Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebraische Strukturen

Prof. Dr. A. v. Pippich

Abgabetermin: 22.01.2019 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 6 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement 1. Prüfen Sie nach, ob die folgenden Abbildungen Ringhomomorphismen sind:

(i) $f_1 : R[X] \longrightarrow R$, wobei $f_1\left(\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} a_j \cdot X^j\right) := a_0$.

(ii) $f_2 : R[X] \longrightarrow R$, wobei $f_2\left(\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} a_j \cdot X^j\right) := a_1$.

(iii) $f_3 : R[X] \longrightarrow R$, wobei
$f_3\left(\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} a_j \cdot X^j\right) := \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} a_j \cdot r^j$ mit einem festen $r \in R$.

Bestimmen Sie für diejenigen Abbildungen, die Ringhomomorphismen sind, Kern und Bild. Welche dieser Kerne sind Hauptideale?

(b) Finden Sie einen Ringhomomorphismus $f : (\mathbb{Z}[X], +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +, \cdot)$, so dass sich unter Anwendung des Korollars zum Homomorphiesatz für Ringe für $a \in \mathbb{Z}$ der Ringisomorphismus

$$(\mathbb{Z}[X]/(X - a), \oplus, \odot) \cong (\mathbb{Z}, +, \cdot)$$

ergibt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Es seien $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Einselement 1 und $a \in R$. Zeigen Sie, dass die Menge $(a) := \{a \cdot r \mid r \in R\}$ ein Ideal von R ist.

(b) Zeigen Sie, dass im Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ alle Ideale Hauptideale sind, d. h. zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ existiert eine ganze Zahl a mit der Eigenschaft $\mathfrak{a} = (a)$.

(c) Gibt es im Polynomring $(\mathbb{Z}[X], +, \cdot)$ ein Ideal, das kein Hauptideal ist? Begründen Sie!

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in K. Zeigen Sie, dass dann entweder $\mathfrak{a} = (0)$ oder $\mathfrak{a} = (1)$ gelten muss.

(b) Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Bestimmen Sie alle Ringhomomorphismen $f : (\mathbb{Q}, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

(c) Bestimmen Sie alle Ringhomomorphismen $f : (\mathbb{Q}, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(K[X], +, \cdot)$ der Polynomring in der Variablen X mit Koeffizienten aus K. Für $f(X) = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \cdot X^j \in K[X]$ definieren wir *den Grad von* $f(X)$ durch

$$\operatorname{grad}(f) := \max\{j \in \mathbb{N} \mid a_j \neq 0\},$$

sofern $f \neq 0$ gilt. Für $f = 0$ setzen wir $\operatorname{grad}(f) := -\infty$.

(a) Beweisen Sie die Gradformel

$$\operatorname{grad}(f \cdot g) = \operatorname{grad}(f) + \operatorname{grad}(g)$$

für $f, g \in K[X]$; hierbei setzen wir $n + -\infty := -\infty$ für $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$. Können Sie auch eine Formel für $\operatorname{grad}(f + g)$ angeben? Gelten diese Gradformeln auch, wenn Sie K durch einen beliebigen Ring $(R, +, \cdot)$ mit Einselement 1 ersetzen?

(b) Zeigen Sie, dass Division mit Rest auch in $(K[X], +, \cdot)$ durchgeführt werden kann. Beweisen Sie dazu: Sind $a(X), b(X)$ zwei Polynome in $K[X]$ mit $b \neq 0$, dann gibt es $q(X), r(X) \in K[X]$ mit $0 \leq \operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(b)$ oder $r = 0$, so dass

$$a(X) = q(X) \cdot b(X) + r(X)$$

gilt.

Aufgabe 5* (10 Punkte)
Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Einselement 1.

(a) Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale von R. Dann nennen wir die Menge

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} := \{a + b \mid a \in \mathfrak{a},\ b \in \mathfrak{b}\}$$

die *Summe der Ideale* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ein Ideal von R ist.

(b) Es seien I eine beliebige Indexmenge und $\mathfrak{a}_i$ Ideale von R für alle $i \in I$. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i$$

ein Ideal von R ist.

(c) Es sei $M \subseteq R$ eine beliebige, nicht-leere Teilmenge. Wir setzen

$$\langle M \rangle := \bigcap_{\mathfrak{a} \text{ Ideal von } R,\, M \subseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{a},$$

d.h. $\langle M \rangle$ ist der Durchschnitt aller Ideale von R, die M enthalten. Nach Teilaufgabe (b) ist $\langle M \rangle$ ein Ideal von R, das sogenannte *von M erzeugte Ideal*. Beweisen Sie die Gleichheit

$$\langle M \rangle = \left\{ \sum_{j=1}^{n} r_j \cdot m_j \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_{>0}; r_j \in R, m_j \in M \text{ für alle } j = 1, \ldots, n \right\},$$

d.h. $\langle M \rangle$ ist die Menge aller endlichen Linearkombinationen von Elementen in M mit Koeffizienten in R.