Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra 2

https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/sommersemester-2026/lina2

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra
Sommersemester 2026

Blatt 7

Abgabe: Donnerstag, den 11.06.2026, 10:00 Uhr

⊛ **Aufgabe 1.** Bestimme Elementarteiler und primäre Elementarteiler für die folgenden $\mathbb{Z}$-Moduln:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/200\mathbb{Z}.$$

Aufgabe 2. Bestimme Elementarteiler und primäre Elementarteiler des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}^3/N$, wobei

$$N \coloneqq \operatorname{Lin}((2,0,2),(2,-3,8),(0,3,-6)) \leq_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^3.$$

Aufgabe 3. Bestimme bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 200.

⊛ **Aufgabe 4.** Es seien R ein euklidischer Ring, F ein freier R-Modul vom Rang n und $M \leq_R F$ ein Untermodul. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) F/M ist frei.

(ii) F/M ist torsionsfrei.

(iii) Es gibt eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von F mit $M = \operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_m)$ für ein $m \leq n$.

(iv) Für je zwei Elemente $v \in F$ und $0_R \neq r \in R$ gilt $r \cdot v \in M \Longrightarrow v \in M$.

Die mit ⊛ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet.