Geometrische Evolutionsgleichungen in Kosmologischen Raumzeiten

DISSERTATION

der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von

Michael Holder

aus Kirchheim unter Teck

betreut von

Prof. Dr. G. Huisken

im Juni 1999

Tag der mündlichen Qualifikation: 9. September 1999

Dekan: Prof. Dr. Wilhelm Kaup

1.Berichterstatter: Prof. Dr. Gerhard Huisken
2.Berichterstatter: Prof. Dr. Helmut Kaul

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Geometrische Evolutionsgleichungen **7**
2.1 Notation . . . 7
2.2 Grundlagen . . . 9
2.3 Bemerkungen zur Kurzzeitexistenz . . . 12
2.4 Evolutionsgleichungen . . . 14
2.5 Resultate und Einschränkungen . . . 17

3 Inverser mittlerer Krümmungsfluß **19**
3.1 Evolutionsgleichungen . . . 21
3.2 A priori Schranken . . . 22
3.3 Langzeitexistenz . . . 27
3.4 Robertson-Walker Raumzeiten . . . 30

4 Mittlerer Krümmungsfluß **33**
4.1 Evolutionsgleichungen . . . 34
4.2 Allgemeine Abschätzungen . . . 36
4.3 "Gleichm. unendlich expandierende" Raumzeiten . . . 38
4.4 Robertson-Walker Raumzeiten . . . 41

5 Mittlerer Krümmungsfluß in de Sitter **43**
5.1 Spezielle Evolutionsgleichungen . . . 43
5.2 A priori Schranken . . . 44
5.3 Langzeitexistenz und Konvergenz . . . 46

Kapitel 1

Einleitung

Die Allgemeine Relativitätstheorie modelliert gewisse Aspekte des physikalischen Universums durch Raumzeiten. Raumzeiten sind zeitorientierte, zusammenhängende Lorentzmannigfaltigkeiten (oft 4-dimensional).

Für isolierte Systeme in der Allgemeinen Relativitätstheorie (z.B. ein Stern) steht das Modell der asymptotisch flachen Raumzeiten. Eine solche Raumzeit nähert sich, weit entfernt vom System, dem Minkowskiraum (spezielle Relativitätstheorie). Im Gegensatz hierzu sind die Kosmologischen Raumzeiten Modelle, in denen man das ganze „Universum" im „Großen" betrachten will. Unter einer Kosmologischen Raumzeit versteht man eine Raumzeit $\mathcal{V}$, die eine globale Cauchyfläche enthält, d.h. man kann eine Kosmologische Raumzeit wie folgt schreiben: $\mathcal{V} = \Sigma^n \times I$, wobei Σ^n eine kompakte Cauchyfläche und I ein Intervall ist. Eine Cauchyfläche ist eine raumartige Hyperfläche, die von keiner nicht raumartigen Kurve mehr als einmal geschnitten wird.

Wir betrachten hier in dieser Arbeit Kosmologische Raumzeiten, die ausdrücklich eine Anfangs- bzw. Endsingularität zulassen. In der Physik wird die Anfangssingularität meist als „*big bang*" und die Endsingularität als „*big crunch*" bezeichnet. Wir nehmen meist noch an, daß die zeitartige Konvergenzbedingung erfüllt ist, das heißt es gilt

$$\overline{Ric}(X,X) \geq 0 \text{ für alle zeitartigen Vektorfelder } X. \tag{1.1}$$

Man versucht solche Mannigfaltigkeiten besser zu verstehen, in dem man Blätterungen in ihnen findet. *Gerhardt* zeigte in [Ger83], daß in einer Kosmologischen Raumzeit, in der die zeitartige Konvergenzbedingung erfüllt ist, eine Blätterung mit Hyperflächen konstanter mittlerer Krümmung und mindestens eine Maximalfläche existieren. Hierzu benötigte er die Existenz einer Anfangssingularität und einer Endsingularität, die von Flächen beliebig großer bzw. kleiner mittlerer Krümmung umschlossen werden. *Bartnik* löste in [Bar84] das korrespondierende Problem für asymptotisch flache Raumzeiten. Beide Arbeiten haben jedoch den Nachteil, daß die Existenzbeweise nicht konstruktiv sind, da sie auf topologischen Fixpunkttheoremen beruhen.

Diesen Nachteil beseitigten *Ecker* und *Huisken* in [EH91], indem sie den zugehörigen *mittleren Krümmungsfluß* betrachteten. Sie erhielten raumartige Hyperflächen mit vorgeschriebener mittlerer Krümmung $\mathcal{H}$ in Kosmologischen Raumzeiten, die der zeitartigen Konvergenzbedingung genügen, als asymptotischen Grenzwert der Geometrischen Evolutionsgleichung $\frac{d}{ds}F = (H - \mathcal{H})\nu$. Das heißt, sie gaben einen alternativen, konstruktiven Beweis für die Existenz von Maximalflächen und Flächen konstanter mittlerer Krümmung an. Auch sie mußten die Existenz von Barrieren annehmen, d.h. Flächen mit strikt größerer und strikt kleinerer mittlerer Krümmung als $\mathcal{H}$.

In dieser Arbeit untersuchen wir beliebige Geometrische Evolutionsgleichungen in Kosmologischen Raumzeiten:

Sei M_0 eine glatte, orientierbare, kompakte, raumartige Hyperfläche in einer Kosmologischen Raumzeit $\mathcal{V}$. Wir nehmen an, daß M_0 gegeben ist durch eine Immersion

$$F_0 : M^n \to \mathcal{V}.$$

Definition 1.1. Eine Geometrische Evolutionsgleichung ist eine Familie glatter Immersionen $F_s = F(\cdot, s) : M^n \to \mathcal{V}, s \in [0, Z)$, die der folgenden Gleichung genügt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}F(p,s) &= \left(f\left(\lambda\left(\mathfrak{W}\right)\right)\nu\right)(p,s), \\ & \qquad\qquad p \in M^n, \quad s \geq 0, \\ F(p,0) &= F_0(p). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Wobei $\nu(p, s)$ die zukunftsgerichtete Einheitsnormale auf $M_s := F(\cdot, s)(M^n)$ an der Stelle $F(p, s)$ ist und f eine konvexe Funktion in den Eigenwerten der Weingartenabbildung $\mathfrak{W}$ auf M_s ist.

Geometrische Evolutionsgleichungen wurden ausführlich im Falle eines Riemannschen Umgebungsraumes studiert. Insbesondere sei hier auf die Arbeit von Huisken und Polden [HP96] verwiesen, die in ihrer Arbeit Ergebnisse für eine große Klasse von Geometrischen Evolutionsgleichungen vorstellen.

Huisken betrachtete in [Hui84, Hui86] den sogenannten *inward flow* oder auch kontrahierenden Fluß entlang der mittleren Krümmung, $\frac{d}{ds}F = -H\nu$, also einen Fluß der zur Singularität hin deformiert. Er konnte zum Beispiel zeigen, daß konvexe Hyperflächen in lokal symmetrischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit nicht-negativer Schnittkrümmung, nach geeigneter Reskalierung, gegen eine runde Sphäre konvergieren. Für Flächen, die als Graph geschrieben werden können, erhielten Ecker und Huisken [EH89, EH91] für diesen Fluß Regularität und Langzeitexistenz.

Der kontrahierende Fluß entlang der Gauß Krümmung $\frac{d}{ds}F = -K\nu$ wurde von Firey [Fir74] als Modell für die Abnutzung von Steinen am Strand durch Wellen vorgestellt, Tso [Tso85] konnte dann im Euklidischen Umgebungsraum die Existenz einer eindeutigen Lösung auf einem maximalen Zeitintervall und Konvergenz zu einem Punkt beweisen. Mit einer Kombination der Methoden von Huisken und Tso konnte Chow [Cho85, Cho87] analoge Ergebnisse für Potenzen der Gaußkrümmung und die Wurzel der skalaren Krümmung beweisen.

Für eine große Klasse von geometrischen Flüssen, die die harmonische mittlere Krümmung $f = -\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\right)^{-1}$ einschließen, konnte Andrews [And94] Konvergenz von konvexen Hyperflächen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten zu runden Sphären beweisen. Dieses Ergebnis liefert insbesondere einen eleganten Beweis für das "1/4-pinching theorem".

Der Fluß entlang der Inversen mittleren Krümmung spielte eine wichtige Rolle beim Beweis der „Riemannschen Penrose Ungleichung" [HI97, HI98]. Für diesen Fluß, den sogenannten *outward flow*, wurde von *Gerhardt* [Ger90] und *Urbas* [Urb90], in unabhängig voneinander entstandenen Arbeiten, Existenz und exponentielle Konvergenz der reskalierten Flächen zu runden Sphären unter der Annahme bewiesen, daß die Anfangsfläche eine kompakte, sternförmige $C^{2,\alpha}$-Hyperfläche im $\mathbb{R}^{n+1}$ ist (Urbas Arbeit schließt eine Reihe von weiteren Flüssen ein).

Im folgenden Kapitel beschäftigen wir uns mit Geometrischen Evolutionsgleichungen in Kosmologischen Raumzeiten im allgemeinen. Da wir hier ein physikalisches Modell betrachten, wollen wir insbesondere darauf eingehen, welche Bedingungen aus Sicht der Allgemeinen Relativitätstheorie als sinnvoll angesehen werden können, und warum wir uns deshalb auf den Inversen mittleren Krümmungsfluß und den mittleren Krümmungsfluß beschränken wollen.

In Kapitel 3 beschäftigen wir uns mit dem Fluß entlang der Inversen der mittleren Krümmung [Hol96]. Bei diesem Fluß ist die Geschwindigkeit f in (1.2) gerade das Negative des Inversen der mittleren Krümmung. Dieser Fluß hat im Gegensatz zum mittleren Krümmungsfluß, der die Eigenschaft hat Hyperflächen zu einer Maximalfläche hin zu expandieren, die Eigenschaft Hyperflächen von der Maximalfläche weg und zu der Anfangssingularität hin zu deformieren, also die Hyperfläche zu kontrahieren. Im folgenden bezeichnen wir diesen Fluß als *Inversen mittleren Krümmungsfluß*.

In [Hol96] konnte die Existenz für den Inversen mittleren Krümmungsfluß nur gezeigt werden, solange er in einer glatten und kompakten Teilmenge der Raumzeit $\mathcal{V}$ enthalten bleibt.

Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen an die Raumzeit wir für den Inversen mittleren Krümmungsfluß Existenz für alle Zeiten erhalten. Dies führt uns zur Definition einer *"natürlich geblätterten"* Raumzeit. Beispiele für solche Raumzeiten sind die Modelle für Staub und Hintergrundstrahlung, wie auch das Kasner und Mixmaster Universum. Wir zeigen, daß in einer solchen Raumzeit der Inverse mittlere Krümmungsfluß für alle Zeiten existiert und gegen die Anfangsingularität konvergiert.

Schließlich untersuchen wir den Inversen mittleren Krümmungsfluß noch in speziellen "natürlich geblätterten" kosmologischen Modellen, den Robertson-Walker Raumzeiten; hier betrachten wir insbesondere das Modell für Staub (nicht wechselwirkende Materie), das sogenannte Friedmann Modell.

Im vierten Kapitel beschäftigen wir uns mit dem mittleren Krümmungsfluß. Wir erweitern das Ergebnis aus [EH91] für Kosmologische Raumzeiten $\mathcal{V}$, die keine Barriere für den mittleren Krümmungsfluß haben, den sogenannten *"unendlich expandierenden"* Raumzeiten. Um auch in diesen Raumzeiten Langzeitexistenz zu erhalten, ist es notwendig zusätzliche Annahmen an die Raumzeit zu machen. Es stellt sich heraus, daß die in Kapitel 3 eingeführten "natürlich geblätterten" Raumzeiten ein geeignetes Modell sind, um Langzeitexistenz zu beweisen. Unter etwas stärkeren Bedingungen an die "natürliche Blätterung" können wir sogar Konvergenz zur "natürlichen Blätterung" beweisen. Dann untersuchen wir den mittleren Krümmungsfluß wiederum in Robertson-Walker Raumzeiten und insbesondere im Friedmann Modell, in dem die stärkeren Bedingungen an die "natürliche Blätterung" erfüllt sind.

Im letzten Kapitel untersuchen wir den mittleren Krümmungsfluß in der *de Sitter* Raumzeit, einer Raumzeit mit konstanter positiver Krümmung. Die zeitartige Konvergenzbedingung wird somit nicht erfüllt und sie enthält wiederum keine Barrieren für den mittleren Krümmungsfluß. Aufgrund der speziellen Struktur dieser Raumzeit, können wir jedoch zusätzlich zur Existenz sogar exponentielle Konvergenz zu runden Sphären beweisen.

Kapitel 2

Geometrische Evolutionsgleichungen in Kosmologischen Raumzeiten

In diesem Kapitel untersuchen wir zunächst die allgemeinen Aspekte der Geometrischen Evolutionsgleichungen (1.2) in Kosmologischen Raumzeiten. Nachdem wir die Notation festgelegt und die wichtigsten fundamentalen Identitäten rekapituliert haben, behandeln wir zunächst die Kurzzeitexistenz. Danach leiten wir die Evolutionsgleichungen für die wichtigsten geometrischen Größen her und untersuchen diese unter dem Aspekt der Allgemeinen Relativitätstheorie. Insbesondere gehen wir auf die notwendigen Bedingungen für Langzeitexistenz und die daraus resultierenden, physikalisch motivierten Einschränkungen für Geometrische Evolutionsgleichungen in Kosmologischen Raumzeiten ein. Es zeigt sich, daß es aus der Sicht der Allgemeinen Relativitätstheorie im allgemeinen nur Sinn macht die Flüsse entlang einer konvexen Funktion der mittleren Krümmung ($\frac{\partial f(H)}{\partial H} > 0$) zu betrachten.

2.1 Notation

Sei $\mathcal{V}$ eine $(n+1)$-dimensionale Raumzeit mit einer Lorentzmetrik $\overline{g} = \{\overline{g}_{\alpha\beta}\}$ der Signatur $(-, +, +, ..., +)$. Wir bezeichnen die zur Metrik gehörende Bilinearform mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$, den kanonischen Zusammenhang mit $\overline{\nabla}$ und den Krümmungstensor mit $\overline{Rm} = \{\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$. Griechische Indizes laufen grundsätzlich von 0 bis n. Wie in [Bar84] nehmen wir die Existenz einer globalen *Zeitfunktion* $t \in C^\infty(\mathcal{V})$ mit einem von Null verschiedenen, vergangenheitsorientierten, zeitartigen Vektorfeld $\overline{\nabla}t$ an. Die Referenzblätter $\mathcal{S}_{\mathrm{t}} := \{p \in$

$\mathcal{V} \mid t(p) = \mathrm{t}\}$ haben einen zukunftsorientierten Einheitsnormalenvektor

$$T = -\psi \overline{\nabla} t,$$

wobei die *lapse Funktion* $\psi \in C^\infty(\mathcal{V})$ definiert ist durch

$$\psi^{\ -2} := -\langle \overline{\nabla} t, \overline{\nabla} t \rangle.$$

Wir bezeichnen ein angepaßtes Orthonormalsystem auf $\mathcal{S}_{\mathrm{t}}$ durch $e_0, e_1, \ldots, e_n$ so, daß $e_0{=}T$. Dieses Orthonormalsystem definiert in natürlicher Weise eine Norm $\| \cdot \|_\infty$ auf Tensoren von $\mathcal{V}$, siehe [Bar84] für weitere Details.

Sei M eine glatte, raumartige Hyperfläche in $\mathcal{V}$, die eingebettet ist durch eine Abbildung

$$F : M^n \to \mathcal{V}.$$

Sei ν der zukunftsorientierte, zeitartige Einheitsnormalenvektor und wähle lokal ein angepaßtes Orthonormalsystem $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n$ in $\mathcal{V}$ so, daß eingeschränkt auf M, $\tau_0 = \nu$ gilt. Wir bezeichnen mit $g = \{g_{ij}\}$ und $Rm = \{R_{ijkl}\}$ die induzierte Metrik, beziehungsweise den Riemannschen Krümmungstensor auf M. Lateinische Indizes laufen immer von 1 bis n. Desweiteren steht ∇ für die kovariante Ableitung und Δ für den Laplace-Beltrami Operator auf M bezüglich der Metrik g. Die zweite Fundamentalform $A = \{h_{ij}\}$ auf M ist gegeben durch

$$h_{ij} := \langle \overline{\nabla}_{\tau_i} \nu, \tau_j \rangle = -\langle \nu, \overline{\nabla}_{\tau_i} \tau_j \rangle.$$

Gleichheit gilt, weil $\overline{\nabla}_{\tau_i} \langle \nu, \tau_j \rangle = 0$ (da $\langle \nu, \tau_j \rangle = 0$).

Bemerkungen 2.1. (1) Wir werden des öfteren Rechnungen an einem Punkt $p_0 \in M$ durchführen. Wenn nun $\{x_i\}$ ein Koordinatensystem von M und $\{y_\alpha\}$ ein Koordinatensystem von $\mathcal{V}$ ist, so können diese Koordinatensysteme so gewählt werden, daß $\Gamma_{ij}^k(p_0) \equiv 0$, $\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk}(p_0) \equiv 0$, $\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma(p_0) \equiv 0$ und $\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \overline{g}_{\alpha\beta}(p_0) \equiv 0$ (Normalkoordinaten) ist. Hierbei bezeichnen Γ_{ij}^k und $\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ die Christoffelsymbole auf M beziehungsweise $\mathcal{V}$. Man kann sogar $\{y_\alpha\}$ so wählen, daß $\frac{\partial F^\alpha}{\partial x_i}(p_0) = \delta_i^\alpha$ gilt.
Das Koordinatensystem $\{x_i\}$ können wir auch so wählen, daß $h_{ij}(p_0)$ Diagonalform hat oder $g_{ij}(p_0) = \delta_{ij}$ gilt.

(2) Tensoridentitäten sind unabhängig vom Koordinatensystem. Wenn wir also durch Rechnung in einem speziellen Koordinatensystem eine Tensoridentität erhalten, so gilt diese in jedem Koordinatensystem.

Wie in [Hui84, EH91] summieren wir über zwei sich wiederholende Indizes.

$$\begin{aligned} H &:= h_i^i = h_{ij} g^{ij}, \\ |A|^2 &:= h_{ij} h^{ij} = h_{ij} h_{kl} g^{ik} g^{jl}. \end{aligned}$$

Bei Rechnungen die wir punktweise ausführen, können wir annehmen, daß $g_{ij} = \delta_{ij}$, wobei δ das Kronneckerdelta bezeichnet und unterscheiden dann gelegentlich nicht mehr zwischen kovarianten und kontravarianten Indizes. Wir schreiben dann zum Beispiel h_{ii} für die mittlere Krümmung H.

Der Riemannsche Krümmungstensor $Rm = \{R_{ijkl}\}$, die Ricci Krümmung $Ric = \{R_{ij}\}$ und die skalare Krümmung R auf M sind durch die Gauß Gleichung gegeben:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \overline{R}_{ijkl} - h_{ik} h_{jl} + h_{il} h_{jk}, \\ \text{Kontraktion} \;\Rightarrow\; R_{ik} &= \overline{R}_{ik} - H h_{ik} + h_{il} h_{lk} + \overline{R}_{i0k0}, \\ \text{Kontraktion} \;\Rightarrow\; R &= \overline{R} - H^2 + |A|^2 + 2\overline{R}ic(\nu,\nu). \end{aligned}$$

Die Codazzi Gleichung lautet:

$$\nabla_i h_{jk} - \nabla_k h_{ij} = \overline{R}_{0jki}.$$

Es gelten folgende Regeln für das Vertauschen von kovarianten Ableitungen:

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_j Y_k - \nabla_j \nabla_i Y_k &= R_{ijkl} Y_l, \\ \nabla_i \nabla_j T_{kl} - \nabla_j \nabla_i T_{kl} &= R_{ijls} T_{ks} + R_{ijks} T_{sl}. \end{aligned}$$

Da $\overline{R}_{ijkl} = \langle \overline{R}(\tau_k, \tau_l)\tau_j, \tau_i \rangle$ und $R_{00ik} = 0$ (wegen Antisymmetrie) ist, erhalten wir noch die folgende Beziehung:

$$\overline{\nabla}_l \overline{R}_{0ijk} = \nabla_l \overline{R}_{0ijk} - \overline{R}_{0i0k} h_{jl} - \overline{R}_{0ij0} h_{kl} - \overline{R}_{mijk} h_{ml}.$$

2.2 Grundlagen

Aus diesen Gleichungen erhalten wir die Kommutatorgleichung für die zweiten Ableitungen der zweiten Fundamentalform, die sogenannte "Simons Identität" [Sim68, SSY75, CY76].

Theorem 2.2. *Es gilt:*

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_l h_{ij} = \; & \nabla_i \nabla_j h_{kl} + \overline{\nabla}_i \overline{R}_{0ljk} + \overline{\nabla}_k \overline{R}_{0jil} - h_{kl} \overline{R}_{0ji0} \\ & + h_{ij} \overline{R}_{0l0k} + h_{mj} \overline{R}_{kilm} + h_{ml} \overline{R}_{kijm} \\ & + h_{km} \overline{R}_{mjil} + h_{ik} \overline{R}_{0j0l} \\ & + h_{km} h_{il} h_{mj} - h_{kl} h_{im} h_{mj} + h_{km} h_{ij} h_{ml} - h_{kj} h_{im} h_{ml}. \end{aligned}$$

Beweis. Mit der Codazzi Gleichung erhalten wir zunächst:

$$\nabla_k \nabla_l h_{ij} = \nabla_k \left(\nabla_i h_{lj} + \overline{R}_{0jil}\right).$$

Einsetzen der Gleichung für $\nabla_k \overline{R}_{0jil}$ von oben und kommutieren von ∇_i und ∇_k auf der rechten Seite, ergibt:

$$\begin{aligned}\nabla_k \nabla_l h_{ij} &= \nabla_i \nabla_k h_{lj} + R_{kilm}h_{mj} + R_{kijm}h_{ml} \\ &\quad + \overline{\nabla}_k \overline{R}_{0jil} + \overline{R}_{mjil}h_{km} - \overline{R}_{0j0l}h_{ik} - \overline{R}_{0ji0}h_{lk}.\end{aligned}$$

Nochmaliges verwenden der Codazzi Gleichung gibt:

$$\begin{aligned}&\nabla_i \nabla_k h_{li} = \nabla_i \left(\nabla_j h_{kl} + \overline{R}_{0ljk}\right) \\ &= \nabla_i \nabla_j h_{kl} + \overline{\nabla}_i \overline{R}_{0ljk} + \overline{R}_{mljk}h_{im} - \overline{R}_{0l0k}h_{ij} - \overline{R}_{0lj0}h_{ik}.\end{aligned}$$

Und wir erhalten die Behauptung schließlich durch anwenden der Gauß Gleichung. □

Die Spur dieser Identitäten ist wichtig für den mittleren Krümmungsfluß und den Inversen mittleren Krümmungsfluß.

Korollar 2.3.

$$\begin{aligned}(i)\Delta h_{ij} &= \nabla_i \nabla_j H + \overline{\nabla}_i \overline{R}_{0kjk} + \overline{\nabla}_k \overline{R}_{0jik} - H\overline{R}_{0ji0} \\ &\quad + h_{ij}\overline{R}_{00} + h_{mj}\overline{R}_{kikm} + h_{mk}\overline{R}_{kijm} \\ &\quad + h_{km}\overline{R}_{mjik} + h_{ik}\overline{R}_{0j0k} \\ &\quad - H h_{im}h_{mj} + |A|^2 h_{ij}, \\ (ii)\frac{1}{2}\Delta|A|^2 &= h_{ij}\nabla_i \nabla_j H + \overline{\nabla}_j \overline{R}_{0kik}h_{ij} + \overline{\nabla}_k \overline{R}_{0ijk}h_{ij} + H\overline{R}_{0ij0}h_{ij} \\ &\quad + |A|^2(\overline{R}ic(\nu,\nu) + |A|^2) + h_{il}h_{ij}\overline{R}_{lkjk} + h_{lj}h_{ij}\overline{R}_{lkik} \\ &\quad + 2h_{lk}h_{ij}\overline{R}_{lijk} - H h_{ik}h_{kj}h_{ij} + |\nabla A|^2.\end{aligned}$$

Beweis. (i) folgt direkt durch Spurbildung und da

$$\begin{aligned}\Delta|A|^2 &= \nabla_k \nabla_k (h_{ij}h_{ij}) = \nabla_k (\nabla_k h_{ij} \cdot h_{ij} + h_{ij} \cdot \nabla_k h_{ij}) \\ &= \nabla_k 2(\nabla_k h_{ij} \cdot h_{ij}) = 2(\nabla_k \nabla_k h_{ij} \cdot h_{ij} + 2(\nabla_k h_{ij} \cdot \nabla_k h_{ij}) \\ \Rightarrow \frac{1}{2}\Delta|A|^2 &= \Delta h_{ij} \cdot h_{ij} + |\nabla A|^2,\end{aligned}$$

folgt (ii) aus dem vorigen Theorem. □

Die a priori Abschätzungen werden ausgedrückt in Termen der *Höhenfunktion* u, die gegeben ist durch

$$u(p) := t\big(F(p)\big)$$

und der *Gradientenfunktion* v, die den Winkel zwischen M und der Referenzfläche $\mathcal{S}_t$ mißt und durch

$$v := -\langle \nu, T\rangle$$

gegeben ist.

Wie in [Bar84, 2.8] erhalten wir die Identität

$$\Delta u = \mathrm{div}_M \overline{\nabla} t + \psi^{-1} v H. \tag{2.1}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \nabla u &= \nabla t = (\overline{\nabla} t)^T = \overline{\nabla} t + \langle \overline{\nabla} t, \nu\rangle \nu = \overline{\nabla} t + \psi^{-1} v \nu \\ \Rightarrow \Delta u &= \mathrm{div}_M(\nabla u) = \mathrm{div}_M \overline{\nabla} t + \mathrm{div}_M(\psi^{-1} v \nu) = \mathrm{div}_M \overline{\nabla} t + \psi^{-1} v H, \end{aligned}$$

da $\mathrm{div}_M\ \nu = H$ ist. Zu beachten: „a^T" bezeichnet die Projektion des Vektors a auf den Tangentialraum von M, d.h. $a^T := a + \langle a, \nu\rangle \nu$ □

Des weiteren gilt noch folgende Ungleichung:

$$\langle \tau_\alpha, e_\beta\rangle \le v$$

für alle $0 \le \alpha, \beta \le n$. Somit können wir die Einschränkung jedes p-Tensors $B \in T^p(\mathcal{V})$ auf TM abschätzen durch

$$\|B|_{TM}\|_\infty \le v^p \|B\|_\infty. \tag{2.2}$$

Für einen Tensor B bezeichnen wir mit $\|B\|_{l,G}$ die C^l-Norm von B auf dem Gebiet $G \subset \mathcal{V}$.
Ab und zu benötigen wir noch die folgende, elementare Ungleichung für reelle Zahlen a, b:

$$ab \le \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2. \tag{2.3}$$

Lemma 2.4 (Erste Variationsformel für H). *Wir haben*

$$\Delta\langle \nu, T\rangle = \langle \nu, T\rangle \big(|A^2| + \overline{R}ic(\nu,\nu)\big) + \langle T, \nabla H\rangle - T(H_T). \tag{2.4}$$

Wobei $T(H_T)$ die Variation der mittleren Krümmung von M unter dem Deformationsvektorfeld T ist. Diese kann man auch in Termen des Killing Tensors $\mathcal{L}_T g(X,Y) = \langle \nabla_X T, Y\rangle + \langle \nabla_Y T, X\rangle$ schreiben:

$$\begin{aligned} T(H_T) &= \frac{1}{2}(\overline{\nabla}_\nu \mathcal{L}_T g)(e_i,e_i) - (\overline{\nabla}_{e_i} \mathcal{L}_T g)(\nu, e_i) - \frac{1}{2} H \mathcal{L}_T g(\nu,\nu) \\ &\quad - \mathcal{L}_T g(e_i,e_j) A(e_i,e_j). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Beweis. Siehe [Bar84, CB76, FM79]. □

2.3 Bemerkungen zur Kurzzeitexistenz

Kurzzeitexistenz kann man im allgemeinen nur erwarten, wenn das System (1.2) parabolisch ist. Aufgrund der Symmetrie von f können wir in äquivalenter Weise von einer Funktion $\tilde{f}(\mathfrak{W})$ der Weingartenabbildung oder einer Funktion $\hat{f}(A)$ der zweiten Fundamentalform ausgehen:

$$\tilde{f}(\mathfrak{W}) = \tilde{f}(\{h^i_j\}) = \hat{f}(A) = \hat{f}(\{h_{ij}\}) = f(\lambda(\mathfrak{W})) = f(\lambda_1(\mathfrak{W}), ..., \lambda_n(\mathfrak{W})).$$

Aus Sicht der Weingartengleichung ist die Linearisierung von 1.2 eine Gleichung der Form

$$\frac{d}{ds} G = -\frac{\partial \hat{f}}{\partial h_{ij}} g^{ik} g^{jl} \langle \frac{\partial^2 G}{\partial x_k \partial x_l}, \nu\rangle \nu + \text{niedrige Ordnung}.$$

Somit ist

$$\sigma^\alpha_\beta(\xi) = -\frac{\partial \hat{f}}{\partial h_{ij}} \xi^i \xi^j \nu^\alpha \nu_\beta$$

immer degeneriert in tangentielle Richtungen, was die Invarianz der ursprünglichen Gleichung unter tangentiellen Diffeomorphismen widerspiegelt. $\sigma^\alpha_\beta(\xi)$ ist strikt positiv definit in Normalenrichtung, wenn

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \hat{f}}{\partial h_{ij}}(p)\xi^i\xi^j > 0, \quad \forall\, 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n, p \in M^n \quad \text{oder äquivalent} \\ &\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}(p) > 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n, p \in M^n. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Der Vorzeichenunterschied zum Riemannschen Fall (siehe zum Beispiel [HP96]) kommt von der negativen Definitheit der Metrik für zeitartige Vektoren und der Tatsache, daß die Normale an eine raumartige Hyperfläche in einer Lorentzmannigfaltigkeit zeitartig ist.

Das Problem der Degeneriertheit in tangentielle Richtungen, kann man auf unterschiedliche Arten umgehen, siehe wiederum [HP96]. Eine Möglichkeit besteht darin, daß man ein zur Anfangsfläche transversales Vektorfeld wählt, um somit die Eichfreiheit der Gleichung (1.2) zu brechen. Man erhält so, falls (2.6) gilt, eine skalare, gleichmäßig parabolische, partielle Differentialgleichung. Eine Lösung dieser skalaren Gleichung ist, bis auf einen tangentiellen Diffeomorphismus, äquivalent zu einer Lösung von (1.2). Diese Vorgehensweise wurde ursprünglich von DeTurk [DeT83] auf den Ricci Fluß angewendet. Für die Anwendung auf die Evolution von Hyperflächen geht diese Methode zurück auf Hamilton [Ham89]. Zusammengefaßt ergibt sich (ohne Beweis):

Theorem 2.5. *Sei $F_0 : M^n \to (\mathcal{V}, \bar{g})$ eine glatte kompakte raumartige Hyperfläche, so daß*

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}(p) > 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$

überall auf $F_0(M^n)$ gilt, dann hat (1.2) eine glatte Lösung auf einem kleinen Zeitintervall $[0, s_0)$.

Beispiele 2.6. i) Im Fall des mittleren Krümmungsflusses, $f = H$, sowie für den Fall des Flusses mit vorgeschriebener mittlerer Krümmung $f = H - \mathcal{H}$, haben wir $\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} = 1$ und erhalten Kurzzeitexistenz für glatte Anfangsflächen.
ii) Für den Fluß entlang der Inversen der mittleren Krümmung, $f = -\frac{1}{H}$ gilt $\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{H^2}$ und wir erhalten Kurzzeitexistenz für glatte Anfangsflächen mit positiver mittlerer Krümmung $H > 0$.
iii) Allgemeiner erfüllen die elementarsymmetrischen Funktionen $f = S_m, 1 \leq m \leq n$ die Bedingung $\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} > 0$ auf dem konvexen Kegel $\Gamma_m = \{\lambda \in \mathbb{R}^n | S_l(\lambda) > 0, 0 \leq l \leq m\}$ und wir erhalten Kurzzeitexistenz für entsprechende Anfangsflächen. Die mittlere Krümmung ist in diesem Zusammenhang gerade S_1 und die Gauß Krümmung S_n.
iv) Die Quotienten $Q_{k,l} = \frac{S_k}{S_l}, 1 \leq l > k \leq n$ erfüllen $\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} > 0$ wiederum auf Γ_k, und wir erhalten Kurzzeitexistenz für entsprechende Anfangsflächen. Ein Beispiel für einen solchen Quotienten ist die harmonische mittlere Krümmung $\tilde{H} = \frac{S_n}{S_{n-1}}$.

Bemerkung 2.7. Um überhaupt Langzeitexistenz erwarten zu können muß man notwendigerweise zeigen können, daß (2.6) erhalten und f beschränkt bleibt.

Im folgenden wollen wir in der Klasse von Hyperflächen arbeiten, für die Kurzzeitexistenz garantiert ist.

2.4 Evolutionsgleichungen

Ausgehend von der Evolutionsgleichung

$$\frac{d}{ds}F = \hat{f}(h_{ij})\nu$$

werden wir die Evolutionsgleichungen für die Höhe, den Gradienten, die Krümmung und andere wichtige Größen auf M_s berechnen.

Wir gehen genau wie in [Hui84, EH91, Hol96] vor und berechnen nun zuerst die Ableitungen der Metrik g, des Volumenelementes μ und der Einheitsnormalen ν auf M.

Lemma 2.8. *Wir haben:*

$$(i) \qquad \frac{d}{ds}g_{ij} = 2\hat{f}h_{ij},$$

$$(ii) \qquad \frac{d}{ds}\nu = \nabla\hat{f},$$

$$(iii) \qquad \frac{d}{ds}\mu = H\hat{f}\mu.$$

Beweis. Lokal in einem Punkt berechnen wir in Koordinaten:

$$\begin{aligned}
(i)\frac{d}{ds}g_{ij} &= \frac{d}{ds}\langle\frac{\partial F}{\partial x_i},\frac{\partial F}{\partial x_j}\rangle = 2\hat{f}\langle\frac{\partial}{\partial x_i}\nu,\frac{\partial F}{\partial x_j}\rangle = 2\hat{f}h_{ij},\\
(ii)\frac{d}{ds}\nu &= -\langle\frac{d}{ds}\nu,\nu\rangle\nu + \langle\frac{d}{ds}\nu,\frac{\partial}{\partial x_i}F\rangle\frac{\partial}{\partial x_j}Fg^{ij} = -\langle\nu,\frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial x_i}F\rangle\frac{\partial}{\partial x_j}Fg^{ij}\\
&= -\langle\nu,\nu\rangle\frac{\partial}{\partial x_i}\hat{f}\frac{\partial}{\partial x_j}Fg^{ij} = \nabla\hat{f},\\
(iii)\quad \frac{d}{ds}\mu &= \frac{d}{ds}\sqrt{det(g_{ij})} = \frac{1}{2}\sqrt{det(g_{ij})}g_{ij}2\hat{f}h_{ij} = H\hat{f}\mu.
\end{aligned}$$

□

Für die Höhenfunktion u und die Gradientenfunktion v erhalten wir:

Lemma 2.9 (Die Höhen- und Gradientenfunktion). *Es gilt:*

$$\begin{aligned}
(i) \quad \frac{d}{ds}u &= \hat{f}\psi^{-1}v,\\
(ii) \quad \frac{d}{ds}v &= -\langle T,\nabla\hat{f}\rangle - \hat{f}\langle\overline{\nabla}_\nu T,\nu\rangle.
\end{aligned}$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}u &= \frac{d}{ds}\Big(t\big(F(p)\big)\Big) = \langle\overline{\nabla}t, \frac{d}{ds}F\rangle = \hat{f}\langle\overline{\nabla}t,\nu\rangle = \hat{f}\psi^{-1}v, && (2.7)\\
\frac{d}{ds}v &= -\frac{d}{ds}\big(\langle T,\nu\rangle\big) = -\langle T, \frac{d}{ds}\nu\rangle - \langle\frac{d}{ds}T,\nu\rangle = -\langle T,\nabla\hat{f}\rangle - \langle\overline{\nabla}_{\frac{d}{ds}F}T,\nu\rangle \\
&= -\langle T,\nabla\hat{f}\rangle - \hat{f}\langle\overline{\nabla}_\nu T,\nu\rangle. && (2.8)
\end{aligned}
$$

□

Schließlich erhalten wir für die zweite Fundamentalform und die mit ihr zusammenhängenden Größen das folgende Lemma.

Lemma 2.10 (Die zweite Fundamentalform und Folgerungen). *Es gilt:*

$$
\begin{aligned}
(i) \quad \frac{d}{ds}h_{ij} &= \nabla_i\nabla_j\hat{f} + \hat{f}\left(h_{ik}h^k{}_j - R_{0i0j}\right),\\
(ii) \quad \frac{d}{ds}|A|^2 &= 2h^{ij}\Big(\nabla_i\nabla_j\hat{f} - \hat{f}\left(h_{ik}h^k{}_j + R_{0i0j}\right)\Big),\\
(iii) \quad \frac{d}{ds}H &= \Delta\hat{f} - \hat{f}\big(|A^2| + \overline{R}ic(\nu,\nu)\big),\\
(iv) \quad \frac{d}{ds}h_i^{\,j} &= \nabla_i\nabla^j\hat{f} - \hat{f}\left(h_i^{\,k}h_k^{\,j} - R_{0i}{}^{0j}\right).
\end{aligned}
$$

Beweis. Allgemein gilt (Gauß-Weingarten-Gleichungen):

$$
\begin{aligned}
h_{ij} = \Big(-\frac{\partial^2F^\alpha}{\partial x_i\partial x_j} + \Gamma^k_{ij}\frac{\partial F^\alpha}{\partial x_k} - \overline{\Gamma}^\alpha_{\rho\sigma}\frac{\partial F^\rho}{\partial x_i}\frac{\partial F^\sigma}{\partial x_j}\Big)\nu^\beta\overline{g}_{\alpha\beta},\\
\frac{\partial\nu^\alpha}{\partial x_j} + \overline{\Gamma}^\alpha_{\rho\sigma}\frac{\partial F^\rho}{\partial x_j}\nu^\sigma = h_{jl}g^{lm}\frac{\partial F^\alpha}{\partial x_m}.
\end{aligned}
$$

Wir rechnen wieder lokal in einem Punkt und wählen dort das Koordinatensystem so, daß die $\overline{\Gamma}^\alpha_{\rho\sigma} \equiv 0$ sind, d.h. $\overline{R}_{i00j} = \frac{\partial}{\partial x_0}\overline{\Gamma}^\alpha_{ij}g_{\alpha 0} - \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\Gamma}^\alpha_{j0}g_{0\alpha} + 0$.

Um (i) zu beweisen berechnen wir zuerst $\frac{d}{ds}h_{ij}$.

$$
\frac{d}{ds}h_{ij} = \underbrace{-\Big\langle\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{d}{ds}F,\nu\Big\rangle}_{(a)}\underbrace{-\Big\langle\frac{\partial^2F}{\partial x_i\partial x_j},\frac{d}{ds}\nu\Big\rangle}_{(b)}\underbrace{-\frac{d}{ds}\overline{\Gamma}^\alpha_{\rho\sigma}\frac{\partial F^\rho}{\partial x_i}\frac{\partial F^\sigma}{\partial x_j}\nu^\beta\overline{g}_{\alpha\beta}}_{(c)}.
$$

$$
\begin{aligned}
(a) &= -\Big\langle \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\hat{f}\nu), \nu \Big\rangle \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\hat{f} - \hat{f}\Big\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(h_{jl} g^{lm} \frac{\partial F}{\partial x_m}\Big), \nu \Big\rangle + \hat{f}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\rho\sigma}\frac{\partial F^{\rho}}{\partial x_j}\nu^{\sigma}\nu^{\beta}\overline{g}_{\alpha\beta}\Big) \\
&= \nabla_i \nabla_j \hat{f} - \hat{f} h_{jl} h_{li} + \hat{f}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\Gamma}^{\alpha}_{j0}\overline{g}_{0\alpha}}_{\alpha}. \\
(b) &= 0 + h_{ij}\nu^{\beta}\frac{\partial F^{\alpha}}{\partial x_m}\overline{g}_{\alpha\beta} g^{lm}\frac{\partial}{\partial x_l}\hat{f} = 0, \qquad\qquad da\ \langle \nu, \tau_m \rangle = 0. \\
(c) &= -\hat{f}\overline{\nabla}_{\nu}\Big(\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\rho\sigma}\frac{\partial F^{\rho}}{\partial x_i}\frac{\partial F^{\sigma}}{\partial x_j}\nu^{\beta}\overline{g}_{\alpha\beta}\Big) = -\hat{f}\frac{\partial}{\partial x_0}\overline{\Gamma}^{\alpha}_{ij} g_{\alpha 0}\ (\beta).
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich insgesamt

$$
(a) + (b) + (c) = \nabla_i \nabla_j \hat{f} + \hat{f}\big(h_{il}h_{lj} + \underbrace{\overline{R}_{i00j}}_{(\alpha)+(\beta)}\big).
$$

Hiermit und mit Lemma 2.2 folgt (i).

Den Beweis von (ii) erhalten wir durch direkte Rechnung:

$$
\frac{d}{ds}|A|^2 \;=\; \frac{d}{ds}\big(h_{ij}h_{kl}g^{ik}g^{jl}\big) = 2h^{ij}\frac{d}{ds}h_{ij} - 4\hat{f}h^{ij}h_{ik}h^{k}{}_{j}.
$$

(iii) ist eine direkte Konsequenz aus (2.4), kann aber auch durch Spurbildung aus (i) erhalten werden.
(iv) folgt direkt aus (i) und der Evolutionsgleichung der Metrik, da $h_i{}^j = h_{ij}g^{ij}$. □

Schließlich wollen wir nun noch die Evolutionsgleichung für die Flußgeschwindigkeit $\hat{f}(h_{ij})$, die direkt aus dem letzten Lemma folgt, angeben:

Korollar 2.11 (Die Flußgeschwindigkeit).

$$
\frac{d}{ds}\hat{f} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial h_{ij}}\left(\nabla_i \nabla_j \hat{f} + \hat{f}h_i{}^l h_{lj} - \hat{f}\overline{R}_i{}^0{}_j{}^0\right).
$$

2.5 Allgemeine Resultate und physikalisch motivierte Einschränkungen

Aus 2.11 erhalten wir:

Proposition 2.12. *Wenn f auf M_0 positiv (bzw. negativ) ist, so bleibt f unter der Evolutionsgleichung (1.2) positiv (bzw. negativ). Dies impliziert insbesondere, daß dann eine Lösung zu (1.2) eine Blätterung ist.*

Beweis. Wir benutzen, daß der Operator $\frac{\partial \hat{f}}{\partial h_{ij}} \nabla_i \nabla_j$ strikt elliptisch und somit $\frac{d}{ds} - \frac{\partial \hat{f}}{\partial h_{ij}} \nabla_i \nabla_j$ strikt parabolisch ist, solange $\frac{\partial \hat{f}}{\partial h_{ij}}$ positiv definit ist. Dies gilt, weil wir in der Klasse der Hyperflächen arbeiten für die Kurzzeitexistenz gilt. Der Beweis folgt nun direkt aus dem schwachen Maximumprinzip für strikt parabolische partielle Differentialgleichungen [PW67, Kapitel 3]. □

Als nächstes formulieren wir, unter welchen Bedingungen wir mit Langzeitexistenz rechnen können.

Proposition 2.13. *Nehmen wir an, daß wir a priori Abschätzungen an die Höhenfunktion u, die Gradientenfunktion v und an die zweite Fundamentalform A haben. Bleibt zusätzlich (2.6) unter (1.2) erhalten, so existiert eine Lösung zu (1.2) solange die a priori Abschätzungen gelten.*

Beweis. Aus den a priori Abschätzungen erhalten wir mit Resultaten von Krylov [Kry87] eine $C^{2,\alpha}$ a priori Schranke und daraus mit Standardergebnissen der Regularitätstheorie die volle Regularität. Langzeitexistenz folgt nun durch wiederholtes Anwenden des Resultates über Kurzzeitexistenz: Angenommen wir haben eine Lösungen M_s zu (1.2) für alle $s \in [0, s_0)$, diese Lösung M_s konvergiert somit gegen eine glatte Fläche M_{s_0}, wenn $s \to s_0$. Auf all diesen Flächen ist nach Voraussetzung (2.6) erfüllt, dadurch auch auf M_{s_0}. Wir können nun das Resultat der Kurzzeitexistenz auf die Fläche M_{s_0} anwenden und erhalten Existenz solange wir a priori Abschätzungen haben. □

Bemerkung 2.14. Falls es sich bei (1.2) um eine quasilineare, parabolische, partielle Differentialgleichung handelt, wie zum Beispiel im Fall $f = H$, erhält man bereits aus der Erhaltung von (2.6) unter (1.2) und den Schranken an u und v, die volle Regularität [Kry87, LSU68].

Bemerkung 2.15. Eine Schwierigkeit a priori Abschätzungen zu bestimmen besteht darin, Schranken an die Geschwindigkeit f zu finden, da diese sowohl in die Evolutionsgleichung von u, von v als auch in die von A eingehen. Die besondere Schwierigkeit besteht nun darin, daß es aus physikalischer Sicht keinen Sinn macht, Voraussetzungen an den Term $\overline{R}_i{}^0{}_j{}^0$ in der Evolutionsgleichung der Geschwindigkeit f (Korollar 2.11) zu machen. Vom physikalischen Standpunkt aus, das heißt aus Sicht der Einsteinschen Feldgleichung $\overline{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\overline{R}\overline{g}_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta}$ ist es nur sinnvoll, Bedingungen an die rechte Seite dieser Gleichung, sogenannte Energiebedingungen, zu stellen. Diese ergeben jedoch nur Aussagen für den Ricci Tensor der Raumzeit. Somit können wir keine Schranken herleiten, es sei denn $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial h_i{}^j} = \mathcal{H}\delta_i{}^j$ beziehungsweise $\frac{\partial \hat{f}}{\partial h_{ij}} = \mathcal{H}g^{ij}$, wobei $\mathcal{H}$ eine reellwertige Funktion ist. Dies ist unter den Beispielen 2.6 nur für den mittleren Krümmungsfluß $f = H - \mathcal{H}$ und den Fluß entlang der Inversen mittleren Krümmung $f = -\frac{1}{H}$ der Fall. In den weiteren Kapiteln dieser Arbeit wollen wir uns nun diesen Beispielen widmen.

Kapitel 3

Fluß entlang der Inversen der mittleren Krümmung

Unser Ziel in diesem Kapitel ist es, eine Blätterung der Vergangenheit einer raumartigen Hyperfläche mit strikt positiver mittlerer Krümmung in einer Kosmologischen Raumzeit zu konstruieren. Dazu betrachten wir die Geometrische Evolutionsgleichung, die eine gegebene Hyperfläche in Richtung ihrer vergangenheitsgerichteten Einheitsnormalen deformiert, wobei die Geschwindigkeit gerade durch das Inverse ihrer mittleren Krümmung in dem Punkt gegeben sein soll. Die Lösung des entsprechenden voll nichtlinearen, parabolischen Systems gibt uns eine Blätterung der Vergangenheit einer raumartigen Hyperfläche mit strikt positiver mittlerer Krümmung.

Sei also M_0 eine glatte, orientierbare, kompakte, raumartige Hyperfläche in einer Kosmologischen Raumzeit $\mathcal{V}$. Wir nehmen an, daß M_0 gegeben ist durch eine Immersion

$$F_0 : M^n \to \mathcal{V}.$$

Definition 3.1 (Inverser mittlerer Krümmungsfluß). Eine Familie glatter Immersionen $F_s = F(\cdot, s) : M^n \to \mathcal{V}$, $s \in [0, Z)$ genügt dem *Inversen mittleren Krümmungsfluß*, falls gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}F(p,s) &= -\Big(\frac{1}{H}\nu\Big)(p,s), \\ & \qquad\qquad p \in M^n, \quad s \geq 0, \\ F(p,0) &= F_0(p). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Wobei $\nu(p, s)$ die zukunftsgerichtete Einheitsnormale auf $M_s := F(\cdot, s)(M^n)$ an der Stelle $F(p, s)$ ist und $H > 0$ die mittlere Krümmung auf M_s ist.

Der Inverse mittlere Krümmungsfluß in Kosmologischen Raumzeiten wurde vom Autor schon in einer früheren Arbeit [Hol96] untersucht. Dort wurde gezeigt, daß eine Lösung so lange existiert, wie die Lösung in einer glatten und kompakten Teilmenge der Raumzeit enthalten bleibt.

Um dieses unbefriedigende Ergebnis zu verbessern, brauchen wir eine a priori Abschätzung an die Höhe. Eine solche a priori Schranke an die Höhe können wir nur dann erwarten, wenn wir geeignete natürliche Regularitätsannahmen an die von der Zeitfunktion induzierte Ursprungsblätterung $\mathcal{S}_\mathrm{t}$ fordern. Dies führt uns zu der Definition der "natürlich geblätterten" Raumzeiten, für die wir Existenz für alle Zeiten beweisen können. Als Beispiele für solche Raumzeiten haben wir die bekannten kosmologischen Modelle, wie die für Staub, Hintergrundstrahlung, Kasner oder Mixmaster Universum.

Die Kurzzeitexistenz ist eine direkte Folgerung aus Theorem 2.5 und der Existenz (siehe Kapitel 2) eines glatten zeitartigen Vektorfeld $\overline{\nabla}t$ in einer Kosmologischen Raumzeit, das in trivialer Weise transversal zur Anfangsfläche M_0 ist. Eine ausführliche Darstellung der Kurzzeitexistenz in diesem speziellen Fall findet sich in [Hol96].

Um Langzeitexistenz für 3.1 zu bekommen, ist es notwendig a priori Abschätzungen an die Höhe, die Steigung und die Krümmung herzuleiten. Die a priori Abschätzung für die Steigung beweisen wir wie in [Hol96] mit Methoden, die in Beziehung stehen zu denen in [Bar84, EH91]. Die obere a priori Schranke für die mittlere Krümmung ist etwas besser wie in [Hol96], wird aber mit der gleichen Methode bewiesen. Die a priori Schranke an die Krümmung werden wir hier mit einem Maximumprinzip für Bilinearformen, das auf Hamilton [Ham82] zurückgeht, beweisen. Um Existenz für alle Zeiten beweisen zu können, benötigen wir noch a priori Schranken an die Höhenfunktion u, in deren Beweis die "natürliche Blätterung" eine wesentliche Rolle spielt.

Zuerst geben wir die relevanten Evolutionsgleichungen an, leiten die kritischen a priori Abschätzungen her, um dann das Resultat über die Langzeitexistenz und Existenz für alle Zeiten zu beweisen. Im letzten Abschnitt untersuchen wir Robertson-Walker Raumzeiten, insbesondere das Modell für Staub, das kosmologische Friedmann Modell.

Wir verwenden die gleiche Notation wie im zweiten Kapitel.

3.1 Evolutionsgleichungen

Ausgehend von der Evolutionsgleichung

$$\frac{d}{ds}F = -\frac{1}{H}\nu,$$

erhalten wir direkt aus den im vorigen Kapitel hergeleiteten allgemeinen Resultaten:

Lemma 3.2. *Wir haben folgende Evolutionsgleichungen:*

$$
\begin{array}{rl}
(i) & \frac{d}{ds}g_{ij} = -2\frac{1}{H}h_{ij}, \\
(ii) & \frac{d}{ds}\nu = \nabla\Big(-\frac{1}{H}\Big), \\
(iii) & \frac{d}{ds}\mu = H\cdot\Big(-\frac{1}{H}\Big)\mu = -\mu, \\
(iv) & \frac{d}{ds}u = -\frac{1}{H}\psi^{-1}v, \\
(v) & \frac{d}{ds}v = -\langle T, \frac{1}{H^2}\nabla H\rangle + \frac{1}{H}\langle\overline{\nabla}_\nu T, \nu\rangle, \\
(vi) & \frac{d}{ds}h_{ij} = \frac{1}{H^2}\nabla_i\nabla_j H - 2\frac{1}{H^3}\nabla_i H\nabla_j H - \frac{1}{H}\left(h_{ik}h^k{}_j - R_{0i0j}\right), \\
(vii) & \frac{d}{ds}|A|^2 = 2h^{ij}\left(\frac{1}{H^2}\nabla_i\nabla_j H - 2\frac{1}{H^3}\nabla_i H\nabla_j H + \frac{1}{H}\left(h_{ik}h^k{}_j + R_{0i0j}\right)\right), \\
(viii) & \frac{d}{ds}H = \frac{1}{H^2}\Delta H - 2\frac{1}{H^3}|\nabla H|^2 + \frac{1}{H}\big(|A^2| + \overline{R}ic(\nu,\nu)\big), \\
(ix) & \frac{d}{ds}h_i{}^j = \frac{1}{H^2}\nabla_i\nabla_j H - 2\frac{1}{H^3}\nabla_i H\nabla_j H + \frac{1}{H}\left(h_i{}^k h_k{}^j - R_{0i}{}^{0j}\right).
\end{array}
$$

Beweis. Siehe voriges Kapitel. □

Für (iv) und (v) aus Lemma 3.2 erhalten wir nun mit (2.1) und (2.4)

Lemma 3.3.

$$
\begin{array}{rlcl}
(i) & \Big(\frac{d}{ds} - \frac{1}{H^2}\Delta\Big)u & = & -\frac{1}{H^2}div\overline{\nabla}t - \frac{2}{H}\psi^{-1}v, \\
(ii) & \Big(\frac{d}{ds} - \frac{1}{H^2}\Delta\Big)v & = & \frac{1}{H}\langle\overline{\nabla}_\nu T, \nu\rangle - \frac{1}{H^2}T(H_T) - \frac{1}{H^2}v\big(|A^2| + \overline{R}ic(\nu,\nu)\big).
\end{array}
$$

Für (vi) aus Lemma 3.2 ergibt sich mit Korollar 2.3

Lemma 3.4.

$$\begin{aligned}\Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)h_{ij} \;=\;& -2\frac{1}{H^3}\nabla_i H\nabla_j H-2\frac{1}{H}\overline{R}_{i00j}-2\frac{1}{H^2}h_{kl}\overline{R}_{lijk}\\ &-\frac{1}{H^2}h_{jl}\overline{R}_{lkik}-\frac{1}{H^2}h_{li}\overline{R}_{lkjk}-\frac{1}{H^2}\overline{\nabla}_k\,\overline{R}_{0ijk}\\ &-\frac{1}{H^2}\overline{\nabla}_j\,\overline{R}_{0kik}-\frac{1}{H^2}h_{ij}\big(|A^2|+\overline{R}ic(\nu,\nu)\big).\end{aligned}$$

Beweis. Anwenden von Korollar 2.3 auf (vi) von Lemma 3.2. □

3.2 A priori Schranken

Im folgenden wollen wir annehmen, daß $\mathcal{V}$ eine Kosmologische Raumzeit ist, das heißt sie ist zusammenhängend, global hyperbolisch und enthält eine raumartige Cauchy Fläche ($\mathcal{V}=\Sigma\times I$). Dies garantiert uns im Speziellen die Existenz einer globalen Zeitfunktion $t\in C^\infty(\mathcal{V})$. Desweiteren nehmen wir noch an, daß die zeitartige Konvergenzbedingung (1.1) gilt, das heißt

$$\overline{R}ic(X,X)\geq 0$$

für alle zeitartigen Vektoren X. Diese Bedingung ist notwendig, um eine untere Schranke an die mittlere Krümmung und somit eine obere Schranke an den Betrag der Flußgeschwindigkeit zu erhalten.

Zunächst werden wir die a priori Schranken an die Gradientenfunktion aus [Hol96] kurz wiedergeben, um dann die leicht verbesserte a priori Schranke an die mittlere Krümmung zu beweisen. Mit Hilfe eines Maximumprinzips für Bilinearformen von Hamilton [Ham82] beweisen wir dann eine a priori Schranke an die volle zweite Fundamentalform. Solange die Höhenfunktion beschränkt ist erhalten wir damit eine a priori C^2 Schranke für die Höhenfunktion u, die kombiniert mit Resultaten von Krylov [Kry87] zu einer a priori $C^{2,\alpha}$ Schranke von u und somit zur vollen Regularität führt.

Lemma 3.5. *Sei g eine glatte Funktion mit $g=g(t,y); t\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}^k$. Sei*

$$\begin{aligned}e(t)&=\inf\Big\{g(t,y):y\in Y\Big\},\\ \hat{e}(t)&=\sup\Big\{g(t,y):y\in\hat{Y}\Big\},\end{aligned}$$

wobei $Y,\hat{Y}$ kompakte Mengen sind. Dann sind $e(t),\hat{e}(t)$ Lipschitz und

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}e(t)&\geq\inf\Big\{\frac{\partial}{\partial t}g(t,y):y\in Y(t)\Big\},\\ \frac{\partial}{\partial t}\hat{e}(t)&\leq\sup\Big\{\frac{\partial}{\partial t}g(t,y):y\in\hat{Y}(t)\Big\}\end{aligned}$$

mit $Y(t) = \Big\{ y : g(t,y) = e(t) \Big\}$ *und* $\hat{Y}(t) = \Big\{ y : g(t,y) = \hat{e}(t) \Big\}$.

Beweis. Siehe [Ham86]. □

Sei von nun an M_s eine glatte Lösung von (3.1) auf einem Intervall $0 \le s < s_0$, so daß M_s in einer glatten und kompakten Teilmenge $G \subset \mathcal{V}$ für alle $0 \le s < s_0$ enthalten bleibt. Wir nehmen weiterhin an, daß $H \ge H_0 > 0$ auf M_0.

Proposition 3.6. *Da $H \ge H_0 > 0$ auf M_0, haben wir die folgende a priori Schranke für die mittlere Krümmung auf M_s:*

$$H \ge e^{s\frac{1}{n}} H_0.$$

Beweis. Wie in [Hol96] genügt es nach Lemma 3.5 zu zeigen, daß die Funktion $f(s) := \min \Big\{ He^{-s\frac{1}{n}}(p,s) : p \in M^n \Big\}$ streng monoton wachsend ist, das heißt:

$$\frac{d}{ds} f \ge 0.$$

Wir definieren $Y(s) := \Big\{ p : He^{-s\frac{1}{n}}(p,s) = f(s) \Big\}$ und benutzen Lemma 3.5:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} f(s) &\ge \min \Big\{ \frac{d}{ds}\big(He^{-s\frac{1}{n}}\big)(p,s) : p \in Y(s) \Big\} \\ &= \min \Bigg\{ \Bigg(e^{-s\frac{1}{n}} \Big(\frac{1}{H^2} \Delta H - \frac{2}{H^3} \nabla_i H \nabla_i H \\ &\qquad + \frac{1}{H} \big(|A|^2 + \overline{R}ic(\nu,\nu) - \frac{1}{n} H^2 \big) \Big) \Bigg)(p,s) : p \in Y(s) \Bigg\} \\ &\ge \min \Bigg\{ \Bigg(e^{-s\frac{1}{n}} \Big(0 - 0 + \frac{1}{n} H + 0 - \frac{1}{n} H \Big) \Bigg) \Bigg\} = 0. \end{aligned}$$

□

Korollar 3.7. *Als direkte Konsequenz erhalten wir*

$$u \le \min_{M_0} u,$$

da $\frac{d}{ds} u = -\frac{1}{H} \psi^{-1} v$.

Proposition 3.8. *Die Gradientenfunktion v erfüllt auf M_s:*

$$v(p,s) \leq \Big(1+\sup_{M_0} v\Big)\exp\big(\lambda\big[\max_{M_0} u - u(p,s)\big]\big)\cdot\exp(\hat{K}s),$$

wo

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda\Big(n, \|\mathcal{L}_T g\|_{1,G}, \|T\|_{1,G}, \|\psi^{-1}\|_{1,G},\Big),\\ \hat{K} &= 2\frac{2n}{4n+1}+\frac{1}{2}\lambda.\end{aligned}$$

Für einen ausführlichen Beweis verweisen wir auf [Hol96]. Zum besseren Verständnis geben wir hier jedoch einen kurzen Beweis.

Beweis. Wir gehen vor, wie in [Bar84, Theorem 3.1]. Seien $\lambda, \hat{K} > 0$ Konstanten, die wir später wählen und definiere

$$C_\lambda := \Big(1+\sup_{M_0} v\Big)e^{\lambda \max_{M_0} u}.$$

Angenommen die Funktion $ve^{\lambda u - \hat{K}s}$ erreicht C_λ zum ersten Mal im Punkt $(p_1, s_1) \in M^n \times (0, s_0]$. Dann gilt in diesem Punkt (Maximum)

$$\begin{aligned}0 &\leq \Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)ve^{\lambda u - \hat{K}s},\\ 0 &= \nabla(ve^{\lambda u - \hat{K}s}).\end{aligned}$$

Aus Lemma 3.3 und [Bar84, Proof of Theorem 3.1] folgt

$$\begin{aligned}\Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)u &\leq |\Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)u| \leq \frac{1}{H^2}C_0v^2+\frac{2}{H}\psi^{-1}v\\ &\leq \frac{1}{H^2}C_1(C_0)v^2+\frac{1}{2},\end{aligned}$$

wie auch

$$\Big(\frac{d}{ds}-\frac{1}{H^2}\Delta\Big)v \leq -\frac{1}{H^2}v|A|^2+\frac{1}{H^2}C_2(v^3+|A|v^2).$$

Wobei

$$C_0 = C_0(\|\psi^{-1}\|_{1,G}) \quad \text{und} \quad C_2 = C_2(\|\mathcal{L}_T g\|_{1,G}, \|T\|_{1,G}, n).$$

Hierbei benutzen wir (2.2) und die zeitartige Konvergenzbedingung, ohne die C_2 zusätzlich noch von $\|\overline{Riem}\|_{0,G}$ abhängen würde. Wir schließen also einerseits

$$\frac{1}{H^2}v|A|^2 \leq \frac{1}{H^2}C_2|A|v^2+\frac{1}{H^2}(C_2+C_0\lambda)v^3+\frac{1}{2}v\lambda+\frac{1}{H^2}\lambda^2|\nabla u|^2v-\hat{K}v.$$

Andererseits ergibt sich wie in [Bar84, Theorem 3.1]

$$v|A|^2 \;\; \geq \;\; \Big(1+\frac{1}{2n}\Big)\lambda^2 v|\nabla u|^2 - C_3(n, \|T\|\,1)v^3 - H^2 v.$$

Setze $\hat{K} = 2\frac{2n}{4n+1} + \frac{1}{2}\lambda$ und da $|\nabla u|^2 = \psi^{-2}(v^2-1)$, erhalten wir schließlich im Punkt (p_1, s_1)

$$\frac{1}{2n}\lambda^2\psi^{-2}(v^2-1) \;\; \leq \;\; C_4 v^2(\lambda+1).$$

Hierbei hängt C_4 von C_0, C_1, C_2 und C_3 ab. Da nach Definition von C_λ gilt, daß $v(p_1, s_1) \geq 2$, ergibt sich ein Widerspruch für λ groß genug. □

Proposition 3.9. *Wir haben die folgende a priori Schranke an die mittlere Krümmung H auf M_s:*

$$H \leq C_5,$$

wobei

$$C_5 = \max\Big\{\sup_{M_0} Hv^q, \sup_{M^n\times[0,s_0]}\Big(\frac{1}{H}C_6\Big)\Big\}$$

mit $q := 1+\varepsilon$, $C_6 = C_6(n, \varepsilon^{-1}, \|\mathcal{L}_T g\|_{1,G}, \|T\|_{1,G}, \|\psi^{-1}\|_{1,G})$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest.

Beweis. Angenommen Hv^q erreicht C_5 zum ersten Mal im Punkt $(p_1, s_1) \in M^n \times (0, s_0]$. Dann gilt in diesem Punkt

$$\nabla(Hv^q) = 0,$$
$$\Big(\frac{d}{ds} - \frac{1}{H^2}\Delta\Big)Hv^q \geq 0.$$

Aus der Evolution von H (Lemma 3.2 (viii)) und dem Beweis von Proposition 3.8 erhalten wir

$$\Big(\frac{d}{ds} - \frac{1}{H^2}\Delta\Big)H \;\; = \;\; -2\frac{1}{H^3}\nabla_i H\nabla_i H + \frac{1}{H}\big(|A^2| + \overline{R}ic(\nu,\nu)\big)$$

und

$$\Big(\frac{d}{ds} - \frac{1}{H^2}\Delta\Big)v \;\; \leq \;\; -\frac{1}{H^2}v|A|^2 + \frac{1}{H^2}C_2(v^3 + |A|v^2).$$

Mit der zeitartigen Konvergenzbedingung erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \;\; &\leq \;\; \frac{1}{H}C_2 v^{q+2} - (q-1)\frac{1}{H}|A|^2 v^q + \frac{C_2}{H}|A|v^{q+1} \\ &\leq \;\; \frac{C_2}{H}v^{q+2} + \frac{C_2^2}{4\tilde{\varepsilon}H}v^{q+2} - (q-1-\tilde{\varepsilon})\frac{1}{H}|A|^2 v^q. \end{aligned}$$

Da $|A|^2 \geq \frac{1}{n}H^2$ bekommen wir schließlich im Punkt (p_1, s_1) mit geeignetem C_6, daß

$$C_5 = Hv^q < \frac{1}{H}C_6 v^{q+2} \leq C_5$$

gilt, ein Widerspruch. Die Behauptung folgt, da $H \leq Hv^q$. $\square$

Proposition 3.10. *Die zweite Fundamentalform h_{ij} erfüllt die folgende a priori Abschätzung auf M_s:*

$$h_{ij} \leq \bar{C}_0 g_{ij},$$

wobei

$$\bar{C}_0 = \max\Big\{ \sup_{M^n \times [0,s_0]} \Big(\frac{1}{2} + 2H + 4\bar{C}_1\Big), \sup_{M_0} |A| \Big\},$$

mit $\bar{C}_1 = \bar{C}_1\Big(\min_{M_0} H, \|\overline{R}m\|_{1,G}\Big)$.

Beweis. Wir zeigen, daß die Eigenwerte von

$$M_{ij} = (\bar{C}_0 g_{ij} - h_{ij})$$

nicht-negativ bleiben. Als erstes brauchen wir eine Evolutionsgleichung für M_{ij}. Wir benutzen Lemma 3.2 (i) und Lemma 3.4 und bekommen

$$\Big(\frac{d}{ds} - \frac{1}{H^2}\Delta\Big) M_{ij} = N_{ij},$$

wo

$$\begin{aligned} N_{ij} \;&=\; -2\bar{C}_0 \frac{1}{H} h_{ij} + 2\frac{1}{H^3}\nabla_i H \nabla_j H + 2\frac{1}{H}\overline{R}_{i00j} + 2\frac{1}{H^2} h_{kl}\overline{R}_{lijk} \\ &\quad + \frac{1}{H^2} h_{jl}\overline{R}_{lkik} + \frac{1}{H^2} h_{li}\overline{R}_{lkjk} + \frac{1}{H^2}\overline{\nabla}_k \overline{R}_{0ijk} \\ &\quad + \frac{1}{H^2}\overline{\nabla}_j \overline{R}_{0kik} + \frac{1}{H^2} h_{ij}\big(|A^2| + \overline{R}ic(\nu,\nu)\big). \end{aligned}$$

In [Ham82, Theorem 9.1] wurde ein Maximum Prinzip für solche Evolutionsgleichungen unter der Annahme bewiesen, daß der absolute Term N_{ij} ein Polynom in M_{ij} und g_{ij} ist. Da $\overline{R}m$ glatt und H beschränkt ist, ist leicht zu sehen, daß dies in unserem Fall zutrifft.

Nehmen wir nun an, daß zum Zeitpunkt s_1 an einem Punkt $p \in M_{s_1}$ zum ersten Mal ein Null Eigenwert von M_{ij} mit Eigenvektor $v = \{v_i\}$ auftritt.

Die Behauptung ist nun bewiesen, wenn wir gezeigt haben, daß dort $N_{ij}v^iv^j$ nicht-negativ ist. Wir wählen hierzu eine Orthonormal Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ für $T_pM_{s_1}$ derart, daß h_{ij} (und somit M_{ij}) diagonal werden. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $v = e_1$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von h_{ij} in p, dann folgt aus $M_{11} = 0$, daß $\lambda_1 = \bar{C}_0$ in p ist und wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
N_{ij}v^iv^j &= N_{11} \geq -2\bar{C}_0\frac{1}{H}\lambda_1 + 2\frac{1}{H^3}\nabla_{e_1} H\nabla_{e_1} H - \frac{1}{2}\frac{1}{H^2}|A|^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{1}{H^2}\bar{C}_1 + \frac{1}{H^2}\lambda_1|A|^2 \\
&\geq -2\bar{C}_0^2\frac{1}{H} - \frac{1}{H^2}\bar{C}_1 + \frac{1}{H^2}(\bar{C}_0 - \frac{1}{2})\bar{C}_0^2 \\
&\geq \frac{1}{H^2}(\bar{C}_0 - \frac{1}{2} - 2H)\bar{C}_0^2 - \frac{1}{H^2}\bar{C}_1 \\
&\geq \frac{1}{H^2}(\bar{C}_0 - \frac{1}{2} - 2H - 4\bar{C}_1)\bar{C}_0^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 3.11. Es genügt eine obere Schranke für h_{ij}, da H strikt positiv ist.

Es ist wohlbekannt, daß man aus den a priori Schranken an v, H, und h_{ij} eine $C^{0,\alpha}$ a priori Schranken an $\nabla^2 u$ in G erhält (siehe zum Beispiel Gerhardt [G2: Theorem 4.2] und Urbas [U1: (3.55)]).

Theorem 3.12. *Die zweiten Ableitungen der Höhenfunktion u sind gleichmäßig beschränkt in $C^{0,\alpha}(G)$.*

Für den Beweis sei auf Krylov [Kry87, Kapitel 5] verwiesen.

Bemerkung 3.13. Das letzte Theorem liefert zusammen mit Standard Ergebnissen aus der Regularitätstheorie die volle Regularität von u in G.

3.3 Langzeitexistenz

Mit Hilfe der a priori Abschätzungen aus dem letzten Kapitel können wir nun sofort das folgende Theorem aus [Hol96] beweisen:

Theorem 3.14. *Sei $\mathcal{V} = \Sigma^n \times I$ eine Kosmologische Raumzeit in der die zeitartige Konvergenzbedingung erfüllt ist und sei $M_0 = F_0(M^n)$eine glatte, kompakte, raumartige Hyperfläche in $\mathcal{V}$ mit strikt positiver mittlerer Krümmung. Dann existiert eine eindeutige Familie $M_s = F(\cdot, s)(M^n)$ von glatten, kompakten, raumartigen Hyperflächen, die das Anfangswertproblem*

(3.1) auf einem Intervall $0 \leq s < s_0$ *lösen. Bleibt* M_s *in einer glatten und kompakten Region von* $\mathcal{V}$ *für* $s \to s_0$*, so kann die Lösung über* s_0 *hinaus fortgesetzt werden.*

Beweis. Die Kurzzeitexistenz folgt direkt aus 2.5. Sei nun $[0, s_0)$ das maximale Lösungsintervall, nach Voraussetzung bleibt M_s in einer glatten und kompakten Region von $\mathcal{V}$ enthalten. Die Höhenfunktion u ist also gleichmäßig beschränkt und aus den a priori Schranken aus dem letzten Abschnitt folgern wir, daß M_s gegen eine glatte Grenzfläche M_{s_0} konvergiert für $s \to s_0$. Somit können wir die Lösung $\{M_s\}$ durch Anwendung des Kurzzeitexistenzresultates über s_0 hinaus fortsetzen. □

Lemma 3.15. *Wenn der Inverse mittlere Krümmungsfluß für alle Zeiten existiert, so geht* $\mathrm{Vol}(M_s)$ *gegen Null für* $s \to \infty$*.*

Beweis. Das Volumen nimmt exponentiell ab, da nach Lemma 3.2 (iii) gilt: $\frac{d}{ds} \int d\mu = -\int d\mu$. □

Wir wollen nun wissen, wann eine Lösung des Inversen mittleren Krümmungsflusses für alle Zeiten existiert. Dafür müssen wir eine a priori Schranke an die Höhenfunktion u beweisen, was jedoch nur möglich ist, wenn wir eine geeignete, möglichst "natürliche" Regularitätsbedingung an die Referenzblätterung stellen.

Definition 3.16 ("natürlich geblättert" Bedingung). Wir nennen eine Raumzeit **"natürlich geblättert"** oder **"slicing-natural"** wenn es Konstanten $\check{\delta}, \hat{\delta}, \check{C}$ und $\hat{C}$ gibt, so daß

$$-\check{\delta} \frac{d}{dt} H_{\mathcal{S}_t} \leq (|A_{\mathcal{S}_t}|^2 + \overline{R}ic(T,T)) \leq -\check{C} \frac{d}{dt} H_{\mathcal{S}_t}$$
$$\text{und } \frac{\hat{\delta}}{H_{\mathcal{S}_t}} \leq t \leq \frac{\hat{C}}{H_{\mathcal{S}_t}} \tag{3.2}$$

ist. Dabei sind $H_{\mathcal{S}_t}, |A_{\mathcal{S}_t}|^2$ und T die mittlere Krümmung, totale Krümmung und die Einheitsnormale der Referenzblätterung $\mathcal{S}_t$. Eine solche Blätterung $\mathcal{S}_t$ heißt dann **"natürliche Blätterung"**.

Bemerkungen 3.17. (i) Die erste Gleichung liefert die Beschränktheit der lapse Funktion, was wir alternativ zu ihr auch annehmen könnten.

(ii) Wenn die Raumzeit eine Blätterung mit Blättern konstanter mittlerer Krümmung besitzt, setzen wir $t := \frac{C}{H_{\mathcal{S}}}$. Die Raumzeit ist dann "natürlich geblättert", wenn $(|A_{\mathcal{S}}|^2 + \overline{R}ic(T,T)) \leq \tilde{C} H_{\mathcal{S}}^2$ und die zeitartige Konvergenzbedingung (1.1) gilt.

Definition 3.18. Eine Raumzeit heißt **"f-natürlich geblättert"**, wenn sie im Lösungsgebiet einer Geometrischen Evolutionsgleichung mit Geschwindigkeit f "natürlich geblättert" ist.

Bemerkungen 3.19. (i) Eine Raumzeit ist "$\frac{1}{H}$-natürlich geblättert", wenn sie in der Vergangenheit von M_0 "natürlich geblättert" ist. In unserer Notation heißt das, wenn für $t_0 = \inf \left\{ \hat{t} \middle| M_0 \subset \bigcup_{t \leq \hat{t}} \mathcal{S}_t \right\}$ die Menge $\{\mathcal{S}_t\}_{t \leq t_0}$ eine "natürliche Blätterung" ist, so ist die zugehörige Raumzeit "$\frac{1}{H}$-natürlich geblättert" (eine Lösung zu 3.1 bleibt automatisch in ihr enthalten).
(ii) Beispiele für "$\frac{1}{H}$-natürlich geblätterte" Raumzeiten sind die Robertson-Walker Raumzeiten für Staub und Hintergrundstrahlung, das kosmologische Kasner Modell und das Mixmaster Universum, ein Kasner Modell mit zeitabhängigen Exponenten. Die Robertson-Walker Raumzeiten und insbesondere das Modell für Staub, das sogenannte Friedmann Modell, werden wir im nächsten Abschnitt behandeln.

Proposition 3.20. *Sei $\mathcal{V}$ eine "$\frac{1}{H}$-natürlich geblätterte" Raumzeit, dann erfüllt die Höhenfunktion u auf M_s:*

$$\exp(-Cs) \inf_{M_0} u \leq u \leq \exp(-\delta s) \sup_{M_0} u,$$

wobei C und δ nur von den Konstanten in (3.2) abhängen.

Beweis. Als erstes zeigen wir, daß die lapse Funktion ψ in einer "$\frac{1}{H}$-natürlich geblättert" Raumzeit beschränkt ist:
Da $\Delta\psi = \frac{d}{dt} H_{\mathcal{S}_t} + \psi(|A_{\mathcal{S}_t}|^2 + \overline{R}ic(T,T))$ erhalten wir an einem Punkt $p_1 \in \mathcal{S}_t$ in dem ψ sein Maximum annimmt

$$\frac{d}{dt} H_{\mathcal{S}_t} \leq -\psi(|A_{\mathcal{S}_t}|^2 + \overline{R}ic(T,T)) \Leftrightarrow \psi \leq \frac{-\frac{d}{dt} H_{\mathcal{S}_t}}{(|A_{\mathcal{S}_t}|^2 + \overline{R}ic(T,T))} \leq \frac{1}{\check{\delta}},$$

unabhängig von $\mathcal{S}_t$. Somit ist ψ nach oben beschränkt durch $\frac{1}{\check{\delta}}$.
An einem Punkt $p_2 \in \mathcal{S}_t$ in dem ψ das Minimum annimmt gilt

$$\frac{d}{dt} H_{\mathcal{S}_t} \geq -\psi(|A_{\mathcal{S}_t}|^2 + \overline{R}ic(T,T)) \Leftrightarrow \psi \geq \frac{-\frac{d}{dt} H_{\mathcal{S}_t}}{(|A_{\mathcal{S}_t}|^2 + \overline{R}ic(T,T))} \geq \frac{1}{\check{C}}$$

und somit ist $\psi \geq \frac{1}{\check{C}}$.

