Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebraische Strukturen

Prof. Dr. A. v. Pippich

Abgabetermin: 11.12.2018 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 4 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Gegeben sei die Untergruppe $N := \{0, 4\} \leq (\mathcal{R}_8, \oplus)$. Zeigen Sie, dass N ein Normalteiler in $(\mathcal{R}_8, \oplus)$ ist und verifizieren Sie die Isomorphie $(\mathcal{R}_8/N, \oplus) \cong (\mathcal{R}_4, \oplus)$.

(b) Zeigen Sie allgemein: Es seien m, n, r natürliche Zahlen mit $r = m \cdot n$. Dann gibt es einen Normalteiler $N \trianglelefteq (\mathcal{R}_r, \oplus)$ mit $N \cong (\mathcal{R}_n, \oplus)$, und es gilt die Isomorphie $(\mathcal{R}_r/N, \oplus) \cong (\mathcal{R}_m, \oplus)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Ist $f : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus und $N \trianglelefteq H$ ein Normalteiler in H, so ist das Urbild $f^{-1}(N)$ von N unter f ein Normalteiler in G.

(b) Betrachten Sie die Untergruppe $U := \{d_0, d_2, s_2, s_4\} \leq D_8$, die die Identität d_0, die Drehung d_2 um den Winkel π und die Spiegelungen s_2, s_4 an den beiden Seitenhalbierenden des Quadrats enthält. Stellen Sie die Gruppentafel von U auf. Verwenden Sie (a), um zu zeigen, dass U ein Normalteiler in D_8 ist, indem Sie einen geeigneten Gruppenhomomorphismus $f : D_8 \longrightarrow S_4$ angeben.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien G eine Gruppe, $U \leq G$ eine Untergruppe von G und $N \trianglelefteq G$ Normalteiler in G. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $UN \leq G$.

(b) $N \trianglelefteq UN$.

(c) $U \cap N \trianglelefteq U$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es seien G eine Gruppe, $U \leq G$ eine Untergruppe von G und $N \trianglelefteq G$ Normalteiler in G. Beweisen Sie die Gruppenisomorphie

$$UN/N \cong U/U \cap N.$$

Aufgabe 5* (10 Punkte)

(a) Folgern Sie aus dem Satz von Lagrange, dass in einer endlichen Gruppe die Ordnung eines Elements stets ein Teiler der Gruppenordnung ist.

(b) Schliessen aus Teilaufgabe (a), dass eine Gruppe von Primzahlordnung zyklisch ist.