U Tübingen Wintersemester 2018/19

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebraische Strukturen

Prof. Dr. A. v. Pippich

Abgabetermin: 08.01.2019 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 5 (40+20 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

zwei Permutationen in S_7.

(a) Berechnen Sie $\pi \circ \sigma$, $\sigma \circ \pi$, π^{-1} und σ^{-1}.

(b) Bestimmen Sie für jede der Permutationen in (a) die Zyklenzerlegung.

(c) Schreiben Sie $\pi \circ \sigma$ als Produkt von Transpositionen.

(d) Schreiben Sie σ^{-1} als Produkt von Transpositionen aufeinander folgender Zahlen.

(e) Berechnen Sie für jede der Permutationen in (a) das Signum.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Es seien $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement 1 und

$$R^\times := \{a \in R \,|\, \exists\, b \in R : a \cdot b = 1 = b \cdot a\} \subseteq R$$

die Menge aller Elemente in R, die in R multiplikativ invertierbar sind. Zeigen Sie: $(R^\times, \cdot)$ ist eine Gruppe. Man nennt diese die *Einheitengruppe von* R und ihre Elemente *Einheiten von* R.

(b) Bestimmen Sie die Einheitengruppen der Ringe $(\mathcal{R}_n, \oplus, \odot)$ für $n = 7, 9, 13, 21$. Welche dieser Gruppen sind zyklisch, welche sind zueinander isomorph?

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Integritätsbereich mit Einselement 1. Wir definieren den *Polynomring* $(R[X], +, \cdot)$ *in der Variablen* X *mit Koeffizienten aus* R als die Menge

$$R[X] := \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \cdot X^j \,\middle|\, a_j \in R,\, a_j = 0 \text{ für fast alle } j \in \mathbb{N} \right\}$$

mit den Verknüpfungen

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \cdot X^j\right) + \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j \cdot X^j\right) := \sum_{j\in\mathbb{N}} (a_j + b_j) \cdot X^j,$$
$$\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \cdot X^j\right) \cdot \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j \cdot X^j\right) := \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\sum_{\substack{k,\ell\in\mathbb{N}\\ k+\ell=j}} a_k \cdot b_\ell\right) \cdot X^j.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(R[X], +, \cdot)$ ein Integritätsbereich mit Einselement ist.

(b) Weisen Sie nach, dass die Einheiten von $R[X]$ mit den Einheiten von R übereinstimmen.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es sei E eine Menge mit mindestens zwei Elementen und $\mathcal{P}(E)$ die Potenzmenge von E, d.h. die Menge aller Teilmengen von E. Auf $\mathcal{P}(E)$ betrachten wir die Verknüpfungen $\cup$, $\cap$ und die symmetrische Differenz Δ, welche für $A, B \in \mathcal{P}(E)$ durch

$$A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

definiert ist.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap)$ kein Ring ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

(c) Bestimmen Sie die Nullteiler und Einheiten von $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$.

Aufgabe 5* (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie: $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \{\overline{0}\}, \cdot)$ ist genau dann eine Gruppe, wenn n eine Primzahl ist.

(b) Berechnen Sie das Inverse von $\overline{16}$ in der Gruppe $(\mathbb{Z}/97\mathbb{Z} \setminus \{\overline{0}\}, \cdot)$.

(c) Es sei p eine Primzahl und $a \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Lagrange, dass die Teilbarkeitsbeziehung

$$p \mid (a^p - a)$$

besteht.

Aufgabe 6* (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Untergruppen und Normalteiler der Gruppe $D_8 = \langle (1234), (24) \rangle$.

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen und Normalteiler der Gruppe $D_{10} = \langle (12345), (15) \circ (24) \rangle$.