Nun benutzen wir, daß in dem Punkt, in dem die Höhenfunktion u ihr Maximum annimmt $\Delta u \leq 0$ und $v = 1$. Dort erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \Delta u = div\overline{\nabla} t + H\psi v = -div(T\psi^{-1}) + H\psi^{-1} \\ &\geq -\underbrace{\langle \overline{\nabla}_{\tau_i} T, \tau_i \rangle}_{\langle \overline{\nabla}_{e_i} T, e_i \rangle = H_{\mathcal{S}_t}} \psi^{-1} - \underbrace{\langle T, \tau_i \rangle}_{=0} \overline{\nabla}_{\tau_i} \psi^{-1} + H\psi^{-1} \\ &\Leftrightarrow H \leq H_{\mathcal{S}_t}. \end{aligned}$$

In gleicher Weise erhalten wir in dem Punkt, in dem u ihr Minimum annimmt $H \geq H_{\mathcal{S}_t}$.

Für die untere Schranke an u genügt es zu zeigen, daß die Funktion $g(s) := \min_{M_s} u \exp(Cs)$ nicht fällt, also $\frac{d}{ds} g \geq 0$. Dies folgt direkt aus den Bedingungen für "natürlich geblättert", Lemma 3.2 (iv): $\frac{d}{ds} u = -\frac{1}{H}\psi^{-1} v$, Lemma 3.5 und obiger Ungleichung im Minimum von u. Für die obere Schranke zeigen wir in gleicher Weise, daß die Funktion $\bar{g} := \min_{M_s} u \exp(\delta s)$ nicht wächst. Dabei ist $C = \frac{1}{\check{\delta}\delta}$ und $\delta = \frac{1}{\check{C}\bar{C}}$. Die Konstanten hängen also nur von den Konstanten der "natürlichen Blätterung" (3.2) ab. □

Theorem 3.21. *In einer "$\frac{1}{H}$-natürlich geblätterten" Raumzeit $\mathcal{V}$ existiert der Inverse mittlere Krümmungsfluß (3.1) für alle Zeiten, das Volumen von (M_s) geht gegen Null und* $\max_{M_s} |u| \to 0$*, für* $s \to \infty$*.*

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus der letzten Proposition, Theorem 3.14 und dem Lemma 3.15. □

Bemerkung 3.22. Die "$\frac{1}{H}$-natürlich geblätterten" Raumzeiten sind insbesondere "crushing". Das letzte Theorem zeigt also, daß eine Lösung von (3.1) eine Blätterung dieser "crushing" Singularität liefert.

3.4 "Natürlich geblätterte" Robertson-Walker Raumzeiten

In diesem Abschnitt untersuchen wir wie sich die Bedingung "($\frac{1}{H}$-)natürlich geblättert" zu sein in eine Robertson-Walker Raumzeit überträgt. Schließlich untersuchen wir noch ein Beispiel für eine "$\frac{1}{H}$-natürlich geblätterte" Robertson-Walker Raumzeit, das Friedmann Universum, auch kosmologisches Friedmann Modell genannt.

Eine Robertson-Walker Raumzeit ist ein "warped product" $M(k, f) = I \times_f S$ (siehe [O'N83, Kapitel 7 und 12]), wobei S eine zusammenhängende, oft drei-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung

$k = -1, 0$ oder 1 ist und $f > 0$ eine glatte Funktion auf einem offenen Intervall I im ein-dimensionalen Minkowski Raum $\mathbb{R}^1_1$ ist. Für ein kosmologisches Modell nehmen wir weiter an, daß S kompakt ist. Wir reden von einem kosmologischen Friedmann Modell, wenn $n = 3$ und die *Skalierungsfunktion* f in einer Robertson-Walker Raumzeit die Friedmann Gleichung $f'^2 + k = A/f$ löst, wobei A eine Konstante ist, die nur von der Masse abhängt. Es ist leicht zu sehen [O'N83, Kapitel 12, Lemma 20], daß man so gerade ein Modell für perfekten Staub (nicht miteinander wechselwirkende Materie) bekommt.

Proposition 3.23. *Eine Robertson-Walker Raumzeit ist "natürlich geblättert", genau dann wenn die Skalierungsfunktion folgende Ungleichungen erfüllt:*

$$\hat{\delta} f(t) \le n f'(t) t \le \hat{C} f(t) \tag{3.3}$$

für $\hat{\delta}, \hat{C} > 0$.

Beweis. Wir können durch Reskalieren der Zeit immer erreichen, daß die Anfangssingularität $f = 0$ ("big bang") zum Zeitpunkt $t = 0$ auftritt. Allgemeine Resultate über Robertson-Walker Raumzeiten [O'N83, Kapitel 12] zeigen, daß $\frac{d}{dt} H_S = (|A_S|^2 + \overline{R}ic(T,T))$, und da $H_S = nf'/f$ ist, vereinfacht sich (3.2) zu (3.3). ☐

Proposition 3.24. *Das kosmologische Friedmann Modell ist "$\frac{1}{H}$-natürlich geblättert". Im Fall von $k = 0, -1$ ist das kosmologische Friedmann Modell "natürlich geblättert".*

Beweis. Dazu genügt es zu zeigen, daß (3.3) in einem Friedmann Modell erfüllt ist. Betrachten wir hierzu die Lösungen der Friedmann Gleichung mit $f(0) = 0$.

$$
\begin{array}{llll}
(\alpha) & k = 0: & f(t) = Ct^{\frac{2}{3}}, \text{ mit } 4C^3 = 9A; & \\
(\beta) & k = 1: & t = \dfrac{1}{2}A(\theta - \sin\theta), \quad f = \dfrac{1}{2}A(1 - \cos\theta) & \theta \in (0, 2\pi); \\
(\gamma) & k = -1: & t = \dfrac{1}{2}A(\sinh\eta - \eta), \quad f = \dfrac{1}{2}A(\cosh\eta - 1) & \eta > 0.
\end{array}
$$

Im Fall (α) erhalten wir $\frac{3f't}{f} = 2$, so daß 3.3 mit $\hat{\delta} = \hat{C} = 2$ erfüllt ist. Für (β) haben wir $\frac{3f'(u_0)u_0}{f(u_0)} \le \frac{3f't}{f} \le 2$ mit $u_0 = \min_{M_0} u$. Wir erhalten $\hat{\delta} = \frac{3f(u_0)'u_0}{f(u_0)}$ und $\hat{C} = 2$. Falls $k = -1$ ist, ergibt sich $2 \le \frac{3f't}{f} \le 3$, so daß die Konstanten im Fall (γ) durch $\hat{\delta} = 2$ und $\hat{C} = 3$ gegeben sind. ☐

Bemerkungen 3.25. (i) Das Modell der Hintergrundstrahlung ist auch eine Robertson-Walker Raumzeit. Die explizite Lösung für die Skalierungsfunktion f findet sich zum Beispiel in [Wal84, Table 5.1] und man rechnet genau wie oben Bedingung (3.3) leicht nach.

(ii) Das qualitative Verhalten von (α), (β) und (γ) ist in der Nähe der Singularität dasselbe (siehe [HE73]).

Kapitel 4

Fluß entlang der mittleren Krümmung

Der Fluß entlang der mittleren Krümmung in Kosmologischen Raumzeiten wurde in allgemeinerem Zusammenhang von Ecker und Huisken in [EH91] behandelt. Sie untersuchten unter anderem den Fluß entlang einer vorgeschriebenen mittleren Krümmung:

$$\frac{d}{ds}F(p,s) = (H - \mathcal{H})\nu(p,s),$$

wobei H die mittlere Krümmung, ν die Einheitsnormale an $M_s = F(\cdot, s)$ im Punkt p und $\mathcal{H}$ eine reellwertige Funktion auf M^n ist. Sie zeigten Regularität und Langzeitexistenz unter Annahme der zeitartigen Konvergenzbedingung (1.1) und der Existenz von globalen Barrieren. Wenn $\mathcal{H} = 0$ und $\inf_{M_0} H > 0$ ist, läßt sich die Forderung von globalen Barrieren derart formulieren:

1.) Es existiert eine kompakte, raumartige Hyperfläche $\hat{M}$ in der Zukunft der Anfangsfläche $I^+(M_0)$ mit nicht-positiver mittlerer Krümmung $\hat{H} \leq 0$.
2.)Es existiert eine kompakte, raumartige Hyperfläche $\check{M}$ in der Vergangenheit der Anfangsfläche $I^-(M_0)$ mit mittlerer Krümmung $\check{H} \geq \sup_{M_0} H$.

Während 2.) nur eine Einschränkung an die Anfangswerte M_0 ist, ist 1.) eine Forderung an die Raumzeit, die schon in einfachsten Beispielen, wie dem Friedmann Modell mit $k = 0, -1$ verletzt ist.

Wir wollen nun in diesem Kapitel den Fluß entlang der mittleren Krümmung in solchen Raumzeiten untersuchen, die keine raumartige Hyperfläche mit nicht-positiver mittlerer Krümmung $\hat{H} \leq 0$ enthalten. Diese nennen wir "unendlich expandierend".

Sei M_0 eine glatte, orientierbare, kompakte, raumartige Hyperfläche in einer Kosmologischen Raumzeit $\mathcal{V}$. Wir nehmen an, daß M_0 gegeben ist durch eine Immersion

$$F_0 : M^n \to \mathcal{V}.$$

Definition 4.1 (Mittlerer Krümmungsfluß). Eine Familie glatter Immersionen $F_s = F(\cdot, s) : M^n \to \mathcal{V}, s \in [0, Z)$ genügt dem mittleren Krümmungsfluß, falls gilt:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds}F(p,s) = H\nu(p,s), \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p \in M^n, \quad s \geq 0, \\ &F(p,0) = F_0(p). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Wobei $\nu(p, s)$ die zukunftsgerichtete Einheitsnormale auf $M_s := F(\cdot, s)(M^n)$ an der Stelle $F(p, s)$ ist und $H > 0$ die mittlere Krümmung auf M_s ist.

Um die für die Langzeitexistenz nötigen a priori Abschätzungen zu beweisen, betrachten wir "H-natürlich geblätterte" Raumzeiten, die ja Modelle wie Staub und Hintergrundstrahlung beinhalten, siehe Proposition 3.24. Unter etwas stärkeren Bedingungen erhalten wir sogar Konvergenz des Flusses (4.1) zur "natürlichen Blätterung".

Wir verwenden weiterhin die in Kapitel 2 eingeführte Notation.

4.1 Evolutionsgleichungen

Ausgehend von der Evolutionsgleichung

$$\frac{d}{ds}F = H\nu$$

erhalten wir direkt aus den im zweiten Kapitel hergeleiteten allgemeinen Resultaten folgendes Lemma.

Lemma 4.2. *Wir haben folgende Gleichungen:*

$$
\begin{aligned}
&(i) && \frac{d}{ds} g_{ij} = -2H h_{ij},\\
&(ii) && \frac{d}{ds} \nu = \nabla H,\\
&(iii) && \frac{d}{ds} \mu = H^2 \mu,\\
&(iv) && \frac{d}{ds} u = H \psi^{-1} v,\\
&(v) && \frac{d}{ds} v = \langle T, \nabla H\rangle - H \langle \overline{\nabla}_\nu T, \nu\rangle,\\
&(vi) && \frac{d}{ds} h_{ij} = \nabla_i \nabla_j H + H \left(h_{ik} h^k{}_j - R_{0i0j}\right),\\
&(vii) && \frac{d}{ds} |A|^2 = 2h^{ij} \left(\nabla_i \nabla_j H - H \left(h_{ik} h^k{}_j + R_{0i0j}\right)\right),\\
&(viii) && \frac{d}{ds} H = \Delta H - H\big(|A^2| + \overline{R}ic(\nu,\nu)\big),\\
&(ix) && \frac{d}{ds} h_i{}^j = \nabla_i \nabla_j H - H \left(h_i{}^k h_k{}^j - R_{0i}{}^{0j}\right).
\end{aligned}
$$

Beweis. Siehe Kapitel 2. □

Für (iv) und (v) aus Lemma 4.2 erhalten wir nun mit (2.1) und (2.4)

Lemma 4.3. *Es gilt:*

$$
\begin{aligned}
(i) \left(\frac{d}{ds} - \Delta\right) u &= -\mathrm{div}_M \overline{\nabla} t,\\
(ii) \left(\frac{d}{ds} - \Delta\right) v &= -H\langle \overline{\nabla}_\nu T, \nu\rangle - T(H_T) - v\left(|A^2| + \overline{R}ic\,(\nu,\nu)\right).
\end{aligned}
$$

Für (vi) aus Lemma 4.2 ergibt sich mit Lemma 2.3

Lemma 4.4. *Für die zweite Fundamentalform erhalten wir*

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d}{ds} - \Delta\right) h_{ij} &= 2H h_{ik} h_{kj} - h_{ij}\left(|A|^2 + \overline{R}ic\,(\nu,\nu)\right) + 2h_{kl} \overline{R}_{lijk}\\
&\quad - h_{lj} \overline{R}_{lkik} - h_{li} \overline{R}_{lkjk} - \overline{\nabla}_k \overline{R}_{0ijk} - \overline{\nabla}_j \overline{R}_{0kik}.
\end{aligned}
$$

Für die totale Krümmung $|A|^2$ und ihre Ableitungen $|\nabla^m A|^2$ erhalten wir die folgenden Ungleichungen:

Lemma 4.5. *Wir haben die Abschätzungen*

$$\left(\frac{d}{ds} - \Delta\right) |A|^2 \leq -|A|^4 - |A|^2 \overline{R}ic\,(\nu, \nu) - 2|\nabla A|^2 \qquad (4.2)$$
$$+(|A|^2 + 1)c_0(n, |\overline{R}iem|_1),$$
$$\left(\frac{d}{ds} - \Delta\right) |\nabla^m A|^2 \leq -2|\nabla^{m+1} A|^2 + c_m(1 + |\nabla^m A|^2) \qquad (4.3)$$

für $m > 0$ *und* $c_m = c_m\left(m, n, v, \sum_{j=0}^{m} |\overline{\nabla}^j \overline{R}iem|, \sum_{j=0}^{m-1} |\nabla^j A|^2\right)$.

Beweis. Siehe [Hui86, EH91]. □

4.2 Allgemeine a priori Abschätzungen für den mittleren Krümmungsfluß

Um die mittlere Krümmung auf M_s abzuschätzen benötigen wir noch ein technisches Lemma:

Lemma 4.6. *Sei* g *eine Funktion auf* $M^n \times [0, s_0]$ *für die gilt, daß*

$$\left(\frac{d}{ds} - \Delta\right) g \leq -a^2 f^2 + b^2$$

für $a, b \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$g \leq \frac{b}{a} + \frac{1}{a^2 s}$$

auf ganz $M^n \times [0, s_0]$.

Beweis. Siehe [EH91]. □

In diesem Abschnitt sei M_s eine glatte Lösung von (4.1) auf dem Intervall $0 \leq s < s_0$, so daß M_s in einer glatten und kompakten Teilmenge $G \subset \mathcal{V}$, für alle $0 \leq s < s_0$, enthalten ist.

Lemma 4.7 (Schranken an H). *Für die mittlere Krümmung erhalten wir folgende a priori Abschätzungen auf* M_s*:*

1. *Falls* $H(p, 0) \geq 0$, *ist* $H(p, s) \geq 0$,

2. $H^2 \leq \frac{n}{2s}$,

Beweis. Die Behauptung 1. folgt direkt aus Lemma 4.2(viii) und dem Maximumprinzip, Behauptung 2. folgt direkt aus Lemma 4.2(viii), $|A|^2 \leq \frac{1}{n}H^2$ und Lemma 4.6. $\square$

Proposition 4.8 (Schranke an v). *Die Gradientenfunktion erfüllt folgende a priori Abschätzung auf M_s:*

$$v(p,s) \leq (\sup_{M_0} v + 1) \sup_{(q,s)\in M^n\times[0,s_0]} \exp(\lambda[u(q,s) - u(p,s)]),$$

wo

$$\lambda \;=\; \lambda\Big(n, \|\mathcal{L}_T g\|_{1,G}, \|T\|_{1,G}, \|\psi^{-1}\|_{1,G}, \Big).$$

Beweis. Siehe [Bar84, EH91]. $\square$

Bemerkung 4.9. Falls $\sup_{M_0} v \geq 1 + \delta$ so erhält man sogar:

$$v(p,s) \leq (\sup_{M_0} v) \sup_{(q,s)\in M^n\times[0,s_0]} \exp(\lambda[u(q,s) - u(p,s)]).$$

Bemerkung 4.10. Für die Schranke an v braucht man die zeitartige Konvergenzbedingung nicht notwendigerweise, es reicht eine untere Schranke an $\overline{R}ic(\nu,\nu)$, die dann in die Konstante λ aus Proposition 4.8 eingeht.

Proposition 4.11 (Schranke an $|A|^2$ und ihre Ableitungen). *Sei M_s wie oben und gelte die zeitartige Konvergenzbedingung, dann gilt:*

$$\sup_{M^n\times[0,s_0]} |A|^2 \leq C, \tag{4.4}$$

wobei $C = C(n, \|v\|_{0,G}, \|\overline{R}iem\|_{1,G}, \sup_{M^n\times[0,s_0]} H)$. Für $m \geq 1$ erhalten wir:

$$\sup_{M^n\times[0,s_0]} |\nabla^m A|^2 \leq C_m, \tag{4.5}$$

wobei $C_m = C(n, m, \|v\|_{0,G}, \|\overline{R}iem\|_{m+1,G}, \sum_{i=0}^{m-1} |\nabla^i A|^2, \sup_{M_0} |\nabla^m A|^2)$.

Beweis. Siehe [EH91]. $\square$

4.3 Mittlerer Krümmungsfluß in "gleichmäßig unendlich expandierenden" Raumzeiten

Definition 4.12. Eine Raumzeit $\mathcal{V} = \Sigma^n \times I$ heißt **"unendlich expandierend"**, falls sie eine raumartige Hyperfläche mit positiver mittlerer Krümmung enthält, in Zeitrichtung nicht kompakt ist (das heißt I ist unbeschränkt) und es keine raumartige Hyperfläche gibt, die überall nicht-positive mittlere Krümmung hat.

Definition 4.13. Eine Raumzeit heißt **"H-natürlich unendlich expandierend"**, falls sie im Lösungsbereich des mittleren Krümmungsflusses 4.1 "natürlich geblättert" ist.

Definition 4.14. Eine Raumzeit heißt **"gleichmäßig unendlich expandierend"**, falls es eine "natürliche Blätterung" (siehe Definition 3.16 beziehungsweise Bemerkung 3.17 (ii)) mit Flächen konstanter mittlerer Krümmung $\bar{H}$ gibt. Alternativ zu "natürlich geblättert", Definition 3.16 könnten wir wiederum annehmen, daß die durch $\bar{t} := \frac{C}{H}$ induzierte lapse Funktion $\bar{\psi} := (-\langle \overline{\nabla} t, \overline{\nabla} t \rangle)^{-\frac{1}{2}}$ beschränkt ist.

Bemerkung 4.15. "Gleichmäßig unendlich expandierende" Raumzeiten sind nach Definition "natürlich geblättert" und somit insbesondere "H-natürlich unendlich expandierend".

Um zu zeigen, daß "H-natürlich unendlich expandierende" Raumzeiten insbesondere "unendlich expandierend" sind benötigen wir das folgende wohlbekannte Lemma.

Lemma 4.16. *Seien S_1, S_2 kompakte, raumartige Hyperfächen mit mittlerer Krümmung H_1, beziehungsweise H_2. Nehmen wir an, daß*

$$d(S_1, S_2) > 0$$

und seien $\xi_i \in S_i$ so gewählt, daß

$$d(\xi_1, \xi_2) = d(S_1, S_2).$$

Dann gilt

$$H_1(\xi_1) \leq H_2(\xi_2).$$

Dabei ist d die Lorentz-Distanzfunktion, definiert wie in [HE73, Kapitel 6].

Beweis. Siehe zum Beispiel [Ger83, Lemma 7.2]. □

Mit diesem Lemma erhalten wir nun

Proposition 4.17. *Eine "H-natürlich unendlich expandierende" Raumzeit ist insbesondere "unendlich expandierend".*

Beweis. In einer "H-natürlich unendlich expandierenden" Raumzeit hat jede kompakte, raumartige Hyperfläche nach obigem Lemma in mindestens einem Punkt positive mittlere Krümmung. Es existiert somit keine kompakte raumartige Hyperfläche deren mittlere Krümmung überall nicht-positiv ist. □

Bemerkungen 4.18. (i) Eine Raumzeit ist insbesondere dann "gleichmäßig unendlich expandierend", wenn $|\bar{A}|^2 + \overline{R}ic(T,T) \leq \tilde{C}\bar{H}^2$ gilt, dabei ist $|\bar{A}|^2$ die zur Blätterung durch $\bar{H} =$ const. gehörende totale Krümmung und T die zugehörige Einheitsnormale (siehe dazu Bemerkung 3.17 und Proposition 3.3).

(ii) Die "unendlich expandierenden" Raumzeiten sind genau die, für die das Resultat von Ecker und Huisken [EH91] für den mittleren Krümmungsfluß nicht anwendbar ist. Es ist jedoch klar, daß man ohne weitere Regularitätsannahmen keine Höhenschranke und somit keine Langzeitexistenz erwarten kann.

(iii) Die Modelle für Staub und Hintergrundstrahlung im Falle $k = 0, -1$ sind Beispiele für *"H-natürlich unendlich expandierende"* Raumzeiten, siehe Proposition 3.24. Sie sind sogar " gleichmäßig unendlich expandierend", worauf wir im nächsten Abschnitt eingehen werden.

Proposition 4.19 (Höhenschranken). *In einer "gleichmäßig unendlich expandierenden" Raumzeit erfüllt die Höhenfunktion u folgende Abschätzung:*

$$u(p,s) \leq \sqrt{C^0 + 2Cs},$$
$$u(p,s) \geq \sqrt{C_0 + 2Cs},$$

wobei $C^0 = (\sup_{M_0} u)^2, C_0 = (\inf_{M_0} u)^2$ *und* C *wie in Definition 4.14.*

Beweis. Hierzu betrachten wir die Funktion $g := \frac{u}{\sqrt{C^0+Cs}}$ in dem Punkt, in dem sie zum ersten Mal den Wert $1+\varepsilon$, für $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest, erreicht (Maximum). Dort haben wir:

$$\left(\frac{d}{ds} - \Delta\right) g \geq 0.$$

Andererseits gilt aber:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{ds}-\Delta\right)g &= \frac{\bar{H}}{\sqrt{C^0+Cs}}-\frac{1}{2}\frac{Cu}{(C^0+Cs)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{C}{t\sqrt{C^0+Cs}}-\frac{Cu}{(C^0+Cs)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{C}{u\sqrt{C^0+Cs}}-\frac{Cu}{(C^0+Cs)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{C}{(1+\varepsilon)(C^0+Cs)}-\frac{C(1+\varepsilon)}{(C^0+Cs)}<0,
\end{aligned}$$

und die erste Behauptung folgt durch Widerspruch. Für den Beweis der zweiten Ungleichung betrachtet man die Funktion $\hat{g}=\frac{u}{\sqrt{C_0+Cs}}$ in dem Punkt, in dem sie zum ersten Mal den Wert $1-\varepsilon$ erreicht (Minimum). Dort gilt:

$$\left(\frac{d}{ds}-\Delta\right)\hat{g}\leq 0$$

und mit dem gleichen Argument ergibt sich ein Widerspruch. □

Eine direkte Konsequenz hieraus ist eine a priori Schranke an die Oszillation $\operatorname{osc}(u)=\sup_{M_s}u-\inf_{M_s}u$.

Korollar 4.20 (Oszillationsabschätzung). *Auf M_s gilt:*

$$\operatorname{osc}(u)\leq\sqrt{C^0+2Cs}-\sqrt{C_0+2Cs}.$$

Für $s\to\infty$ heißt das, daß die Oszillation mit Ordnung $\left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{1}{2}}$ gegen Null abfällt.

Bemerkung 4.21. Aus der Bemerkung 4.9 erhalten wir nun, daß die Gradientenfunktion v für s groß genug, durch ihren Anfangswert beschränkt ist.

Theorem 4.22. *In einer "gleichmäßig unendlich expandierenden" Raumzeit, in der die zeitartige Konvergenzbedingung (1.1) erfüllt ist, existiert eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses für alle Zeiten. Die Oszillation der Lösung konvergiert gegen Null für $s\to\infty$. Das heißt insbesondere, daß eine Lösungsfläche M_s eingespannt ist zwischen den Referenzblättern $S_{\min_{M_s}u}$ und $S_{\max_{M_s}u}$, deren Abstand, für s gegen unendlich, gegen Null konvergiert. In diesem Sinne können wir sagen, daß die Lösung gegen die Referenzblätterung konvergiert.*

Beweis. Die Existenz für alle Zeiten folgt aus den allgemeinen a priori Schranken und der Höhenschranke Proposition 4.19 durch wiederholtes anwenden des Resultats über die Kurzzeitexistenz: Sei $[0, s_0)$ ein maximales Lösungsintervall, nach Proposition 4.19 ist die Höhenfunktion u beschränkt und mit den allgemeinen a priori Schranken aus dem letzten Abschnitt folgern wir, daß M_s, für $s \to s_0$, gegen eine glatte Grenzfläche M_{s_0} konvergiert. Somit können wir die Lösung $\{M_s\}$ durch Anwendung des Kurzzeitexistenz Resultates über s_0 hinaus fortsetzen. Dies steht im Widerspruch zu der Annahme, daß $[0, s_0)$ ein maximales Lösungsintervall war, somit existiert der mittlere Krümmungsfluß für alle Zeiten.

Die Konvergenz folgt direkt aus der Schranke an die Oszillation, da für große s gilt, daß $\operatorname{osc}(u) \leq \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{Cs}}(C^0 - C_0) + o\left(\left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$. □

Proposition 4.23. *In einer "H-natürlich unendlich expandierenden" Raumzeit erfüllt die Höhenfunktion u die folgende Abschätzung:*

$$u(p,s) \leq \sqrt{C^0 + 2\hat{C}s},$$
$$u(p,s) \geq \sqrt{C_0 + 2\hat{\delta}s},$$

wobei $C^0 = (\sup_{M_0} u)^2, C_0 = (\inf_{M_0} u)^2$ *und* $\hat{C}$ *beziehungsweise* $\hat{\delta}$ *die Konstanten aus Definition 3.16 sind.*

Beweis. Genau wie Proposition 4.19, mit $\hat{C}$ beziehungsweise $\hat{\delta}$ anstatt C. □

Theorem 4.24. *In einer "H-natürlich unendlich expandierenden" Raumzeit, in der die zeitartige Konvergenzbedingung (1.1) erfüllt ist, existiert eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses für alle Zeiten.*

Beweis. Die Existenz für alle Zeiten folgt aus den allgemeinen a priori Schranken und der Höhenschranke Proposition 4.23, durch wiederholtes anwenden des Resultats über die Kurzzeitexistenz wie in Theorem 4.22. □

4.4 "Gleichmäßig unendlich expandierende" Robertson-Walker Raumzeiten

In diesem Abschnitt untersuchen wir zunächst welche Eigenschaften eine Robertson-Walker Raumzeit haben muß um "gleichmäßig unendlich expandierend" zu sein. Danach untersuchen wir noch ein Beispiel für eine "gleichmäßig unendlich expandierende" Robertson-Walker Raumzeit, das Friedmann Universum mit $k = 0$ oder -1 (siehe voriges Kapitel).

Proposition 4.25. *Eine Robertson-Walker Raumzeit ist "gleichmäßig unendlich expandierend" wenn die Skalierungsfunktion f folgende Ungleichungen, für t groß genug, erfüllt*

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} \leq \frac{\overline{R}ic(T,T)}{H_S^2} &\leq \tilde{C} \text{ das heißt} \\ \tilde{\delta} \leq -\frac{f''(t)f(t)}{f'(t)^2} &\leq \tilde{C} \end{aligned} \tag{4.6}$$

für $\tilde{\delta}, \tilde{C} \geq 0$.

Beweis. Allgemeine Resultate über Robertson-Walker Raumzeiten [ON, Ch. 12] zeigen, daß $\frac{d}{dt}H_S = (|A_S|^2 + \overline{R}ic(T,T))$. Da $H_S = nf'/f$, folgt unter der Bedingung (4.6), daß $\frac{1}{H_S}$ invertierbar ist und weil $(|A_S|^2 + \overline{R}ic(T,T))$ beschränkt ist, ist die Raumzeit "gleichmäßig unendlich expandierend". □

Proposition 4.26. *Das kosmologische Friedmann Modell ist im Fall $k = 0, -1$ "gleichmäßig unendlich expandierend".*

Beweis. Dazu genügt es zu zeigen, daß (4.6) in einem Friedmann Modell erfüllt ist. Hierzu schauen wir uns die Lösungen der Friedmann Gleichung mit $f(0) = 0$ an.

$$\begin{array}{llll} (\alpha) & k = 0: & f(t) = Ct^{\frac{2}{3}}, \text{ mit } 4C^3 = 9A; & \\ (\beta) & k = -1: & t = \frac{1}{2}A(\sinh\eta - \eta), \quad f = \frac{1}{2}A(\cosh\eta - 1) & \eta > 0. \end{array}$$

Im Fall (α) erhalten wir $\frac{\overline{R}ic(T,T)}{H_S^2} = \frac{1}{2}$, so daß 4.6 mit $\tilde{\delta} = \tilde{C} = \frac{1}{2}$ erfüllt ist. Falls $k = -1$ ist, ergibt sich $0 \leq \frac{\overline{R}ic(T,T)}{H_S^2} \leq \frac{1}{2}$. □

Bemerkungen 4.27. (i) Das Modell der Hintergrundstrahlung ist auch eine Robertson-Walker Raumzeit, die explizite Lösung für die Skalierungsfunktion f findet sich zum Beispiel in [Wal84][Table 5.1] und man rechnet genau wie oben Bedingung (4.6) für die Fälle $k = 0, -1$ leicht nach.

(ii) Das kosmologische Friedmann Modell ist im Fall $k = 0, -1$ "natürlich geblättert" (siehe Proposition 3.24), und somit insbesondere "H-natürlich geblättert".

