

LINEARE ALGEBRA 2

BLATT 2

Abgabe: Donnerstag, den 30.04.2026, 10:00 Uhr

⊗ **Aufgabe 1.** Es sei R ein K1-Ring. Zeige:

- (i) Ist $S_i, i \in I$, eine Familie von Unterringen $S_i \subseteq R$, so ist $\bigcap_{i \in I} S_i$ wieder ein Unterring in R .
- (ii) Ist $S \subseteq R$ ein Unterring und ist $A \subseteq R$ eine Teilmenge, so gilt

$$S[A] = \bigcap_{\substack{S' \subseteq R \text{ Unterring,} \\ S \cup A \subseteq S'}} S'.$$

⊗ **Aufgabe 2.** Es sei $1 \neq d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei, d. h., ohne Teiler der Form k^2 mit $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Weiter bezeichne $\sqrt{d} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ wie üblich die Quadratwurzel und für $d \in \mathbb{Z}_{<0}$ setzen wir $\sqrt{d} := I\sqrt{|d|} \in \mathbb{C}$. Zeige:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{m + n\sqrt{d}; m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Betrachte weiter die Abbildung $N: \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \rightarrow \mathbb{Z}, m + n\sqrt{d} \mapsto m^2 - n^2d$ und zeige:

- (i) Für je zwei $a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ gilt $N(ab) = N(a)N(b)$.
- (ii) Es gilt $N(a) = 0 \iff a = 0$ für alle $a \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.
- (iii) Die Einheitengruppe des Ringes $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ist $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^* = \{a \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]; N(a) = \pm 1\}$.

Aufgabe 3. Es seien R ein K1-Ring und $\mathfrak{a} \trianglelefteq_R R$ ein Ideal in R . Das *Radikal* von \mathfrak{a} ist definiert als

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{b \in R; b^n \in \mathfrak{a} \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

Zeige: Das Radikal $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq R$ ist wieder ein Ideal in R .

Hinweis: Verwende den binomischen Lehrsatz.

Aufgabe 4. Für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ bezeichne $\varphi(n)$ die Anzahl aller ganzen Zahlen a mit $1 \leq a \leq n$ und $\text{ggT}(a, n) = 1$. Zeige: Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(a, n) = 1$ gilt $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Hinweis: Verwende Aufgabe 4 von Blatt 1 und Beispiel 1.3.4.