U Tübingen Wintersemester 2018/19

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebraische Strukturen

Prof. Dr. A. v. Pippich

Abgabetermin: 30.10.2018 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 1 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Untersuchen Sie, ob folgende Mengen M mit der Verknüpfung $\circ$ eine Halbgruppe oder ein Monoid bilden. Ist die Verknüpfung kommutativ?

(a) $M = 2\mathbb{N} + 1$ mit $m \circ n := m + n \quad (m, n \in M)$.

(b) $M = \mathbb{N}$ mit $m \circ n := \min\{m, n\} \quad (m, n \in \mathbb{N})$.

(c) $M = \mathbb{N}$ mit $m \circ n := \max\{m, n\} \quad (m, n \in \mathbb{N})$.

(d) $M = \mathbb{N}$ mit $m \circ n := m^n \quad (m, n \in \mathbb{N})$.

(e) $M = \mathrm{Abb}(\mathbb{N})$ mit $(f_1 \circ f_2)(n) := f_1(f_2(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $(f_1, f_2 \in M)$.

Hier bezeichne $\mathrm{Abb}(\mathbb{N})$ die Menge aller Abbildungen der natürlichen Zahlen in sich selbst.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl. Wir betrachten die Teilmenge $\mathcal{R}_n := \{0, \ldots, n-1\}$ der ersten n natürlichen Zahlen. Auf der Menge $\mathcal{R}_n$ können wir wie folgt zwei Verknüpfungen einführen: Dazu bezeichnen wir den eindeutig bestimmten Rest einer natürlichen Zahl c nach Division durch n mit $R_n(c)$; es gilt $R_n(c) \in \mathcal{R}_n$. Für zwei Zahlen $a, b \in \mathcal{R}_n$ setzen wir jetzt:

$$\begin{aligned} \oplus : \mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_n \longrightarrow \mathcal{R}_n, &\quad \text{gegeben durch } (a, b) \mapsto a \oplus b := R_n(a + b); \\ \odot : \mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_n \longrightarrow \mathcal{R}_n, &\quad \text{gegeben durch } (a, b) \mapsto a \odot b := R_n(a \cdot b). \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ assoziativ sind.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{R}_n, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist. Geben Sie die Gruppentafel für $(\mathcal{R}_6, \oplus)$ an.

(c) Es sei $n \in \{1, \ldots, 6\}$. Entscheiden Sie, wann $(\mathcal{R}_n \setminus \{0\}, \odot)$ eine abelsche Gruppe ist und geben Sie gegebenenfalls die Gruppentafel an.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe.

(a) Es seien $g \in G$ und g'_ℓ ein linksinverses bzw. g'_r ein rechtsinverses Element zu g. Zeigen Sie, dass dann $g'_\ell = g'_r$ gilt.

(b) Beweisen Sie, dass das Inverse g^{-1} eines Elements $g \in G$ eindeutig bestimmt ist.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $g, h \in G$

$$(g^{-1})^{-1} = g \quad \text{und} \quad (g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$$

gilt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Geben Sie alle strukturell verschiedenen Gruppentafeln zu Gruppen der Ordnungen 1, 2, 3 und 4 an. Begründen Sie.