G. Huisken,
Deforming hypersurfaces of the sphere by their mean curvature,
Mathematische Zeitschrift 195, S.205-219 (1987)

[H4] G. Huisken,
The volume preserving mean curvature flow,
Journal für Reine und Angewandte Mathematik, 382, S.35-48 (1987)

[HA1] R.S. Hamilton,
Three-manifolds with positive Ricci curvature,
Journal of Differential Geometry 17, S.255-306 (1982)

[HA2] R.S. Hamilton,
Four-manifolds with positive curvature operator,
Journal of Differential Geometry 24, S.153-179 (1986)

[HA3] R.S. Hamilton,
Lecture notes, Hawaii (1989)

[HE] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis,
The large scale structure of space-time,
Cambridge Monographs On Mathematical Physics,
Cambridge University Press (1973)

[KN] N.V. Krylov,
Nonlinear elliptic and parabolic equations of the second order,
D. Reidel Publishing Company (1987)

[LU] O.A. Ladyshenzkaya, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva,
Linear and quasilinear equations of parabolic type,
Translations of Mathematical Monographs, Band 23,
American Mathematical Society, Rhode Island (1968)

[NS] S. Nishikawa,
On maximal space-like hypersurfaces in a Lorentzian manifold,
Nagoya Mathematical Journal 95, S.117-124 (1984)

[ON] B. O'Neill,
Semi-Riemannian goemetry with applications to relativity,
Pure and Applied Mathematics, Academic Press, (1983)

[SA] A. Stahl,
Über den mittleren Krümmungsfluß mit Neumannrandwerten auf glatten Hyperflächen,
Dissertation an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen (1994)

[SSY] R. Schoen, L. Simon, S.-T. Yau,
Curvature estimates for minimal hypersurfaces,
Acta Mathematica 134, S.275-288 (1975)

[U1] J.I.E. Urbas,
An expansion of convex hypersurfaces,
Journal of Differential Geometry 33, S.91-125 (1991)

[U2] J.I.E. Urbas,
On the expansion of starshaped hypersurfaces by symmetric functions of their principal curvatures,
Mathematische Zeitschrift 205, S.355-372 (1990)