

# LINEARE ALGEBRA 2

<https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/sommersemester-2026/lina2>

Fachbereich Mathematik  
Arbeitsbereich Algebra  
Sommersemester 2026

---

## BLATT 6

Abgabe: Mittwoch, den 03.06.2026, 20:00 Uhr

---

*In der Pfingstpause (25. bis 31. Mai) finden keine Vorlesungen und Übungsgruppen statt. Der Vorlesungs- und Übungsbetrieb beginnt wieder am Montag, den 1. Juni.*

**Aufgabe 1.** Als abelsche Gruppe ist  $(\mathbb{Q}, +)$  ein  $\mathbb{Z}$ -Modul. Zeige:  $(\mathbb{Q}, +)$  ist torsionsfrei, aber nicht frei.

**Aufgabe 2.** Berechne die Länge des  $\mathbb{Z}$ -Moduls  $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$  und gib eine Kette maximaler Länge an. Bestimme weiter die Länge der  $\mathbb{Z}$ -Moduln  $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ .

⊗ **Aufgabe 3.** Bestimme Hermite- und Smith-Normalform der ganzzahligen Matrix  $A$  in den folgenden Fällen:

$$A := \begin{pmatrix} 12 & -4 & 8 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Gib ganzzahlige Matrizen  $S$  und  $T$  an so, dass  $S \cdot A$  bzw.  $S \cdot A \cdot T$  die jeweilige Hermite- bzw. Smith-Normalform annimmt.

⊗ **Aufgabe 4.** Es seien  $R$  ein Integritätsring,  $A \in \text{Mat}(m, n; R)$  und  $S \in \text{GL}(n; R)$  so, dass  $B := S \cdot A^t$  Zeilenstufenform mit  $r$  Pivoteinträgen besitzt. Betrachte die zu  $A$  gehörige lineare Abbildung

$$\mu_A : R^n \rightarrow R^m, \quad v \mapsto A \cdot v.$$

Zeige folgende Aussagen:

- (i) Die Zeilen  $B_{1*}, \dots, B_{r*}$  bilden eine Basis für  $\text{Bild}(\mu_A) \leq_R R^m$ .
- (ii) Die Zeilen  $S_{r+1*}, \dots, S_{n*}$  bilden eine Basis für  $\text{Kern}(\mu_A) \leq_R R^n$ .

---

Die mit ⊗ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet.