Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebraische Strukturen

Prof. Dr. A. v. Pippich

Serie 7

Aufgabe 1
Betrachten Sie die folgende Teilmenge komplexer Zahlen

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + b \cdot i \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C},$$

die sogenannten *ganzen Gaußschen Zahlen*. Beweisen Sie:

(a) $\mathbb{Z}[i]$ ist zusammen mit der üblichen Addition und Multiplikation komplexer Zahlen ein kommutativer Ring mit Einselement.

(b) $\mathbb{Z}[i]$ ist mit der Wertefunktion $w : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$, $z \mapsto |z|^2$, ein Euklidischer Ring.

Aufgabe 2
Führen Sie den Euklidischen Algorithmus zur Bestimmung eines größten gemeinsamen Teilers (a, b) von a, b in den beiden folgenden Fällen durch:

(a) $a = 123\,456\,789$, $b = 555\,555\,555$ im Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

(b) $a = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$, $b = X^3 + X^2 - X - 1$ im Polynomring $(\mathbb{Q}[X], +, \cdot)$.

Aufgabe 3

(a) Lösen Sie die folgende simultane Kongruenz:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \mod 4 \\ x &\equiv 1 \mod 7 \\ x &\equiv 3 \mod 5 \end{aligned}$$

(b) Lösen Sie die folgende simultane Kongruenz:

$$\begin{aligned} 9x &\equiv 6 \mod 11 \\ 12x &\equiv 5 \mod 7 \\ 14x &\equiv 13 \mod 15 \end{aligned}$$

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass für einen Integritätsbereich R mit Einselement die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) R ist ein Körper.

(ii) $R[X]$ ist ein Euklidischer Ring.

(iii) $R[X]$ ist ein Hauptidealring.

Aufgabe 5
Es seien m_1, m_2 positive natürliche Zahlen mit $m_1 \,|\, m_2$. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $a \bmod m_2 \mapsto a \bmod m_1$ einen surjektiven Ringhomomorphismus

$$f : \mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z}$$

mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned}\# f^{-1}(a \bmod m_1) &= \# \left\{ \bar{b} \in \mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z} \mid f(\bar{b}) = a \bmod m_1 \right\} \\ &= m_2/m_1\end{aligned}$$

induziert.