Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebraische Strukturen

Prof. Dr. A. v. Pippich

Abgabetermin: 27.11.2018 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 3 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei $f : (G, \circ_G) \longrightarrow (H, \circ_H)$ ein Gruppenhomomorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass für die neutralen Elemente $e_G \in G$ und $e_H \in H$ die Gleichheit $f(e_G) = e_H$ besteht.

(b) Zeigen Sie, dass für ein Element $g \in G$ und sein Inverses $g^{-1} \in G$ die Gleichheit $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ in H gilt.

(c) Zeigen Sie, dass für ein Element $g \in G$ stets $\mathrm{ord}_G(g) \geq \mathrm{ord}_H(f(g))$ gilt.

(d) Zeigen Sie: Ist f ein Gruppenisomorphismus, so ist die mengentheoretische Umkehrabbildung $f^{-1} : H \longrightarrow G$ ebenfalls ein Gruppenisomorphismus.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Finden Sie alle Gruppenhomomorphismen

$$f : (\mathcal{R}_4, \oplus) \longrightarrow (\mathcal{R}_4, \oplus).$$

Bestimmen Sie jeweils Kern und Bild dieser Gruppenhomomorphismen.

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppen $(\mathcal{R}_6, \oplus)$ und $(\mathcal{R}_7 \backslash \{0\}, \odot)$ isomorph sind.

(c) Es seien $p \neq q$ zwei Primzahlen. Beweisen Sie: Ist $f : (\mathcal{R}_p, \oplus) \longrightarrow (\mathcal{R}_q, \oplus)$ ein Gruppenhomomorphismus, so muss für alle $n \in \mathcal{R}_p$ die Gleichheit $f(n) = 0$ gelten.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Es sei G eine abelsche Gruppe. Welche Untergruppen $H \leq G$ sind Normalteiler? Begründen Sie.

(b) Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe vom Index 2. Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler in G ist.

(c) Geben Sie für die Situation in (b) einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von G nach $\mathcal{R}_2$ an. Begründen Sie.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Rechts- und Linksnebenklassen aller Untergruppen von S_3. Welche der Untergruppen sind Normalteiler in S_3?

(b) Beweisen Sie: Ist $f : (S_3, \circ) \longrightarrow (\mathcal{R}_3, \oplus)$ ein Gruppenhomomorphismus, so muss für alle $\pi \in S_3$ die Gleichheit $f(\pi) = 0$ gelten.