Kapitel 5

Mittlerer Krümmungsfluß im de Sitter Modell

Die de Sitter Raumzeit (siehe zum Beispiel [HE73]) ist eine Raumzeit mit konstanter, positiver Krümmung κ. Sie ist Vakuumlösung der Einsteinschen Feldgleichungen mit Kosmologischer Konstante $\Lambda = \frac{1}{4}\overline{R}$. Beschrieben wird sie durch eine Robertson-Walker Raumzeit mit Skalierungsfunktion $f(t) = \alpha^2 \cosh^2(\alpha^{-1}t)$, mit $\frac{1}{\alpha^2} = \kappa$. Woraus wir insbesondere schließen können, daß $\overline{Ric}(T,T) = -3\kappa$ und somit die zeitartige Konvergenzbedingung verletzt ist! Wir müssen die a priori Schranken an u, H und A also erst noch beweisen. Die a priori Schranke an v muß nicht noch einmal bewiesen werden, da die allgemeine Abschätzung aus dem letzten Kapitel nicht von der zeitartigen Konvergenzbedingung abhängt (siehe Bemerkung 4.10).

Man sieht leicht, daß die Referenzblätterung nur Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung $\bar{H}$ enthält, für die

$$-n\sqrt{\kappa} \leq \bar{H} \leq n\sqrt{\kappa} \tag{5.1}$$

gilt. Das Anfangswertproblem 4.1 macht demnach nur Sinn, wenn

$$\begin{aligned} \sup_{M_0} H &< n\sqrt{\kappa}, \\ \inf_{M_0} H &> 0 \text{ und} \\ \sup_{M_0} |A|^2 &< n\kappa \end{aligned} \tag{5.2}$$

gilt, was wir im folgenden annehmen wollen.

5.1 Spezielle Evolutionsgleichungen

Berechnen wir nun die Evolutionsgleichungen für die zweite Fundamentalform und die mit ihr zusammenhängenden Größen unter Berücksichtigung der Konstanz der Schnittkrümmungen.

Lemma 5.1. *Für die zweite Fundamentalform erhalten wir*

$$\left(\frac{d}{ds} - \Delta\right) h_{ij} = 2Hh_{ik}h_j^k - h_{ij}(|A|^2 - n\kappa) + 2H\kappa g_{ij} - 2h_{ij}n\kappa.$$

Beweis. Dies ist eine direkte Konsequenz aus Lemma 4.4 und der Konstanz der Schnittkrümmungen. □

Aus Lemma 4.2 erhalten wir die folgenden Gleichungen für die Weingartenabbildung $\mathfrak{W}$, ihre Spur $H = \mathrm{tr}(\mathfrak{W})$ und die Spur ihres Quadrats $|A|^2 = \mathrm{tr}(\mathfrak{W}^2)$.

Korollar 5.2.

$$\left(\frac{d}{ds} - \Delta\right) \mathfrak{W} = -\mathfrak{W}(\mathrm{tr}(\mathfrak{W}^2) - n\kappa) + 2\mathrm{tr}(\mathfrak{W})\kappa\mathfrak{I} - 2\mathfrak{W}n\kappa, \tag{5.3}$$

$$\left(\frac{d}{ds} - \Delta\right) H = -H(|A|^2 - n\kappa), \tag{5.4}$$

$$\left(\frac{d}{ds} - \Delta\right) |A|^2 = -2|A|^4 + 2|A|^2 n\kappa + 4H^2\kappa - 4|A|^2 n\kappa - 2|\nabla A|^2. \tag{5.5}$$

5.2 A priori Schranken

Sei im folgenden $\{M_s\}$ eine Lösung des mittleren Krümmungsflusses (4.1) unter der eingeschränkten Anfangsbedingung (5.2). Aus (5.1) erhält man mit Lemma 4.3 (i) und Lemma 3.5 direkt:

Lemma 5.3. *Die Höhenfunktion u erfüllt auf M_s:*

$$\sup_{M_s} u \leq exp(n\sqrt{\kappa}s),$$
$$\inf_{M_s} u \geq \exp(s \inf_{M_0} H).$$

Direkt aus (5.4), (5.5) und dem Maximumprinzip können wir Schranken an die mittlere Krümmung und die Norm der zweiten Fundamentalform beweisen, obwohl die zeitartige Konvergenzbedingung nicht gilt.

Lemma 5.4. *Wir haben die folgende a priori Abschätzung auf M_s:*

$$|A|^2 \leq n\kappa. \tag{5.6}$$

Beweis. Angenommen $|A|^2$ erreicht zum ersten Mal den Wert $n\kappa + \varepsilon$, für $\varepsilon > 0$ beliebig, im Punkt (p_1, s_1), dann gilt in diesem Punkt:

$$\left(\frac{d}{ds} - \Delta\right) |A|^2 \geq 0.$$

Aus der Evolutionsgleichung (5.5) erhalten wir jedoch:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{ds} - \Delta\right) |A|^2 &= 2n\kappa|A|^2 - 2|A|^4 - 4n\kappa|A|^2 + 4\kappa H^2 - 2|\nabla A|^2 \\ &\leq -2|A|^4 + 2n\kappa|A|^2 < 0,\end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

Lemma 5.5. *Die mittlere Krümmung H erfüllt die folgenden a priori Abschätzungen auf M_s:*

$$\begin{aligned}H &\leq n\sqrt{\kappa}, \\ H &\geq \inf_{M_0} H.\end{aligned}$$

Beweis. Für die erste Abschätzung betrachten wir den Punkt, an dem H^2 zum ersten Mal den Wert $n^2\kappa + \varepsilon$, für $\varepsilon > 0$, erreicht. Dort gilt dann:

$$\left(\frac{d}{ds} - \Delta\right) H^2 \geq 0.$$

Aus der Evolutionsgleichung (5.4) erhalten wir jedoch:

$$\left(\frac{d}{ds} - \Delta\right) H^2 = -2H^2(|A|^2 - n\kappa) - |\nabla H|^2 \leq -2H^2(\frac{1}{n}H^2 - n\kappa) < 0.$$

und der Beweis folgt durch Widerspruch.
Für die zweiten a priori Abschätzung setzen wir $e(s) = \inf\{H(p,s) : p \in M^n\}$ und zeigen, daß $\frac{d}{ds}e(s) \geq 0$ ist. Dazu genügt es nach Lemma 3.5 zu zeigen, daß $\inf\left\{\frac{d}{ds}H(p,s) : p \in Y(s)\right\} \geq 0$ ist, wobei $Y(s) := \Big\{p : H(p,s) = e(s)\Big\}$.
In $Y(s)$ ist

$$\Delta H \geq 0.$$

Es folgt, daß

$$\begin{aligned}&\inf\left\{\frac{d}{ds}H(p,s) : p \in Y(s)\right\} = \\ &\qquad \inf\left\{\Delta H - H(|A|^2 - n\kappa) : p \in Y(s)\right\} \overset{|A|^2 - n\kappa \leq 0}{\geq} 0\end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Bemerkung 5.6. Für die höheren Ableitungen verweisen wir auf (4.5).

5.3 Langzeitexistenz und Konvergenz

Mit den a priori Schranken aus dem letzten Abschnitt erhalten wir nun sofort:

Theorem 5.7 (Langzeitexistenz). *Der mittlere Krümmungsfluß (4.1), mit den eingeschränkten Anfangsbedingungen (5.2), existiert im de Sitter Modell für alle Zeiten.*

Beweis. Gleiches Argument wie im vorigen Kapitel: Aus den a priori Schranken dieses Abschnittes folgt, daß M_s gegen eine glatte Fläche M_{s_0} konvergiert wenn $s \to s_0$. Somit kann die Lösung M_s mit dem Resultat über die Kurzzeitexistenz über s_0 hinaus fortgesetzt werden. $\square$

Nun wollen wir noch zeigen, daß die Lösung des mittleren Krümmungsflusses in der de Sitter Raumzeit gegen runde Sphären konvergiert.

Theorem 5.8 (Konvergenz zu runden Sphären). *Der mittlere Krümmungsfluß (4.1), mit den eingeschränkten Anfangsbedingungen (5.2), konvergiert im de Sitter Modell exponentiell zu runden Sphären. Darunter verstehen wir, daß die Differenz der Eigenwerte der zweiten Fundamentalform exponentiell gegen Null konvergiert.*

Beweis. Wir betrachten hierzu die Funktion $f := (|A|^2 - \frac{1}{n}H^2)\exp((C_A + 2n\kappa)s)$ mit $C_A = \frac{2-\hat{\varepsilon}}{n}\inf_{M_0} H^2$, $\hat{\varepsilon} > 0$ beliebig aber fest. Angenommen f erreicht zum ersten mal $\sup_{M_0}(|A|^2 - \frac{1}{n}H^2) + \varepsilon$ im Punkt (p_1, s_1), ($\varepsilon > 0$ beliebig) dann gilt dort:

$$\left(\frac{d}{ds} - \Delta\right)(|A|^2 - \frac{1}{n}H^2)\exp((C_A + 2n\kappa)s) \le 0 \tag{5.7}$$

$$\nabla(|A|^2 - \frac{1}{n}H^2) = 0.$$

Andererseits erhalten wir aus 4.3:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{ds}-\Delta\right)&(|A|^2-\frac{1}{n}H^2)\exp((C_A+2n\kappa)s)\\
&=\exp((C_A+2n\kappa)s)\Bigg((C_A+2n\kappa)\left(|A|^2-\frac{1}{n}H^2\right)\\
&\qquad\qquad+\left(\frac{d}{ds}-\Delta\right)|A|^2-\frac{1}{n}\left(\frac{d}{ds}-\Delta\right)H^2\Bigg)\\
&=\exp((C_A+2n\kappa)s)\Bigg((C_A+2n\kappa)\left(|A|^2-\frac{1}{n}H^2\right)+2\frac{1}{n}H^2|A|^2\\
&\qquad-2H^2\kappa-2|A|^4-2|A|^2n\kappa+4H^2\kappa-2|\nabla A|^2+2\frac{1}{n}|\nabla H|^2\Bigg)\\
&\leq-\left(|A|^2-\frac{1}{n}H^2\right)\left(2|A|^2+2n\kappa-2n\kappa-C_A\right)\exp((C_A+2n\kappa)s)\\
&\leq-\left(|A|^2-\frac{1}{n}H^2\right)\left(\hat{\varepsilon}|A|^2\right)\exp((C_A+2n\kappa)s)<0
\end{aligned}$$

im Widerspruch zu 5.7.
Somit ist $|A|^2-\frac{1}{n}H^2\leq\sup_{M_0}\left(|A|^2-\frac{1}{n}H^2\right)\exp(-(C_A+2n\kappa)s)$.
Da die mittlere Krümmung H nach Lemma 5.5 beschränkt ist, konvergiert die Differenz der Eigenwerte der zweiten Fundamentalform exponentiell gegen Null. Die Konvergenz zu Flächen konstanter Schnittkrümmung folgt demnach aus der Gauß Gleichung und der konstanten Schnittkrümmung des de Sitter Modells. □

Bemerkung 5.9. Die Isometriegruppe des de Sitter Modells S_1^4 ist die Lorentzgruppe $O_1(5)$ der linearen Isometrien des fünf-dimensionalen Minkowskiraums $\mathbb{R}_1^5$ [O'N83, Kapitel 9]. Daher können wir nicht erwarten, daß der mittlere Krümmungsfluß (4.1), mit den eingeschränkten Anfangsbedingungen (5.2), gegen die vom *warped product* induzierte Referenzblätterung konvergiert. Die Sphären der Refenzblätterung sind isometrisch zu den, durch die *Lorentz Boosts* in $\mathbb{R}_1^5$, gekippten Sphären.

Mein Dank gilt meinem Betreuer Prof. Huisken und meiner Familie.

Literaturverzeichnis

[And94] B. Andrews, *Contraction of convex hypersurfaces in riemannian spaces*, J. Diff. Geom. **39** (1994), 407–431.

[Bar84] R. Bartnik, *Existence of maximal surfaces in asymptotically flat spacetimes*, Commun. Math. Phys. **94** (1984), 155–175.

[CB76] Y. Choquet-Bruhat, *Maximal submanifolds and submanifolds with constant mean extrinsic curvature of a lorenzian manifold*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **IV** (1976), no. 3, 361–376.

[Cho85] B. Chow, *Deforming convex hypersurfaces by the nth root of the gaussian curvature*, J. Diff. Geometry **22** (1985), 117–138.

[Cho87] B. Chow, *Deforming convex hypersurfaces by the square root of the scalar curvature*, Invent. Math. **87** (1987), 63–82.

[CY76] S.-Y. Cheng and S.-T. Yau, *Maximal spacelike hypersurfaces in the lorentz-minkowski space*, Ann. Math. **104** (1976), 407–419.

[DeT83] D.M. DeTurck, *Deforming metrics in direction of their ricci tensors*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 157–162.

[EH89] K. Ecker and G. Huisken, *Mean curvature evolution of entire graphs*, Ann. Math. **130** (1989), 453–471.

[EH91] K. Ecker and G. Huisken, *Parabolic methods for the construction of spacelike slices of prescribed mean curvature in cosmological spacetimes*, Commun. Math. Phys. **135** (1991), 595–613.

[Fir74] W.J. Firey, *Shapes of worn stones*, Mathematika **21** (1974), 1–11.

[FM79] A. Fischer and J. Marsden, *Topics in the dynamics of general relativity, in isolated gravitating systems in general relativity*, Italian Phys. Society (1979), 322–395.

[Ger83] C. Gerhardt, *H surfaces in lorentzian manifolds*, Comm. Math. Phys. **89** (1983), 523–553.

[Ger90] C. Gerhardt, *Flow of nonconvex hypersurfaces moving by mean curvature*, J. Diff. Geometry **32** (1990), 299–314.

[Ham82] R. S. Hamilton, *Three-manifolds with positive ricci curvature*, J. Diff. Geometry **17** (1982), 255–306.

[Ham86] R. S. Hamilton, *Four manifolds with positive curvature operator*, J. Diff. Geometry 24 **24** (1986), 153–179.

[Ham89] R. S. Hamilton, *Cmbs conference notes*, 1989, Hawaii.

[HE73] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, 1973.

[HI97] G. Huisken and T. Ilmanen, *Riemannian penrose inequality*, Int. Math. Res. Not. (1997), no. 20, 1045–1058.

[HI98] G. Huisken and T. Ilmanen, *The inverse mean curvature flow and the riemannian penrose inequality*, to appear (1998).

[Hol96] M. Holder, *Kontraktion raumartiger hyperflächen entlang ihrer inversen mittleren krümmung*, Diplomarbeit, Universität Tübingen, Germany, May 1996.

[HP96] G. Huisken and A. Polden, *Geometric evolution equations for hypersurfaces*, CIME conference notes, to appear (1996), Cetraro.

[Hui84] G. Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Diff. Geometry **20** (1984), 237–266.

[Hui86] G. Huisken, *Contracting convex hypersurfaces in riemannian manifolds by their mean curvature*, Invent. Math. **84** (1986), 463–480.

[Kry87] N. V. Krylov, *Nonlinear elliptic and parabolic equations of second order*, D. Reidel Publishing Company, 1987.

[LSU68] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural´ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 23, American Mathematical Society, 1968.

[O'N83] B. O'Neill, *Semi-riemannian geometry*, Academic Press, 1983.

[PW67] M.H. Protter and H.F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Prentice Hall, 1967.

[Sim68] J. Simons, *Minimal varieties in riemannian manifolds*, Ann. of Math. **88** (1968), 62–105.

[SSY75] R. Schoen, L. Simon, and S.-T. Yau, *Curvature estimates for minimal hypersurfaces*, Acta. Math. **134** (1975), 275–288.

[Tso85] K. Tso, *Deforming a hypersurface by its gauss-kronecker curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 867–882.

[Urb90] J. I. E. Urbas, *On the expansion of starshaped hypersurfaces by symetric functions of their principal curvatures*, Math. Z. **205** (1990), 355–372.

[Wal84] R. M. Wald, *General relativity*, The University of Chicago Press, Chicago, U.S.A., 1984.