

LINEARE ALGEBRA 2

BLATT 4

Abgabe: Mittwoch, den 13.05.2026, 20:00 Uhr

- ⊛ **Aufgabe 1.** Die *Eulersche Φ -Funktion* ordnet jeder Zahl $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ die Anzahl $\Phi(n)$ der zu n teilerfremden ganzen Zahlen m mit $1 \leq m \leq n$ zu:

$$\Phi(n) = |\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}; m \leq n, 1 \in \text{ggT}(m, n)\}|.$$

Zeige folgende Aussagen:

- (i) Ist $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ eine Primzahl, so ist $\Phi(p) = p - 1$.
- (ii) Ist $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ eine Primzahl und $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, so ist $\Phi(p^\nu) = p^\nu - p^{\nu-1}$.
- (iii) Für paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und $\nu_1, \dots, \nu_r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ gilt

$$\Phi(p_1^{\nu_1}) \cdots \Phi(p_r^{\nu_r}) = \Phi(p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}).$$

Hinweis: Verwende Bemerkung 2.3.14.

- (iv) Für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ sei $n = p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}$ eine Darstellung mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_1, \dots, p_r . Zeige: Es gilt

$$\Phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Aufgabe 2. Zeige: Zu jedem Tripel (a_1, a_2, a_3) ganzer Zahlen gibt es eine ganze Zahl a mit

$$a \equiv a_1 \pmod{13}, \quad a \equiv a_2 \pmod{37}, \quad a \equiv a_3 \pmod{42},$$

wobei die Schreibweise „ $a \equiv b \pmod{c}$ “ wie üblich bedeutet, dass c ein Teiler der Differenz $b - a$ ist.

- ⊛ **Aufgabe 3.** Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(3, 3; \mathbb{Q}), \quad p := T^3 - 2T^2 + 2 \in \mathbb{Q}[T], \quad v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3.$$

Betrachte die von $\varphi: \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3, v \mapsto A \cdot v$ induzierte $\mathbb{Q}[T]$ -Modulstruktur auf \mathbb{Q}^3 und berechne $p \cdot v$.

Aufgabe 4. Es seien \mathbb{K} ein Körper, V ein \mathbb{K} -Vektorraum und $\varphi: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Betrachte die zugehörige $\mathbb{K}[T]$ -Modulstruktur auf V und zeige, dass für jede Teilmenge $U \subseteq V$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) U ist ein Untermodul des $\mathbb{K}[T]$ -Moduls V ,
- (ii) U ist ein Untervektorraum des \mathbb{K} -Vektorraums V und es gilt $\varphi(U) \subseteq U$.

Die mit ⊛ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet.