

LINEARE ALGEBRA 2

<https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/sommersemester-2026/lina2>

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra
Sommersemester 2026

BLATT 8

Abgabe: Donnerstag, den 18.06.2026, 10:00 Uhr

Aufgabe 1. Es seien \mathbb{K} ein Körper und $A \in \text{GL}(n; \mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix. Zeige: Es gibt ein Polynom $f \in \mathbb{K}[T]$ mit $\deg(f) \leq n$ und $f(A) = A^{-1}$.

Hinweis: Betrachte das Minimalpolynom q_A von A .

Aufgabe 2. Es sei $\mathbb{K} := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der Körper mit zwei Elementen. Bestimme die Anzahl der Äquivalenzklassen folgender Äquivalenzrelation auf $\text{Mat}(2, 2; \mathbb{K})$:

$$A \sim B \quad :\iff \quad \text{es existiert ein } S \in \text{GL}(2; \mathbb{K}) \text{ so, dass } B = S \cdot A \cdot S^{-1}.$$

Hinweis: Wie viele verschiedene Matrizen in rationaler Normalform gibt es in $\text{Mat}(2, 2; \mathbb{K})$?

⊛ **Aufgabe 3.** Bestimme die Elementarteiler und das Minimalpolynom für den Endomorphismus $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $v \mapsto A \cdot v$ in den Fällen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Begründe die Ergebnisse jeweils. *Hinweis:* Betrachte das charakteristische Polynom und verwende den Satz von Cayley-Hamilton.

⊛ **Aufgabe 4.** Bestimme Elementarteiler, Minimalpolynom und rationale Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 11 & 7 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(4, 4; \mathbb{Q}).$$

Die mit ⊛ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet.