Übungen zur Vorlesung

# Lineare Algebra 2

https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/sommersemester-2026/lina2

**Prof. Dr. Jürgen Hausen**

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra
Sommersemester 2026

## Blatt 11

Abgabe: Donnerstag, den 09.07.2026, 10:00 Uhr

⊛ **Aufgabe 1.** Es sei $V := \mathbb{R}^2$. Betrachte das Tensorprodukt $V \otimes V$ und den Vektor

$$u \ := \ (1,2) \otimes (2,3) - (2,1) \otimes (1,-1) \ \in \ V \otimes V.$$

Entwickle den Vektor $u$ nach der Basis $(v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, v_2 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2)$, wobei

$$v_1 \ := \ (1,2), \quad v_2 \ := \ (0,1), \qquad\qquad w_1 \ := \ (2,1), \quad w_2 \ := \ (3,1).$$

**Aufgabe 2.** Zeige, dass das Element $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ nicht zerlegbar ist.

⊛ **Aufgabe 3.** Das *Kronecker-Produkt* zweier Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{Mat}(k,l;\mathbb{K})$ ist die Matrix

$$A \otimes B \ := \ \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix} \ \in \ \mathrm{Mat}(mk, nl; \mathbb{K}).$$

Betrachte die lineare Abbildung $\mu_A \otimes \mu_B \colon \mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^l \to \mathbb{K}^m \otimes \mathbb{K}^k$. Zeige: $A \otimes B$ ist die darstellende Matrix der linearen Abbildung $\mu_A \otimes \mu_B$ bezüglich der Basen

$$(e_i \otimes e_j;\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, l), \qquad (e_\imath \otimes e_\jmath;\ \imath = 1, \dots, m,\ \jmath = 1, \dots, k).$$

**Aufgabe 4.** Es sei $V := \mathbb{R}^2$. Bestimme die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ der linearen Abbildung

$$\varphi \ := \ \mu_A \otimes \mu_B \colon V \otimes V \to V \otimes V$$

bezüglich der Basis $\mathbb{B} = (e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2)$, wobei die Matrizen $A$ und $B$ gegeben sind als

$$A \ := \ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad\qquad B \ := \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die mit ⊛ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet.