U Tübingen Wintersemester 2018/19

# Übungsaufgaben zur Vorlesung
# **Algebraische Strukturen**

Prof. Dr. A. v. Pippich

Abgabetermin: 13.11.2018 vor der Vorlesung

**Bitte beachten:**
**JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.**
**JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.**

## Serie 2 (40+10 Punkte)

### Aufgabe 1 (10 Punkte)

Untersuchen Sie, ob folgende Mengen $G$ mit der Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe bilden. Ist die Verknüpfung kommutativ?

(a) $G = \mathbb{R}$ mit $a \circ b := 3a + 4b \quad (a, b \in G)$.

(b) $G = \mathbb{R}$ mit $a \circ b := a + b - ab \quad (a, b \in G)$.

(c) $G = ]-1, 1[$ mit $a \circ b := \frac{a+b}{1+ab} \quad (a, b \in G)$.

(d) $G = \left\{ \left( \begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{smallmatrix} \right) \mid a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 \right\}$ und $\circ$ ist die Matrizenmultiplikation.

(e) $G = \mathcal{P}(M)$, $M$ beliebige Menge, mit $A \circ B := (A \cup B) \setminus A \cap B \quad (A, B \in G)$.

Hier bezeichne $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von $M$, d.h. die Menge aller Teilmengen von $M$.

### Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe.

(a) Es seien $U_1 \leq G$ und $U_2 \leq G$ Untergruppen. Zeigen Sie, dass die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ genau dann eine Untergruppe von $G$ ist, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

(b) Es sei $I$ eine beliebige Indexmenge und $U_i \leq G$ eine Untergruppe für alle $i \in I$. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{i \in I} U_i$$

eine Untergruppe von $G$ ist.

### Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie für jedes Element $\pi \in S_3$ seine Ordnung $\mathrm{ord}_{S_3}(\pi)$.

(b) Finden Sie alle Untergruppen der Gruppe $S_3$. Welche davon sind kommutative Gruppen? Welche sind zyklisch?

**Aufgabe 4 (10 Punkte)**
Es seien $(G, \circ)$ eine Gruppe und $M$ eine beliebige Teilmenge von $G$. Weiter sei

$$\langle M \rangle = \bigcap_{U \leq G \text{ mit } M \subseteq U} U$$

die von $M$ erzeugt Untergruppe, d.h. der Durchschnitt aller Untergruppen von $G$, die $M$ enthalten. Zeigen Sie, dass für eine Teilmenge $V \subseteq G$ genau dann die Gleichheit $V = \langle M \rangle$ besteht, wenn gilt:

(i) $V \leq G$ ist eine Untergruppe von $G$ mit $M \subseteq V$.

(ii) Ist $H \leq G$ eine beliebige Untergruppe von $G$ mit $M \subseteq H$, so gilt $V \subseteq H$.

Man sagt deshalb auch, dass $\langle M \rangle$ die kleinste Untergruppe von $G$ ist, die $M$ enthält.

**Aufgabe 5* (10 Punkte)**
Es seien $G = \{a, b, c, x, y, z\}$ eine Menge und $\circ\colon G \times G \to G$ eine Verknüpfung. Vervollständigen Sie die folgende Gruppentafel, so dass $(G, \circ)$ eine Gruppe wird:

| $\circ$ | $a$ | $b$ | $c$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | | | | | $c$ | $b$ |
| $b$ | | $x$ | $z$ | | | |
| $c$ | | $y$ | | | | |
| $x$ | | | | $x$ | | |
| $y$ | | | | | | |
| $z$ | | $a$ | | | $x$ | |

Begründen Sie!